

ネットワーク上の情報拡散ゲームに関する一考察

筑波大学 システム情報工学研究科

竹原 令依子, 繁野 麻衣子

概要 Hotelling の出店問題に端を発する競合的な施設配置ゲーム (立地ゲーム) は, ライバル企業同士がより広い市場を獲得するための立地競争モデルなどで広く研究されている. 本稿では, グラフ上の施設配置ゲームの一つである情報拡散ゲームを扱い, 純粋戦略ナッシュ均衡の存在性について議論する. まず, 直径 2 のグラフ上の情報拡散ゲームにおいて, 純粋戦略ナッシュ均衡が存在しない例を示し, グラフの直径によって純粋戦略ナッシュ均衡の存在性の特徴付けが難しいことを示唆する. さらに, プレイヤ数が 3 以外のときにはパスグラフ上での情報拡散ゲームには純粋戦略ナッシュ均衡が存在することを示す. そして, 情報拡散ゲームと類似している離散ポロノイゲームの純粋戦略ナッシュ均衡との比較検討を行う.

1 はじめに

競合的な施設配置ゲーム (立地ゲーム) は, Hotelling の出店問題 [7] に始まり, ライバル企業同士がより広い市場を獲得するための立地競争モデルなどで広く研究されている. グラフ上でのモデルも古くからあり [3, 6, 8], 近年では社会ネットワークでの口コミの拡散過程などを表すモデルとして, 様々な視点からの研究がある (例えば, [1, 4, 5] など). 特に, web マーケティングでの口コミでは, より影響力の強いユーザに情報を送り, そこからネットワークに効率的に情報を拡散させることが重要となる.

グラフ上での施設配置ゲームの一つに, Alon ら [2] による情報拡散ゲームがある. このゲームでは, 最初に各プレイヤーはグラフ上の 1 つのノードを選択し, そのノードに情報を送る. そして, 情報を送られたノードは次の時点で, まだ情報を持っていない隣接するノードに情報を送る. ただし, 同時に複数の情報を送信されたノードは, 情報が衝突してどの情報も受け取らず, その後の情報拡散の障壁となる. こうして, 時点毎に情報を受け取ったノードが情報を持っていない隣接ノードに情報を送ることを繰り返す. このとき, 各プレイヤーは, なるべく多くのノードに情報を拡散させるように最初のノードを選択する. 類似した施設配置ゲームに離散ポロノイゲームがある [5]. ただし, 離散ポロノイゲームでは, 同時に複数の情報を受け取ったノードはすべての情報を受け取り, このノードは情報源のプレイヤーで等分するとしている.

本研究では, 情報拡散ゲームに対する純粋戦略ナッシュ均衡の存在性について議論する. ナッシュ均衡とは, どのプレイヤーも戦略を変えることで自分の利得を増加させることができない安定した状態をいう. ここでは, 各プレイヤーは確定的に戦略を決定する純粋戦略のみを考えて, 純粋戦略をとるときのナッシュ均衡の存在性を示す. 情報拡散ゲームに対する純粋戦略ナッシュ均衡の存在性については Alon ら [2] が述べている. また, 離散ポロノイゲームに対しても Dürr -Thang[5] は存在性について議論しており, 非常に単純なグラフでも 2 人のプレイヤーで純粋戦略ナッシュ均衡が存在しないケースがあることを示している.

本稿では、次節で情報拡散ゲームを定義し、3節で直径2のグラフでも純粋戦略ナッシュ均衡が存在しないケースがあることを示す。4節ではパスグラフ上の純粋戦略ナッシュ均衡の存在性について述べる。

2 情報拡散ゲーム

$G = (V, E)$ を無向グラフとし、任意のノード $v \in V$ に対して、 N_v を v の隣接ノードの集合に v を加えた集合、すなわち、 $N_v = \{u \in V \mid (u, v) \in E\} \cup \{v\}$ とする。また、ノード u, v 間の距離（最小枝数）を $d(u, v)$ で表す。

プレイヤーの集合を $N = \{1, 2, \dots, n\}$ とする G 上の情報拡散ゲームでは、各プレイヤー $i \in N$ は個々の色 c_i を持っている。ただし、この色 c_i は『白』と『灰色』以外であり、同じ色を複数のプレイヤーが共有することはないとする（つまり、 $i \neq j$ ならば $c_i \neq c_j$ ）。情報拡散ゲームの初期状態では、どのノード $v \in V$ も白に塗られており、以下の過程を通して、白いノードにいずれかのプレイヤーの色か灰色が塗られていく。

時刻 0 [初期状態] すべてのノード $v \in V$ を白で塗る。

時刻 1 [初期配置] 各プレイヤー $i \in N$ は一つのノード v を選択し、 v を色 c_i で塗る。ただし、複数のプレイヤーが同じノード v を選択したときは、そのノード v は灰色に塗られる。

時刻 t ($t \geq 2$) [拡散過程] 各白いノード $v \in N$ に対し、

1. v に隣接するノード N_v の中に、 c_i で塗られたノードがあり、かつ、 i 以外の任意のプレイヤー j の色 c_j で塗られたノードがないとき、 v を c_i で塗る。
2. v に隣接するノード N_v の中に、 c_i で塗られたノードと c_j ($i \neq j$) で塗られたノードが存在するとき、 v を灰色で塗る。
3. v に隣接するノード N_v の中には白か灰色で塗られたノードしか存在しない場合、 v は白のまま。

この拡散過程を繰り返し、どの白いノードも色が塗られることがなくなったら（拡散過程の1, 2が起きないければ）、ゲームが終了する。このゲームの各プレイヤーの戦略は時刻1の初期配置でどのノードを選択するかであり、戦略集合は V である。戦略プロファイル $\mathbf{x} \in V^N$ に対し、各プレイヤー i の利得関数 $U_i(\mathbf{x})$ は、ゲームが終了したときに c_i で塗られているノードの個数で与えられる。

一方、離散ポロノイゲームでも各プレイヤーは最初にノードを一つ選択し、時刻を追う毎に隣接するノードを獲得する。ただし、複数のプレイヤーが同時に一つのノードに到達したときには、到達したプレイヤーでそのノードを等分する。よって、離散ポロノイゲームでも、各プレイヤーの戦略集合は V である。そして、戦略プロファイル $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in V^N$ と頂点 $v \in V$ に対して、 $C_v(\mathbf{x}) = \arg \min \{d(x_i, v) \mid i \in N\}$ とする。つまり、 $C_v(\mathbf{x})$ は各プレイヤーが最初に選んだノード x_1, x_2, \dots, x_n のうち、 v に最も近いノードを選んだプレイヤーの集合を表す。このとき、離散ポロノイゲームでの利得関数 $\tilde{U}_i(\mathbf{x})$ は $\sum_{v \in V} \{\frac{1}{|C_v(\mathbf{x})|} \mid i \in C_v(\mathbf{x})\}$ で与えられる。情報拡散ゲームと離散ポロノイゲームではどちらも、各プレイヤー i はどの他プレイヤー j に対しても、 $d(v, x_i) < d(v, x_j)$

となるノード v を獲得する。しかし、 $d(v, x_i) = d(v, x_j)$ となる j が存在する場合に、ノード v の配分の仕方が異なる。

与えられた戦略プロファイル $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ とノード $x' \in V$ に対して、 (x', \mathbf{x}_{-i}) はプレイヤー i の戦略を x_i から x' に置き換えた戦略プロファイル $(x_1, \dots, x_{i-1}, x', x_{i+1}, \dots, x_n)$ を表す。戦略プロファイル \mathbf{x} が、どんな $i \in N$ と $x' \in V$ に対しても $U_i(x', \mathbf{x}_{-i}) \leq U_i(\mathbf{x})$ を満たすとき、 \mathbf{x} は純粋戦略ナッシュ均衡であるという。

以下、一般性を失うことなく、 $n < |V|$ と仮定する。

3 直径 2 のグラフ上のゲームにおける純粋戦略ナッシュ均衡

Alon ら [2] は、情報拡散ゲームの純粋戦略ナッシュ均衡の存在性とグラフの直径の関係について議論している。ここで、グラフの直径とは、2 ノード間の距離の最大値、つまり、 $\max\{d(u, v) \mid (u, v) \in V \times V\}$ で与えられる。Alon ら [2] は、直径が 3 以上になると、プレイヤーが 2 人の場合でも純粋戦略ナッシュ均衡が存在しないことがあると示している。

本節では、たとえ直径が 2 のグラフ上の情報拡散ゲームであっても純粋戦略ナッシュ均衡が存在しない例が存在することを示す。これは、グラフの直径によって純粋戦略ナッシュ均衡の存在性を特徴付けることが困難であることを示唆する。図 1 に示すグラフは直径が 2 である。このグラフ上の 2 人のプレイヤーの情報拡散ゲームを考える。このときの利得行列を表 1 に示す。この利得行

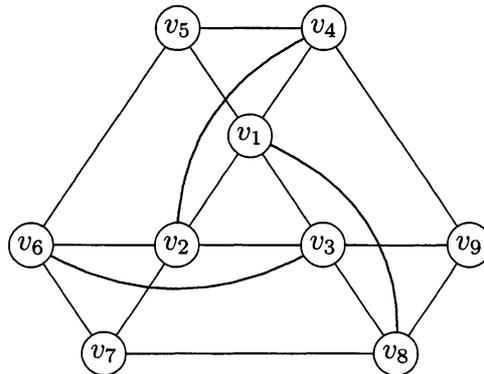


図 1 プレイヤーが 2 人でも純粋戦略ナッシュ均衡が存在しない直径 2 のグラフ

列から、以下のことが分かる。

- 任意の $x_1 \in V$ と任意の $x_2 \in \{v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9\}$ に対して、ある $v \in \{v_1, v_2, v_3\}$ で $U_2(x_1, x_2) < U_2(x_1, v)$ を満たす v が必ず存在する。
- 三つ巴の関係 $U_2(v_1, v_2) < U_2(v_1, v_3)$, $U_2(v_2, v_3) < U_2(v_2, v_1)$, $U_2(v_3, v_1) < U_2(v_3, v_2)$ が成り立つ。

以上から、このゲームには純粋戦略ナッシュ均衡が存在しないことが分かる。

この例では、直径が 2 であるにも関わらず、時刻 3 まで拡散過程が継続することが要点となる。

表 1 図 1 のグラフ上の 2 プレイヤの情報拡散ゲームにおける利得行列. (i, j) 成分は $(U_1(v_i, v_j), U_2(v_i, v_j))$ を表す.

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
v_1	(0, 0)	(4, 3)	(3, 4)	(5, 2)	(5, 2)	(4, 2)	(5, 2)	(4, 3)	(5, 1)
v_2		(0, 0)	(4, 3)	(4, 3)	(5, 1)	(5, 2)	(5, 2)	(4, 2)	(5, 2)
v_3			(0, 0)	(4, 2)	(5, 2)	(4, 3)	(5, 1)	(5, 2)	(5, 2)
v_4				(0, 0)	(4, 2)	(3, 3)	(4, 3)	(3, 3)	(4, 3)
v_5					(0, 0)	(3, 4)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 3)
v_6						(0, 0)	(4, 2)	(3, 3)	(4, 3)
v_7							(0, 0)	(3, 4)	(3, 3)
v_8								(0, 0)	(4, 2)
v_9									(0, 0)

例えば, 戦略プロファイル (v_1, v_9) では, $(N_{v_9} \setminus \{v_9\}) \subset N_{v_1}$ であるために, 時刻 2 で c_2 に塗られるノードは存在しない. 一方, v_2 と v_5 は時刻 2 で c_1 に塗られ, その後, 時刻 3 では, ノード v_6 と v_7 が c_1 に塗られる. しかし, [2] では, 直径 2 のグラフでは, 時刻 2 までで拡散過程が終了するとして, 利得関数の関係式

$$U_i(\mathbf{x}) = |N_{x_i}| - \left| \bigcup_{j \neq i} (N_{x_i} \cap N_{x_j}) \right| + \chi_{A_i}(\mathbf{x}), \quad (1)$$

を用いて純粋戦略ナッシュ均衡の存在性を示していた. ただし, $\chi_{A_i}(\mathbf{x})$ は $A_i = \{\mathbf{x} \mid \exists j \in N \setminus \{i\}, x_j \in N_{x_i}\}$ の特性関数, すなわち, $x_j \in N_{x_i}$ を満たす $j (j \neq i)$ が存在するときに 1, そうでないときに 0 をとる. 実際, $U_1(v_1, v_9) = 5$ であるが, (1) の右辺は $|N_{v_1}| - |(N_{v_1} \cap N_{v_9})| + \chi_{A_1}(v_1, v_9) = 6 - 3 - 0 = 3$ となる. 等式 (1) が成り立つための条件についての議論は [9] にある.

4 パスグラフ上のゲームにおける純粋戦略ナッシュ均衡

本節では, $G = (V, E)$ はパスグラフであり, パス上でノードが順に番号付けされているとする. すなわち, $V = \{v_1, \dots, v_{|V|}\}$ と $E = \{(v_i, v_{i+1}) \mid 1 \leq i < |V|\}$ で与えられているとする. 戦略プロファイル $\mathbf{x} (\in V^N)$ に対して, プレイヤ i が選択したノード x_i の番号を $l_i(\mathbf{x})$ で表す. すなわち, $x_i = v_p$ であるとき, $l_i(\mathbf{x}) = p$ とする. 戦略プロファイル \mathbf{x} が, 任意のプレイヤ i, j に対して $i < j$ ならば $l_i(\mathbf{x}) \leq l_j(\mathbf{x})$ を満たすとき, この戦略プロファイル \mathbf{x} を“増加系”と呼ぶ. 一般性を失うことなく, 増加系の純粋戦略ナッシュ均衡のみ考えることができる.

パスグラフにおいては, 情報拡散ゲームが終了したときに白いノードは存在しない. さらに, 灰色に塗られたノードは離散ボロノイゲームでは, 複数のプレイヤに割り当てられる. よって, パスグラフ上での均衡は両ゲームで類似していると思われる. しかし, 両ゲームで純粋戦略ナッシュ均衡が異なる例を提示する. 9 ノードのパスグラフ上の 5 人のプレイヤによるゲームを考える (図 2 参照). 戦略プロファイル $\mathbf{x} = (v_2, v_3, v_5, v_7, v_8)$ は離散ボロノイゲームの

純粋戦略ナッシュ均衡である。このときの利得関数は $\tilde{U}_1(\mathbf{x}) = \tilde{U}_3(\mathbf{x}) = \tilde{U}_5(\mathbf{x}) = 2$ であり、 $\tilde{U}_2(\mathbf{x}) = \tilde{U}_4(\mathbf{x}) = 1.5$ となっている。しかし、この戦略プロファイル \mathbf{x} は情報拡散ゲームでの純粋戦略ナッシュ均衡にはなっていない。なぜならば、プレイヤー 3 の利得関数は $U_3(\mathbf{x}) = 1$ であるが、 $\mathbf{x}' = (v_4, \mathbf{x}_{-3}) = (v_2, v_3, v_4, v_7, v_8)$ に対して、 $U_3(\mathbf{x}') = 2$ となり、プレイヤー 3 は利得を増加させることができるからである。実際、 \mathbf{x}' は情報拡散ゲームの純粋戦略ナッシュ均衡である。しかし、この戦略 \mathbf{x}' は離散ポロノイゲームでは純粋戦略ナッシュ均衡にはなっていない。なぜならば、 $\tilde{U}_2(\mathbf{x}') = 1$ であるが、 $\mathbf{x}'' = (v_5, \mathbf{x}'_{-2}) = (v_2, v_5, v_4, v_7, v_8)$ に対して、 $\tilde{U}_2(\mathbf{x}'') = 1.5$ であり、プレイヤー 2 は利得を増加させることができるからである。以上の観察から、離散ポロノイゲームと

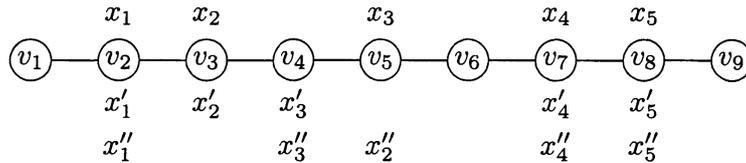


図 2 情報拡散ゲームと離散ポロノイゲームで純粋戦略ナッシュ均衡が異なる例

は別に、情報拡散ゲームの純粋戦略ナッシュ均衡の存在性について詳しく議論する必要があることが分かる。

始めに、情報拡散ゲームに対する純粋戦略ナッシュ均衡の基本的性質を述べる。

補題 1 パスグラフにおいて、増加系の戦略プロファイル \mathbf{x} が情報拡散ゲームに対する純粋戦略ナッシュ均衡であるとき、 x_1 と x_2 は隣接している。同様に、 x_n と x_{n-1} も隣接している。

証明 $l_1(\mathbf{x}) = p$, $l_2(\mathbf{x}) = q$ であり $p < q$ と仮定する。増加系の戦略プロファイルなので、 v_1, \dots, v_{p-1} 及び v_{p+1}, \dots, v_{q-1} にはどのプレイヤーも配置していない。よって、 $U_1(\mathbf{x}) = p + \lfloor \frac{q-p+1}{2} \rfloor - 1$ を得る。もし、 x_1 が x_2 に隣接していない場合、すなわち、 $q \neq p+1$ のときは、プレイヤー 1 は v_{q-1} に移動した方が利得が増加する。つまり、 $U_1(v_{q-1}, \mathbf{x}_{-1}) = q - 1 > U_1(\mathbf{x})$ となる。よって、純粋戦略ナッシュ均衡ならば、 $q = p+1$ が成り立つ。 x_n についても同様。□

この性質は離散ポロノイゲームでは成り立たない。なぜならば、複数のプレイヤーが最初に同じ頂点を選択することもあり、戦略プロファイル $(v_2, v_2, v_5, v_7, v_8)$ もまた、9 ノードのパスグラフ上の離散ポロノイゲームに対する純粋戦略ナッシュ均衡になるからである。

まず、2 プレイヤでの情報拡散ゲームの純粋戦略ナッシュ均衡の存在性について考える。補題 1 より、もし、純粋戦略ナッシュ均衡 \mathbf{x} が存在するならば、それは (v_p, v_{p+1}) と表せる。このとき、パスグラフであるので、 $U_1(\mathbf{x}) = p$ であり、 $U_2(\mathbf{x}) = |V| - p$ となる。さて、 $\mathbf{x}' = (v_{p+2}, v_{p+1})$ 、 $\mathbf{x}'' = (v_p, v_{p-1})$ とすると、 $U_1(\mathbf{x}') = |V| - p - 1 \leq U_1(\mathbf{x})$ 、 $U_2(\mathbf{x}'') = p - 1 \leq U_2(\mathbf{x})$ であるので、 $\lfloor \frac{|V|}{2} \rfloor \leq p \leq \lceil \frac{|V|}{2} \rceil$ を得る。実際、 $(v_{\lfloor \frac{|V|}{2} \rfloor}, v_{\lfloor \frac{|V|}{2} \rfloor + 1})$ と $(v_{\lceil \frac{|V|}{2} \rceil}, v_{\lceil \frac{|V|}{2} \rceil + 1})$ は純粋戦略ナッシュ均衡である。よって、パスグラフ上の 2 プレイヤの情報拡散ゲームに対する純粋戦略ナッシュ均衡は、Hotelling の出店問題のように中心部分に隣り合って配置される戦略プロファイルのみとなることが分かる。

同様に、4 プレイヤの場合も考える。補題 1 より、もし純粋戦略ナッシュ均衡 \mathbf{x} が存在するならば、それは $p < q$ である番号を用いて、 $\mathbf{x} = (v_p, v_{p+1}, v_q, v_{q+1})$ と表せる。このときの各プレイヤの利得は、 $U_1(\mathbf{x}) = p, U_2(\mathbf{x}) = U_3(\mathbf{x}) = \lfloor \frac{q-p-1}{2} \rfloor, U_4(\mathbf{x}) = |V| - q$ である。そして、

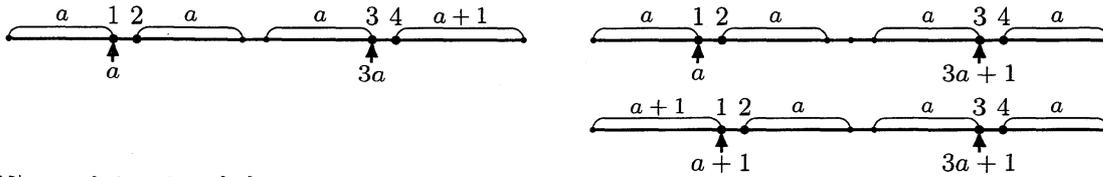
$$\begin{aligned} U_1(v_{p+2}, \mathbf{x}_{-1}) &= \lfloor \frac{q-p-1}{2} \rfloor \leq U_1(\mathbf{x}), \\ U_1(v_{q+2}, \mathbf{x}_{-1}) &= |V| - q - 1 \leq U_1(\mathbf{x}), \\ U_2(v_{p-1}, \mathbf{x}_{-2}) &= p - 1 \leq U_2(\mathbf{x}), \\ U_2(v_{q+2}, \mathbf{x}_{-2}) &= |V| - q - 1 \leq U_2(\mathbf{x}), \\ U_4(v_{p-1}, \mathbf{x}_{-4}) &= p - 1 \leq U_4(\mathbf{x}), \\ U_4(v_{p+2}, \mathbf{x}_{-4}) &= \lfloor \frac{q-p-1}{2} \rfloor \leq U_4(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

の関係から、 $\lfloor \frac{|V|}{4} \rfloor \leq p \leq \lceil \frac{|V|}{4} \rceil$ と $\lfloor \frac{3|V|}{4} \rfloor \leq q \leq \lceil \frac{3|V|}{4} \rceil$ を得る。実際、 $(v_{\lfloor \frac{|V|}{4} \rfloor}, v_{\lfloor \frac{|V|}{4} \rfloor + 1}, v_{\lceil \frac{3|V|}{4} \rceil}, v_{\lceil \frac{3|V|}{4} \rceil + 1})$, $(v_{\lceil \frac{|V|}{4} \rceil}, v_{\lceil \frac{|V|}{4} \rceil + 1}, v_{\lfloor \frac{3|V|}{4} \rfloor}, v_{\lfloor \frac{3|V|}{4} \rfloor + 1})$ は純粋戦略ナッシュ均衡になっている。パスの長さ $|V|$ によって、4 プレイヤの純粋戦略ナッシュ均衡はこれ以外にも存在する。 $(|V| \bmod 4)$ の値で 4 つのケースに分けて、すべての純粋戦略ナッシュ均衡を図 3 に示す。

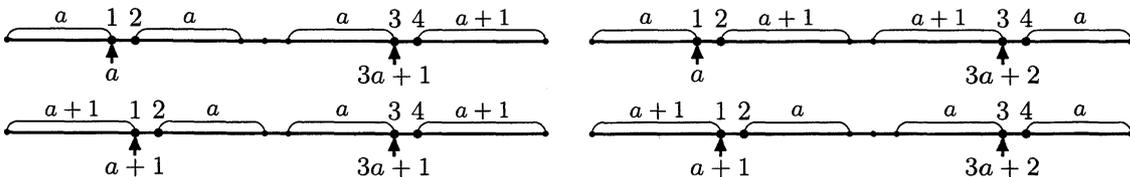
$|V| \bmod 4 = 0$ のとき



$|V| \bmod 4 = 1$ のとき



$|V| \bmod 4 = 2$ のとき



$|V| \bmod 4 = 3$ のとき

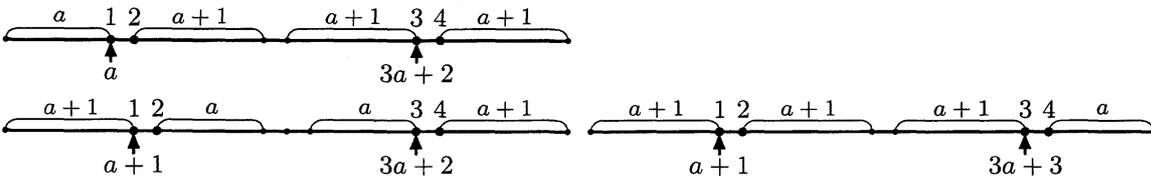


図 3 パスグラフ上の 4 プレイヤの情報拡散ゲームに対するすべての純粋戦略ナッシュ均衡

一方で、3 プレイヤの場合は、補題 1 から以下の結果が得られる。

補題 2 ノード数が 6 以上のパスグラフにおいて、3 プレイヤの情報拡散ゲームには純粋戦略ナッシュ均衡は存在しない。

証明 補題 1 より, 純粋戦略ナッシュ均衡が存在すれば, $\mathbf{x} = (v_{p-1}, v_p, v_{p+1})$ を満たす. このとき, $U_2(\mathbf{x}) = 1$ であるが, もし, $p \geq 4$ ならば, $U_2(v_{p-2}, \mathbf{x}_{-2}) = p - 2 \geq 2$ であり, プレイヤ 2 は v_{p-1} を選択した方が利得が増加する. 従って, \mathbf{x} は純粋戦略ナッシュ均衡ではない. よって, $p \leq 3$ となるが, このとき, $U_2(v_{p+2}, \mathbf{x}_{-2}) = |V| - p - 1 \geq 2$ となり, やはり純粋戦略ナッシュ均衡とはならない. \square

プレイヤが 3 人でない場合には, パスグラフ上の情報拡散ゲームには純粋戦略ナッシュ均衡が存在することをプレイヤの人数 n が偶数, 奇数で場合分けして示す.

補題 3 プレイヤの人数 n が偶数であり, $|V| = an + b$ ($b < n$) と表せるとする. このとき,

$$y_i = \begin{cases} v_{ia + \min\{i, b\}} & (i: \text{奇数}) \\ v_{(i-1)a + \min\{i, b+1\}} & (i: \text{偶数}) \end{cases} \quad (2)$$

で与えられる戦略プロファイル \mathbf{y} はパスグラフ上の情報拡散ゲームにおける純粋戦略ナッシュ均衡である.

証明 偶数番目のプレイヤ $i (= 2k)$ に対して, $\ell_{2k}(\mathbf{y}) = \ell_{2k-1}(\mathbf{y}) + 1$ が成り立つので n 番目のプレイヤ以外では

$$\begin{aligned} U_{2k}(\mathbf{y}) &= \left\lfloor \frac{\ell_{2k+1}(\mathbf{y}) - \ell_{2k}(\mathbf{y}) + 1}{2} \right\rfloor \\ &= \left\lfloor \frac{\{(2k+1)a + \min\{2k+1, b\}\} - \{(2k-1)a + \min\{2k, b+1\}\} + 1}{2} \right\rfloor \\ &\geq \left\lfloor \frac{2a}{2} \right\rfloor = a. \end{aligned}$$

が得られる. また, この関係式より, 利得 $U_{2k}(\mathbf{y})$ は $U_{2k+1}(\mathbf{y})$ と等しいことが分かる. さらに, $U_1(\mathbf{y}) = \ell_1(\mathbf{y}) = a + \min\{1, b\} \geq a$ であり, $U_n(\mathbf{y}) = |V| - \ell_n(\mathbf{y}) + 1 = |V| - \{(n-1)a + b + 1\} + 1 = a$ である. よって, どのプレイヤの利得も a 以上である.

さて, プレイヤ j が戦略を y_j から v_t へ変更したときに利得が a よりも大きくなるかどうかを調べる. もし $t < \ell_1(\mathbf{y})$ あるいは $t > \ell_n(\mathbf{y})$ のときは, 明らかに $U_j(v_t, \mathbf{y}_{-j}) \leq a$ である. そうでないときは, k' が存在して, $\ell_{2k'}(\mathbf{y}) < t < \ell_{2k'+1}(\mathbf{y})$ を満たす. $j \neq 2k', 2k'+1$ のときは,

$$\begin{aligned} &U_j(v_t, \mathbf{y}_{-j}) \\ &= \left\lfloor \frac{\{(2k'+1)a + \min\{2k'+1, b\}\} - t + 1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{t - \{(2k'-1)a + \min\{2k', b+1\}\} + 1}{2} \right\rfloor - 1 \\ &\leq \left\lfloor \frac{2a+1}{2} \right\rfloor = a. \end{aligned}$$

を得る. $\ell_j(\mathbf{y}) < t < \ell_{j+1}(\mathbf{y})$ あるいは $\ell_{j-1}(\mathbf{y}) < t < \ell_j(\mathbf{y})$ のときは, 明らかに $U_j(v_t, \mathbf{y}_{-j}) \leq U_j(\mathbf{y})$ となる. 以上より, プレイヤ j は \mathbf{y} から戦略を変更することで利得を増加させることができず, \mathbf{y} が純粋戦略ナッシュ均衡であることがわかる. \square

プレイヤ数が奇数の場合も同様に示すことができる.

補題 4 プレイヤの人数 n が 5 以上の奇数であり、 $|V| = a(n + 1) + b$ ($b < n + 1$) と表せるとする。このとき、(2) で与えられる y に対して、 y' を

$$y'_i = \begin{cases} y_i & (i \leq n - 2) \\ v_{an+b} & (i = n - 1) \\ v_{an+b+1} & (i = n). \end{cases} \quad (3)$$

で与える。この y' はパスグラフ上の情報拡散ゲームにおける純粋戦略ナッシュ均衡である。

以上の補題 2, 3, 4 から以下の結果を得る。

定理 5 パスグラフ上の情報拡散ゲームではプレイヤ数が 3 でない場合には必ず純粋戦略ナッシュ均衡が存在する。

式 (2) と式 (3) で与えられる戦略プロファイルは、プレイヤ 1 からプレイヤ b までが利得 $a + 1$ を得て、それ以外のプレイヤが利得 a を得るという単純なルールから作られている。(ただし、 n が奇数のときのプレイヤ $n - 2$ のみ例外である。) よって、利得 $a + 1$ を得る b 人のプレイヤの選択方法を変更すれば異なる純粋戦略ナッシュ均衡を得ることができる。例えば、 n が偶数であり、 $|V| = an + b$ と表したときに $n/2 < b < n$ が成り立てば、以下の戦略プロファイル \hat{y}

$$\hat{y}_i = \begin{cases} v_{ia + \frac{i+1}{2} + \min\{\frac{i-1}{2}, b - \frac{n}{2} - 1\}} & (i: \text{奇数}) \\ v_{(i-1)a + \frac{i}{2} + \min\{\frac{i}{2}, b - \frac{n}{2}\}} & (i: \text{偶数}) \end{cases} \quad (4)$$

も純粋戦略ナッシュ均衡になる。

ノード数が 12 のパスグラフ上の 6 プレイヤの情報拡散ゲームのすべての純粋戦略ナッシュ均衡を図 4 に示す。この例のように、プレイヤ数が 5 以上になると、Hotelling の出店問題のように複数の純粋戦略ナッシュ均衡が存在する。

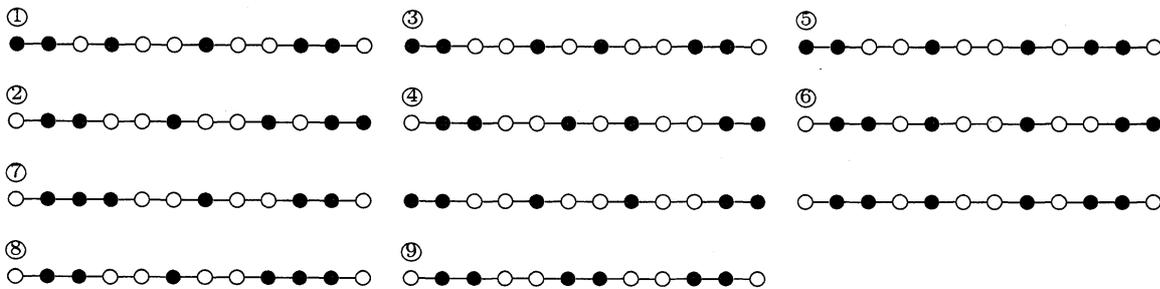


図 4 ノード数が 12 のパスグラフ上の 6 プレイヤの情報拡散ゲームのすべての純粋戦略ナッシュ均衡。黒いノードの集合が戦略プロファイルを表す。(①, ②), (③, ④), (⑤, ⑥), (⑦, ⑧) のそれぞれの組は左右対称の関係にある。戦略プロファイル ⑨は式 (2) から得られる。

最後に、離散ボロノイゲームの純粋戦略ナッシュ均衡との関係について考察する。式 (2) (3) (4) で与えられる戦略プロファイルは離散ボロノイゲームでは純粋戦略ナッシュ均衡とはならない場合もある。例えば、7 ノードのパスグラフ上の 4 プレイヤの場合では式 (2) から得られる戦略プロファイルは $y = (v_2, v_3, v_6, v_7)$ となるが、これは離散ボロノイゲームでは純粋戦略ナッシュ

均衡とはならない。なぜならば、 $\tilde{U}_4(x) = 1$ であるが、プレイヤー 4 が v_5 を選択したときの利得 $\tilde{U}_4(v_5, x_{-4}) = 1.5$ の方が大きいからである。一方、 n が偶数で $|V| \bmod n = 0$ の場合には式 (2) の戦略プロファイル (式 (4) の戦略プロファイルと同じ) は必ず離散ボロノイゲームの純粋戦略ナッシュ均衡になっている。また、 $|V| \bmod n = n - 1$ のとき、式 (4) の戦略プロファイルも必ず離散ボロノイゲームの純粋戦略ナッシュ均衡になっている。

5 おわりに

本稿では、情報拡散ゲームの純粋戦略ナッシュ均衡の存在性について議論した。まず、直径が 2 のグラフであっても純粋戦略ナッシュ均衡が存在しないケースがあることを示した。これは、Alon ら [2] の結果の反例になっている。

また、パスグラフに限定すると、プレイヤー数が 3 のときには純粋戦略ナッシュ均衡が存在しないが、プレイヤー数が 3 以外の場合にはかならず純粋戦略ナッシュ均衡が存在し、Hotelling の出店問題と類似した均衡が得られることを示した。さらに、純粋戦略ナッシュ均衡が複数存在する場合の考察を与えた。プレイヤーが 5 以上のとき、パスグラフ上の情報拡散ゲームのすべての純粋戦略ナッシュ均衡を特徴付けることは今後の課題である。

パスグラフ上では、離散ボロノイゲームの純粋戦略ナッシュ均衡との比較も行った。情報拡散ゲームと離散ボロノイゲームは類似しているが、純粋戦略ナッシュ均衡が異なることもある。 $|V| \bmod n = 0$ のときには、式 (2) で与えられる戦略プロファイル、 $|V| \bmod n = n - 1$ の場合には式 (4) で与えられる戦略プロファイルは、どちらのゲームにおいても純粋戦略ナッシュ均衡になっている。しかし、図 3 から 4 人のプレイヤーの時には、 $|V| \bmod 4 = 1$ あるいは $|V| \bmod 4 = 2$ の場合には、どちらのゲームにおいても純粋戦略ナッシュ均衡になっている戦略プロファイルがないことがわかる。ノード数とプレイヤー数の組に関係して、情報拡散ゲームと離散ボロノイゲームの両方で純粋戦略ナッシュ均衡となる戦略プロファイルが存在するか否かの特徴付けも今後の課題である。

パスグラフ以外では、サイクルグラフ上での離散ボロノイゲームは常に純粋戦略ナッシュ均衡が存在することが分かっている。同様に、サイクルグラフ上で各プレイヤーがほぼ等間隔にノードを選択すれば、情報拡散ゲームにおいても純粋戦略ナッシュ均衡となる。その他特殊なグラフ上での純粋戦略ナッシュ均衡の存在性も興味深い課題である。

謝辞

筑波大学八森正泰氏の有益なコメントに感謝する。本研究は科研費 (22510135) および栢森情報科学振興財団の助成を受けたものである。

参考文献

- [1] R. Abooliana, Y. Suna, and G. J. Koehler, A location-allocation problem for a web services provider in a competitive market, *European Journal of Operational Research*, 194, 64-77 (2009).
- [2] N. Alon, M. Feldman, A. D. Procaccia, and M. Tennenholtz, A note on competitive diffusion through social networks, *Information Processing Letters*, 110, 221-225 (2010).
- [3] A. Bauer, W. Domschke, and E. Pesch, Competitive location on a network, *European Journal of Operational Research*, 66, 372-391 (1993).
- [4] S. Bharathi, D. Kempe, and M. Salek, Competitive influence maximization in social networks, *Lecture Notes in Computer Science*, 4858, 306-311 (2007).
- [5] C. Dürr, and N. K. Tang, Nash equilibria in Voronoi games on graphs, *Proceedings of the 15th European Symposium on Algorithms*, 17-28 (2007).
- [6] G. Dobson, and U. S. Karmarkar, Competitive location on a network *Operations Research*, 35, 565-574 (1987).
- [7] H. Hotelling, Stability in competition, *The Economic Journal*, 39, 41-57 (1929).
- [8] K. Okunuki, and A. Okabe, Solving the Huff-based competitive location model on a network with link-based demand, *Annals of Operations Research*, 111, 239-252 (2002).
- [9] R. Takehara, M. Hachimori, and M. Shigeno, A comment on pure-strategy Nash equilibria in competitive diffusion games, *Information Processing Letters*, to appear.