数理解析研究所講究録
第 1787 巻 2012 年 243-253

オイラーの変分法　3

九州大学大学院数理学府　　尾崎　文秋 (FUMIAKI Ozaki)

概要

以前「オイラーの変分法 1, 2」[14][15] においてオイラーの変分法の方法を解説した．そのときは，どのようにしてオイラーが変分法という学問分野を確立したのかが分からないままであった．ここでは 1696 年にヨハン・ベルヌーイが提示した最速降下線問題とオイラー全集 E65[6] の編纂者であるカラテオドリの解説を基にして，オイラー以前の問題がオイラーの変分法にどのように影響があったのかを考察する．

0　変分法の変革

オイラー全集のシリーズ 1，第 24 巻の巻頭には編纂者であるコンスタンティン・カラテオドリはオイラーの変分法についての解説 [1] がある．その中で彼はレオンハルト・オイラー (1707,4,15–1783,9,18) の変分法を 3 期に分けている．

1. 最速降下線問題や等周問題などの先代の問題を継承して
2. 変分法の一般化 (オイラー方程式の産出) E65
3. ラグランジュから刺激をうけて E296

ここでは，オイラーの変分法の第 1 期に注目する．

1　変分法初期

初期のオイラー

オイラーの変分法というと最速降下線問題が想起される．オイラーは 1725 年，彼が 18 歳のときに，初めて論文 [3] を執筆しており，この論文の中でサイクロイドが取り扱われている．

“Constructio linearum isochronarum in medio quocunque resistente” (E1)
任意の抵抗媒体中での等時曲線の作図．

この論文は力学に関する論文で，冒頭

> “Notum est inter Geometras cycloidem ordinariam esse in medio non resistente isochronam sue tautochronam, ...”
> (抵抗の無い媒体の中で，通常のサイクロイドが等時曲線になることは幾何学者の間では知られている．)

とあり，地球上で，つまり一様重力場で，別の抵抗 (空気，水など) があるときの等時曲線について書かれている．そこにはニュートンのプリンキピアの問題が引用されており，ニュートンはその問題で抵抗の無いときの等時曲線を求めているのだが，オイラーはその問題を改良したわけである．またニコラウス・フスの伝記 [8] によると，この論文はダニエル・ベルヌーイとの論争の中から生まれた，とある．

このようにオイラーはサイクロイドを取り扱っており，初期の段階から彼の周辺には変分法に関する問題が存在していたことがわかる．そして変分法の基になる問題であるとオイラーが著作 [6, p.2] の中で指摘しているのは，最速降下線問題と等周問題である．

> この (変分法の) 方法はすでに前世紀に無限解析が創造されてからすぐ後に偉大なるベルヌーイ兄弟によって創始された．そしてそれ以降極めて大きく進歩しはじめた．まず始めにこの種のものから研究された問題は力学に関係があり，ブラキストクローネ曲線あるいは最速降下線と名付けられたある曲線に沿って降下する物体が最も速く落下するような曲線が探求された．

ブラキストクローネ (Brachistochrone) とはギリシャ語の単語で,「最も短い時間」という意味であり (brachistos が最も短い，chronos が時間)，ヨハン・ベルヌーイ (1667,7,27–1748,1,1) は最速降下線のことをこのギリシャ語の単語を使って表していた．

最速降下線問題の起源だが，ガリレオが「新科学対話」において命題 36，定理 22 の注 [13, p.138] で考察している．ガリレオはそこで最速降下線は半円になると推論しているが，これは誤りである．その時点では最速降下線問題はマイナーな問題であった．しかしその後 1696 年にヨハン・ベルヌーイが最速降下線問題を当時ライプチヒで出版されていた月刊の学術報告集 Acta Eruditorum に問題を提起したことによって大々的に扱われることになった．

等周問題に関しては，起源は古代ローマまで遡る．ローマの詩人 Virgil(70.B.C,8,15 – 19.B.C,9,21) の詩集 Aeneid(Book I) に Dido's Problem という話がある．フェニキア (現在のシリアの一部) の王女であるディドーが紀元前 814 年に北アフリカ沿岸 (現在のチュニジア) に渡った際に，その土地の支配者から一頭の雄牛の皮で囲まれる土地を譲り受けることになった．そこでディドーは雄牛の皮を細く長く切って紐のようにして土地を囲み，そのときにその紐で海岸線から半円を描いて最大の領地を得た．という話がある．つまりこれから長さが決まっている線を用いて最大の領域を表すのはどのような図形か，という問題に帰着されるのであるが，これが等周問題の起源と言われている．オイラーの周辺だとヨハンの兄であるヤコブ・ベルヌーイ (1654,12,27–1705,8,16) が 1700 年と 1701 年に "Solutio propria problematis isoperimetrici" (等周問題の適用される解答) と "Analysis magni problematis isoperimetrici" (広義の等周問題の分析)，ヨハン・ベルヌーイが 1718 年に "Remarques sur ce qu'on a donnè jusqu'ici de solutions des Problêmes sur les Isoperimetres" (等周問題の解についてこれまでに定められたことに対する注意) を別々に研究して，論文を発表しており，オイラーも後の 1738 年に等周問題についての論文 "Problematis isoperimetrici in latissimo sensu accepti solutio generalis" [5] (最広義で理解された等周問題の解) を発表している．

最速降下線問題にしても，等周問題にしても，今見たようにベルヌーイ兄弟とオイラーに時代の開きがある．変分法を扱った数学者はベルヌーイ兄弟以後ブルック・テーラー (1685,8,18–1731,12,29) やヤコブ・ヘルマン (1678,7,16–1733,7,11) などがいたが，テーラーやヘルマンもオイラーのように変分法を一般化して，本質的に改善することはできなかった．そしてその他に変分法に取り組む数学者はいなかったようである．

最速降下線問題

1696 年 6 月の Acta Eruditorum にヨハンは最速降下線についての問題を提起している [10, p.269].
題名は "Problema novum ad cujus solutionem Mathmatici invitantur"
(新しい問題：この問題の解決に向けて数学者たちが招待されている) とあり，冒頭に問題が提起されている．

垂直平面に２点 A, B が与えられたとき，(Figure1.0) 動く物体 M についてその重さで降下して，点 A から動き出して，もうひとつの点 B に最も短い時間で到着するような道 AMB を指定すること．

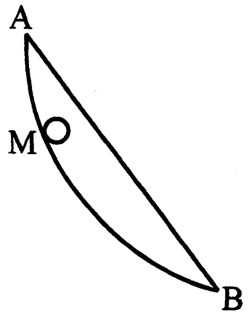

Figure1.0

数学者に向けられた問題だが曲線を求めることが要請されていない．そして一見力学の問題のようにも見える．この問題自体が翌年に改訂されているので当時の数学者の中に戸惑った人がいたのではないだろうか．

このときベルヌーイはこの問題の締め切りを六ヶ月としていたが，後に締め切りが延長されている．その間の 1696 年 6 月 16 日のライプニッツからヨハンへの書簡によると，そこにはこの問題の締め切りを 1697 年のイースター (1697 年 4 月 7 日) に延ばしてはどうだろうか？という提案と，ライプニッツの解答が記されていた．

これを受けてヨハンはこれまでの経緯と締め切りを延ばすアナウンスを，1697 年 1 月 1 日の "Acutissimis qui toto Obst florent Methematicis" [11, p.166] に載せている．これによると締め切りまでにライプニッツから解答に近いものは送られてきたものの正しい解答は送られて来ていない，そして締め切りを翌年のイースターまで延ばすことが書かれている．そして [11, p.166] には問題が再度形を変えて提起されている．

最速に降下する線について力学-幾何学の問題
水平線から異なる距離にあり，そして同じ垂直線上にはない２点を結ぶ曲線を決定すること．その曲線に沿って物体自身の重さで下って，そして高い点から動くことをはじめて，最速で低い点へ降下する．

このように同じ問題だが，２度ヨハン・ベルヌーイは最速降下線問題を世に出していたのである．

解答に目を向けると，1697 年 2 月 24 日にニュートンの解答が匿名で英国学士院の "Philosophical Transactions" に掲載される．このことに関しては，ヨハンが解答を見てニュートンのものと気付いている．彼が当時のフランス人歴史学者 Henri Basnage de Beauval(1657,8,7–1710,5,29) へ 1697 年の 3 月 30 日に出した手紙の中には，"Philosophical Transactions" に掲載された解答がニュートンのものであることが予想されていてその際，爪からライオンを知るように仕事を見れば誰のものかわかるのである．と語っている．

その後 1697 年 3 月出版の Acta Eruditorum に最速降下線問題の解答が掲載されており，これを見るとヨハンも含めて 6 人の数学者から投稿があったことがわかる．ライプニッツ，ヤコブ・ベルヌーイ，チルンハウス，ロピタル，ニュートン，そしてヨハンの 6 人である．締め切りは 4 月だったので，それより前に解答が公表されてしまったことになる．この Acta Eruditorum の内容だが，はじめにライプニッツによる最速降下線問題の解説があり，そしてヨハン [12]，ヨハンの兄ヤコブ・ベルヌーイ [9]，チルンハウス，ロピタルの各人の解答と，ライプニッツの解答についてのノート，そしてニュートンが英国学士院に匿名で提出した解答のコピーが彼の名前で収録されている．これらの解答がオイラーの変分法とどのような関係があったのかを知るためにベルヌーイ兄弟の解答を紹介する．

最速降下線問題に対するヨハン・ベルヌーイの解答

ヨハン・ベルヌーイが最速降下線問題を解くために使用したのは，フェルマーの最小原理とスネルの法則であった．フェルマーの最小原理とは，フランス人の数学者であるピエール・ド・フェルマー (1601,8,17–1665,1,12) が発見した光の経路が最短になるという原理である．例えば，空間に点 A から離れた点 B までの最短経路を作図するとき，2 点が大気中にあるならば AB 間の直線が最短経路になるが，点 A が大気中，点 B 点が水中にあるならば，最短経路は水中にいる時間が最短になるような経路になり，最短経路は直線ではなく折れ曲がった線になる．(Figure1.1) この最短経路を知るには点 A から点 B に光を当てれば，このときの光の経路が最短経路になる．これがフェルマーの最小原理である．

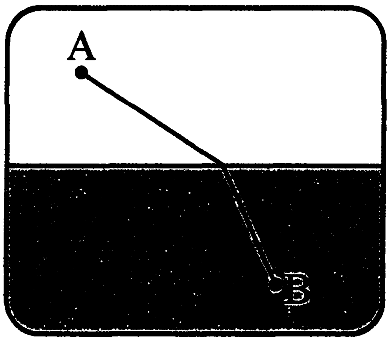

Figure1.1

一方，スネルの法則とはオランダの天文学者，数学者であったヴィレブロルト・スネル (1580–1626,10,30) が発見した光の入射角と屈折角についての定理である．彼がこの法則を発見したのは 1621 年だが，この法則がよく知られるようになったのは，彼の死後 70 年経ったときにホイヘンスによって紹介されてからである．

スネルの法則とは，例えば，光線が Figure1.3 のように点 A から点 B に降りているとき，途中からある媒体中入っているとする．このとき入射角 θ_1 と屈折角 θ_2 は入射光と垂線，そして屈折光と垂線とが作る 2 つの三角形の高さの比が常に一定になるということである．

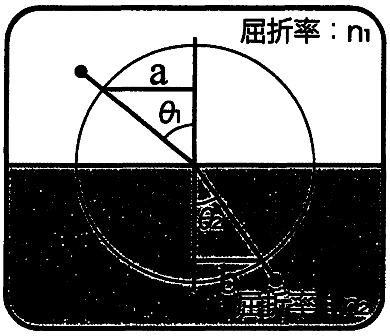

Figure1.2

つまり

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}$$

が成り立つ．これがスネルの法則である．

ベルヌーイはこの光についての法則を屈折率の代わりに速度を使用することによって力学に使用している．力学に使用しても成り立つのか？という疑問があるが，その

辺りの言及は無く．この法則を適用したら最速降下線問題が解けたのだからこの法則は力学にも応用できと言っている．

どのようにこの最小原理を曲線に適用させたかであるが，曲線を無限小等分してあたかも曲線を無限小量の直線が連なったように捉えてそこに上記の定理と法則を適用させている．曲線を無限小線分の多角形として考えるのは，ニコラウス・クザーヌス (1401 – 1464, 8, 11) のアイディアである．つまり Figure1.3 のように曲線 AB があったときに，縦軸を無限小に分割して，

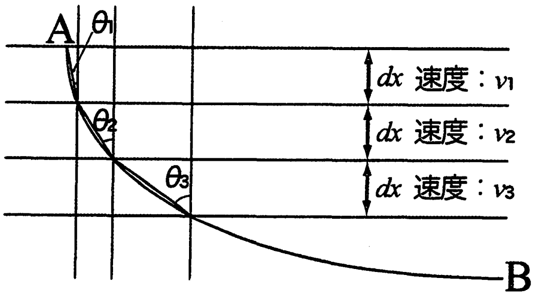

Figure1.3

そして，速度と角度をとり，曲線を直線が連なったものとみて，スネルの法則用いている．すると，

$$\frac{\sin\theta_1}{v_1} = \frac{\sin\theta_2}{v_2} = \frac{\sin\theta_3}{v_3} = \cdots,$$

となる．ここでこの無限小に分割された区間では速度が一定と考えることができる．また θ_2 の錯角と θ_1 の対頂角が等しくなるので，sin と速度の比が一定と考えることができる．

$$\frac{\sin\theta_1}{v_1} = \frac{\sin\theta_2}{v_2} = \frac{\sin\theta_3}{v_3} = C. \quad (C\text{ は定数})$$

この関係式をヨハンは使用している．

では，ヨハン・ベルヌーイが実際行った計算を見てみる．

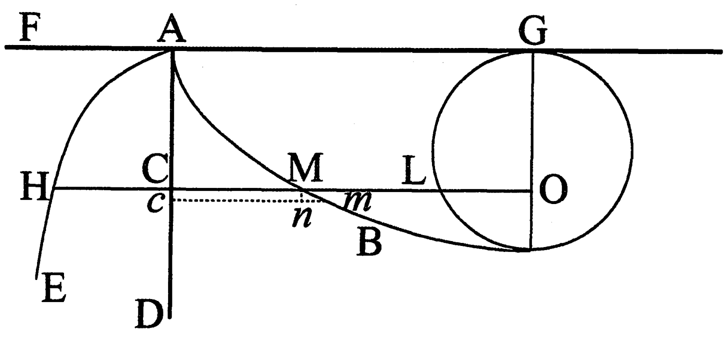

Figure1.4

Figure1.4 のように軸 FAG の下を円が点 A から転がり始めてサイクロイドが形成されるものとして，右側にある曲線 AHE は点 A から物体が投げ出されたの軌跡である．なぜか最速降下線と投射体の軌跡が同じ平面上に描かれている．これらは独立に描かれているわけではなくて，サイクロイドの形が曲線 AHE に依存するように描かれている．

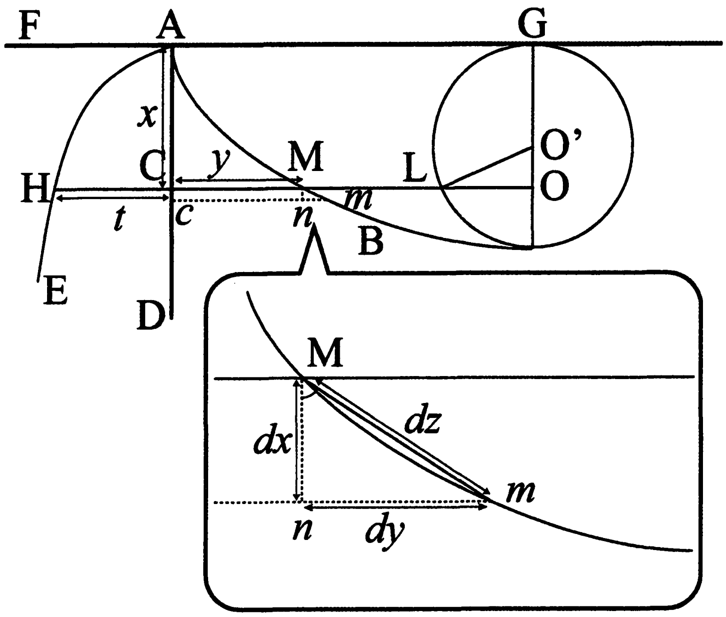

Figure1.5

そして Figure1.5 のようにそれぞれの線分の量を設定して，そしてフェルマーの最小原理とスネルの法則を使用するわけですが，ここで無限小三角形 nMm に対して Cc=dx として，この c から水平線を引いて曲線 AMB との接点を m として，cm 上に n を M の真下になるようにとり，弧長 Mm=dz と近似する．ここで $\sin mMn$，つまり屈折角の正弦は $dy/dz = mn/Mm$ であり，これはこの点における光の速度に比例しなければならない．このときの速度は曲線 AHE の CH=t に対する値になる．そして正弦と速度の比は一定になるので定数 a を用いると，

$$\frac{dy}{dz} = \frac{t}{a},$$

となる．そして $dz^2 + dx^2 = dy^2$ だから

$$\frac{dy}{dx} = \frac{t}{a^2 - t^2}, \tag{1}$$

となる．この式 (1) が x と t を用いてヨハン・ベルヌーイが作り上げた最速線の基本的な微分方程式になる．以下この式を使用して最速降下線を求めている．ここで式 (1) をしようするために x と t の関係式が必要になるのだが，ここでヨハンが使用したのが曲線 AHE である．この曲線はガリレオの仮説から描かれた曲線で，それは投射体はパラボラ (放物線) に沿って運動するという仮説である．この仮説に従うと曲線 AHE は a を定数として，$t^2 = axt = \sqrt{ax}$ となる．この関係式を式 (1) に代入すると

$$dy = dx\sqrt{\frac{x}{a-x}}, \tag{2}$$

となる．これはサイクロイドを表す微分方程式である，よって最速降下線はサイクロイドになると説明している．ヨハン・ベルヌーイは微分方程式 (2) がサイクロイドであることを以下のように説明している．

式 (2) を積分するために右辺の分母分子に $\sqrt{x}$ を掛けて，差の形にする．

$$dy = dx\sqrt{\frac{x}{a-x}} = \frac{xdx}{\sqrt{ax-x^2}} = \frac{1}{2}\frac{adx}{\sqrt{ax-x^2}}(\text{式 }1) - \frac{1}{2}\frac{adx-2xdx}{\sqrt{ax-x^2}}(\text{式 }2).$$

ここで説明のために (式 1) と (式 2) とする．そして Figure1.5 において，円の中心を O' と置く．そして円の半径を $LO' = a/2$，$OO' = x - a/2$ と置く．ここで三平

方の定理から $\mathrm{LO} = \sqrt{ax - x^2}$. これは式 (2) を積分したものとなるので，このことから式 (2) は LO を微分したものと考えることが出来る．

次に中心が O′ である円の方程式は $(x - a/2)^2 + y^2 = (a/2)^2$ だから，全微分して $2xdx - adx + 2ydy = 0$. これを線素を求める式 $\sqrt{1 + dy^2/dx^2}dx$ に代入すると，$adx/2\sqrt{ax - x^2}$. これは式 (1) でもあり，弧 GL の微分量となる．よってサイクロイドを表す微分方程式を積分すると，$y = \mathrm{CM} =$ 弧 GL − LO となることがわかった．

ここで，∠ GO′L = θ，∠ KO′L = t そして $b = a/2$(a は円の直径) と置くと，

$$\mathrm{MO} = \mathrm{CO} - \mathrm{CM} = \mathrm{CO} - \text{弧 GL} + \mathrm{LO},$$

であり，また

$$\mathrm{CO} - \text{弧 GL} = \text{弧 LK},$$

である，また弧 GLK は半円であることから，

$$\mathrm{CM} + \mathrm{ML} + \mathrm{LO} = \mathrm{CO},$$

は，

$$y + \text{弧 LK} + \mathrm{LO} = b\pi,$$

となる．ここで 弧 LK $= bt$, $\sin t = \mathrm{LO}/\mathrm{LO'}$ だから $\mathrm{LO} = b\sin t$
よって

$$y + bt + b\sin t = b\pi,$$

$$y = b(\pi - b) - b\sin t.$$

ここで $\pi - b = \theta$ であり，$\sin t = \sin\theta$ だから，

$$y = b(\theta - \sin\theta)$$

となる．よって曲線 KMA はサイクロイドになる．

このようにヨハン・ベルヌーイは最速降下線を求めている．光についてのフェルマーの原理とスネルの法則を利用して，最速な曲線を求める式 (1) を生み出して，そこに力学についてのガリレオの仮説を使用するという方法をとったわけで，自然の原理からこのように解答が現れる様からヨハン・ベルヌーイの力を伺い知ることが出来る．しかしこの解答が変分法の始まりになったとは考えにくい．変分法の本質は曲線を変化させることにある．これを行ったのはヨハンの兄ヤコブ・ベルヌーイである．次にヤコブの解答を紹介する．

最速降下線問題に対するヤコブ・ベルヌーイの解答

ヤコブ・ベルヌーイも最速降下線問題を解いているのだが，きっかけは 1696 年 9 月 13 日ライプニッツからの手紙であった．その中でヨハンが提示した最速降下線問題を解くように促されて，その後，ヤコブは 1696 年 10 月 6 日に解答を作り上げている．

ヤコブの方法は [9] によると，

Figure1.6 のように，最速降下線 ACGDB があったときに，その曲線上の点 G をほんの少しずらした ACLDB も最速降下線になるという条件から求めている．

曲線上の任意の点 C から軸を引いて，つまり HF を軸とする．曲線を無限小に分割して CE = EF となるような点 D をとり，そして EI 上の LG が EG の微分量になるように L をとる．オイラーはこの LG のような量を記号 $n\nu$ を使って表している．

ここで，最速降下線 AB の一部分である CD に注目すると，AB が最速降下線だから当然 CGD も最速降下線になり，少しずらした CLD も最速降下線になる．tCG をある物体が弧 CG に沿って降下する時間を意味するものとすると，他も同様に，

$$t\mathrm{CG} + t\mathrm{GD} = t\mathrm{CL} + t\mathrm{LD},$$

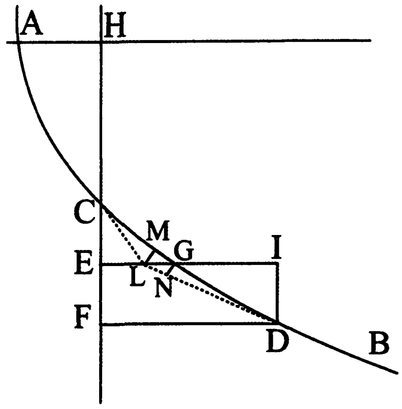

Figure1.6

となる．そして，

$$tCG - tCL = tLD + tGD.$$

これら一様重力場であるとすると，

$$\frac{CE}{CG} = \frac{tCE}{tCG}, \qquad \frac{EF}{GD} = \frac{tEF}{tGD},$$
$$\frac{CE}{CL} = \frac{tCE}{tCL}, \qquad \frac{EF}{LD} = \frac{tEF}{tLD},$$

となる．ここでサイクロイドは曲線上にある点に位置によって物体の速度が異なるという性質を持つ曲線である．よってこれらの式が成り立つとは限らない．ゴールドシュタイン [2] によると，s は降下する距離，v は速度，そして t は時間としてまた $dt = ds/v$ であり，$v^2 = v_1^2 + 2gs$(v_1 は初速度，g は重力) であるから，

$$tCE = \frac{CE}{\sqrt{v_1^2 + 2gs \cdot HC}}, \qquad tCG = \frac{CG}{\sqrt{v_1^2 + 2gs \cdot HC}}.$$

となる．tCL についても同様．と説明している．

ヤコブは続けて，

$$\frac{CE}{CG - CL(= MG)} = \frac{tCE}{tCG - tCL}, \tag{3}$$
$$\frac{EF}{LD - GD(= LN)} = \frac{tEF}{tLD - tGD}, \tag{4}$$

であり，ここで，

$$\frac{MG}{GL} = \frac{EG}{CG}, \quad (\triangle\, MGL \sim \triangle\, CEG) \tag{5}$$
$$\frac{LN}{LG} = \frac{GI}{GD}, \quad (\triangle\, LNG \sim \triangle\, GID) \tag{6}$$

であるから，式 (3) と式 (5)，そして式 (4) と式 (6) から

$$\frac{CE}{GL} = \frac{EG \cdot tCE}{CG(tCG - tCL)}. \tag{7}$$
$$\frac{EF}{GL} = \frac{GI \cdot tEF}{GD(tLD - tGD)}. \tag{8}$$

ここで CE = EF だから，式 (7) と式 (8) は等しくなる．よって，

$$\frac{EG \cdot tCE}{CG(tCG - tCL)} = \frac{GI \cdot tEF}{GD(tLD - tGD)},$$

ここでCGDもCLDも最速降下線なので,

$$\frac{\mathrm{EG}\cdot t\mathrm{CE}}{\mathrm{GI}\cdot t\mathrm{EF}}=\frac{\mathrm{CG}(t\mathrm{CG}-t\mathrm{CL})}{\mathrm{GD}(t\mathrm{LD}-t\mathrm{GD})}=\frac{CG}{GD}.$$

ここで $t\mathrm{CE}=\mathrm{CE}/\sqrt{\mathrm{HC}}$, $t\mathrm{EF}=\mathrm{EF}/\sqrt{\mathrm{HE}}$ だから,

$$\frac{\frac{\mathrm{EG}}{\sqrt{\mathrm{HC}}}}{\frac{\mathrm{GI}}{\sqrt{\mathrm{HE}}}}=\frac{\mathrm{CG}}{\mathrm{GD}}, \tag{9}$$

となる．ヤコブはこの問題において，AHを切除線，HCを向軸線，CG，GIを線の要素と置くことによって，この式(9)はホイヘンスの等時曲線を表す式であるとして，この曲線はサイクロイドであるとしている．

微分方程式に見るヤコブ・ベルヌーイとオイラーの関係

ここで最速降下線問題のヤコブ・ベルヌーイの解答における式(9)を別の解釈で捉えてみる．

式(9)は

$$\frac{\mathrm{EG}}{\sqrt{\mathrm{HC}}\cdot\mathrm{CG}}=\frac{\mathrm{GI}}{\sqrt{\mathrm{HE}}\cdot\mathrm{GD}}, \tag{10}$$

と変形すれば，GからHFに平行な線を引き，錯覚が等しいことを利用すれば，ヨハン・ベルヌーイの使用したスネルの法則から,

$$\frac{\sin\mathrm{ECG}}{\sqrt{\mathrm{HC}}}=\frac{\sin\mathrm{GDI}}{\sqrt{\mathrm{HE}}}=\mathrm{C},$$

となる定数Cが存在することになる．
ここで式(10)において，$\mathrm{AH}=x$, $\mathrm{HC}=y$, $\mathrm{EG}=dx$, $\mathrm{CE}=dy$, そして $\mathrm{CG}=ds=\sqrt{dx^2+dy^2}$ と置くと,

$$\frac{dx}{\sqrt{y(dx^2+dy^2)}}=\mathrm{C}, \tag{11}$$

となる．ここで $\mathrm{C}=1/\sqrt{a}$ と置くと,

$$\frac{dx}{\sqrt{y(dx^2+dy^2)}}=\frac{1}{\sqrt{a}},$$

$$\begin{aligned} a dy^2 &= y(dx^2+dy^2),\\ dx^2 &= \frac{y}{a-y}dy^2,\\ dx &= \sqrt{\frac{y}{a-y}}dy, \end{aligned}$$

となり，式(10)はサイクロイドを表すと説明ができる．

ここでなぜ式(11)において，$\mathrm{C}=1/\sqrt{a}$ と置いたかであるが，ヒントはオイラーにあった．変分法の著作の第2章34節の例題III[6, p,49-50]である．

あらゆる全ての曲線の中で積分式 $\int \frac{dx\sqrt{1+p^2}}{\sqrt{x}}$ $(p = dy/dx)$ の値が極大または極小になる曲線を求めよ．

この問題の解法は $\frac{dx\sqrt{1+p^2}}{\sqrt{x}}$ を全微分して，そしてオイラーの微分方程式に代入すると，

$$\frac{p}{\sqrt{x(1+p^2)}} = \frac{dy}{\sqrt{x(dx^2+dy^2)}} = C', \quad (C'\text{は定数}) \tag{12}$$

となる．オイラーはこの式で $C' = 1/\sqrt{a}$ として，サイクロイドを表す微分方程式を作り上げている．

ここで微分方程式 (11) と微分方程式 (12) に注目すると，ヤコブは曲線を dy 等分，オイラー dx 等分したので，x と y が入れ替わった形になっているが，この二つの式は形は同じである．よってオイラーもこのヤコブの解答を見て，式 (9) を上記のように解釈していたのではないだろうか．またここではスネルの法則を用いて，定数 C を置いたが，Figure1.6 において $\mathrm{HE} = y'$, $\mathrm{GI} = dx'$, $\mathrm{GD} = ds' = \sqrt{dx'^2 + dy^2}$ とおけば，式 (10) は，

$$\frac{dx}{\sqrt{y}\cdot ds} = \frac{dx'}{\sqrt{y'}\cdot ds'},$$

となる．この式は曲線のどの部分でも成り立つので常に値は $dx/ds\sqrt{y}$ になり，そして

$$\frac{dx}{\sqrt{y}\cdot ds} = \mathrm{C}$$

となるような C が存在する．このように定数を置くことも出来る．

オイラーはこのような「曲線のどの部分でも成り立つ」という考え方をオイラーの微分方程式を作り上げる際に使用している．

以上のことからヤコブ・ベルヌーイの最速降下線問題の解答が直接オイラーの変分法に影響を与えたといえる．

ではヨハン・ベルヌーイはオイラーの変分法に何の影響も及ぼさなかったのか？というとそうではない．ヨハンにはオイラーが変分法についての第一論文 [4] を書くきっかけとなった測地線の定理についての手紙をオイラーに 1728 年か 1729 年に送付している．カラテオドリ [1] によると，ヨハン自身はこの定理を 1698 年の論文の中で研究している，とある．これらからもオイラーにどのような影響があったかを考察しなければならない．今後の課題である．

参考文献

[1] Constantin Carathéodory: "Einfurung In Eulers Arbeiten Uber Variationsrechnung, in Leonhard Euler", *Opera omnia*, series I, vols. 24 (= EO I, 24), Basel (1952).

[2] H.Goldstine: "*History of the Calculus of Variations from the Seventeenth Through the Nineteenth Century*", Springer-Verlag, New York (1980).

[3] Leonhard Euler: "Constructio linearum isochronarum in medio quocunque resistente" *Opera omnia*, series II, vols.6 (= EO II, 6), pp.1–3, Basel (1957).

[4] Leonhard Euler: "De linea brevissima in superficie quacunque duo quaelibet puncta iungente" *Opera omnia*, series I, vols.25 (= EO I, 25), pp.1–12, Basel (1952).

[5] Leonhard Euler: "Problematis isoperimetrici in latissimo sensu accepti solutio generalis" *Opera omnia*, series I, vols.25 (= EO I, 25), pp.13–40, Basel (1952).

[6] Leonhard Euler: *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti Opera omnia*, series I, vols. 24 (= EO I, 24), Basel (1952).

[7] Leonhard Euler: "Curvarum maximi minimive proprietate gaudentium inventio nova et facilis" *Opera omnia*, series I, vols.25 (= EO I, 25), pp.145–176, Basel (1952).

[8] Nicolas Fuss: "Lobrede auf Herrn Leonhard Euler, in: Leonhard Euler", *Opera omnia*, series I, vols.1 (= EO I, 1), pp.XLIII–XCV, Basel (1945).

[9] Jakob Bernoulli: "Solutio Problematum Fraternorum peculiari Programmate Cal, Jun, 1697 Groninga, nec non Aflorum Lipfmense Jun,& Dec. 1696, & Febr, 1697 propositorum ; una cum Propositiones recigrosa aliorum", *Acta Eruditorum*, pp. 211–217, Leipzig, (1697).

[10] Johnn Bernoulli: "Problema novum ad cujus solutionem Mathmatici invitantur", *Acta Eruditorum*, pp. 260–269, Leipzig, (1696).

[11] Johnn Bernoulli: "Problemma", *Opera Omnia*, pp.166–169, Bousquet & sociorum, (1742).

[12] Johnn Bernoulli: "Curvatura radii in diaphanis non uniformibus; Solutio problematis a se propositi de invenienda linea brachystochrona, id est, in qua grave a date puncto ad datum punctum brepissimo tenpore decurrit, & de curva Syncbrona seu radiorum unda construnda", *Acta Eruditorum*, pp. 206–211, Leipzig, (1697)

[13] 今野武雄, 日田節次: 「ガリレオ・ガリレイ『新科学対話 (下)』」 岩波書店, 東京, (1937).

[14] 尾崎　文秋: 「オイラーの変分法　1」 京都大学数理解析研究所講究録 1625, pp.67–77, 京都, (2009).

[15] 尾崎　文秋: 「オイラーの変分法　2」 京都大学数理解析研究所講究録 1677, pp.187–196, 京都, (2010).