

ガレルキン・特性曲線有限要素法 – 理論と応用 Galerkin-Characteristics Finite Element Method – Theory and Applications

早稲田大学理工学術院 田端 正久 (Masahisa Tabata)¹
Faculty of Science and Engineering, Waseda University

1 はじめに

構造問題に比べて、流れ問題の顕著な特徴は、物質微分項

$$\frac{D\phi}{Dt} \equiv \frac{\partial\phi}{\partial t} + u \cdot \nabla\phi \equiv \frac{\partial\phi}{\partial t} + \sum_{j=1}^d u_j \frac{\partial\phi}{\partial x_j},$$

が現れることにある。ここに、 u は流れ場を表すベクトル値関数であり、 ϕ は密度、速度、エネルギーなどの未知の物理量である。この項は問題を非対称にし、更に、Navier-Stokes 方程式などに見られるように、 ϕ が流速 u の各成分 u_i のとき非線形項 $u \cdot \nabla u_i$ となり、問題を非線形にする。この項は拡散項 $-\nu\Delta\phi$ と結びついて、科学・技術分野で多くの重要な現象を記述し、種々の興味深い結果を生み出す。拡散係数 ν が小さいとき、すなわち、Navier-Stokes 方程式なら Reynolds 数が高いとき、特にそうである。それらの現象を記述する方程式を解くための数値計算スキームを構築する際に、この項の離散化が決定的であることが良く知られている。実際、在来の Galerkin 法や中心差分近似では、元の現象にない不自然な振動が生じ、意味のある解が得られない。その不安定性を解消するいくつかの方法の中で、特性曲線に基づく方法は物理的観点から自然である。そこでは、流体粒子の軌跡を近似しているからである。Galerkin 特性曲線有限要素法は、対称なスキームを導き、移流が支配的な問題に対しても強靱性を維持している。Galerkin 特性曲線有限要素法の最近の発展を理論と応用から述べる。

2 Galerkin 特性曲線有限要素近似

Ω を \mathbb{R}^d ($d = 2, 3$) の有界領域、その境界は区分的に滑らかであるとする。 T は与えられた正定数とする。流速場 $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ が与えられている。物質微分 $D\phi/Dt$ は、関数 $\phi : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ に対して、

$$\mathcal{L}_0(u)\phi \equiv \frac{D\phi}{Dt} \equiv \frac{\partial\phi}{\partial t} + u \cdot \nabla\phi \tag{1}$$

¹E-mail : tabata@waseda.jp

で定義される. $X: (0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ が常微分方程式

$$\frac{dX}{dt}(t) = u(X(t), t), \quad t \in (0, T) \quad (2)$$

を満たしているなら, 物質微分 (1) は

$$\frac{D\phi}{Dt}(X(t), t) = \frac{d}{dt}\phi(X(t), t)$$

と表現できる. Δt を時間刻みとすると,

$$\frac{D\phi}{Dt}(X(t), t) = \frac{\phi(X(t), t) - \phi(X(t - \Delta t), t - \Delta t)}{\Delta t} + O(\Delta t) \quad (3)$$

となる.

$N_T \equiv \lfloor T/\Delta t \rfloor$, $n = 1, \dots, N_T$ として, $t_n = n\Delta t$ とおく. (2) を $t \in (t_{n-1}, t_n)$ で考える. x を Ω の任意の点とし, 初期条件

$$X(t_n) = x \quad (4)$$

の下で解いた解の t_{n-1} での値 $X(t_{n-1})$ と Euler 法による近似解

$$X_1^n(x) \equiv x - u(x, t_n)\Delta t \quad (5)$$

との差は

$$X(t_{n-1}) - X_1^n(x) = O(\Delta t^2) \quad (6)$$

と評価できる. したがって, (3) から,

$$\frac{D\phi}{Dt}(x, t_n) = \frac{\phi(x, t_n) - \phi(X_1^n(x), t_{n-1})}{\Delta t} + O(\Delta t) \quad (7)$$

となる. ψ を試験関数とし, (\cdot, \cdot) で $L^2(\Omega)$ の内積を表すものとする. $\phi^n \equiv \phi(\cdot, t_n)$ と表記すると, (7) から,

$$\left(\frac{D\phi^n}{Dt}, \psi \right) \approx \left(\frac{\phi^n - \phi^{n-1} \circ X_1^n}{\Delta t}, \psi \right) \quad (8)$$

が得られる. ここに, $a \circ b$ は合成関数 $(a \circ b)(x) = a(b(x))$ を意味している. (8) で関数 ϕ, ψ を有限要素空間から選んだものが, (1) の Galerkin 特性曲線有限要素近似である.

3 移流拡散問題

$\phi: \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ を未知関数とする移流拡散問題:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u \cdot \nabla \phi - \nu \Delta \phi = f, \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T) \quad (9a)$$

$$\phi = 0, \quad x \in \Gamma, \quad t \in (0, T) \quad (9b)$$

$$\phi = \phi^0, \quad x \in \Omega, \quad t = 0 \quad (9c)$$

を考える。ここに,

$$u : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad f : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \phi^0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

は与えられた流速, 外力, 初期関数であり, ν は拡散係数である。流速 u は

$$u \in C^0(W^{1,\infty}(\Omega)), \quad u = 0 \quad (x \in \Gamma), \quad \nabla \cdot u = 0 \quad (x \in \Omega) \quad (10)$$

を満たしているとする。関数空間

$$V = H_0^1(\Omega)$$

を使って, (9a),(9b) は $\phi : (0, T) \rightarrow V$ を未知関数とする弱形式

$$\left(\frac{D\phi}{Dt}(t), \psi \right) + \nu(\nabla\phi(t), \nabla\psi) = (f(t), \psi), \quad \forall \psi \in V, \quad t \in (0, T)$$

に書き直すことができる。

V_h を V を近似する有限要素空間とする。問題 (9) の Galerkin 特性曲線有限要素近似スキームは, $\{\phi_h^n \in V_h; n = 0, \dots, N_T\}$ を

$$\left(\frac{\phi_h^n - \phi_h^{n-1} \circ X_1^n}{\Delta t}, \psi_h \right) + \nu(\nabla\phi_h^n, \nabla\psi_h) = (f^n, \psi_h), \quad \psi_h \in V_h, \quad n = 1, \dots, N_T \quad (11a)$$

$$\phi_h^0 = \Pi_h\phi^0 \quad (11b)$$

で求めることである。ここに, $\Pi_h : C(\bar{\Omega}) \rightarrow V_h$ は補間作用素であり, X_1^n は (5) である。時間刻み Δt が

$$\Delta t < 1/\|u\|_{C^0(W^{1,\infty}(\Omega))}$$

を満たすとき $X_1^n(\Omega) = \Omega$ が成立する [8] ので, (11a) の左辺第 1 項は意味を持つことが分かる。スキーム (11) は次の特長を持っている。

- (11a) は ϕ_h^n の節点値を未知数とする連立一次方程式に帰着するが, その行列は正定値対称であり, 時間に依存しない。熱方程式を標準的な有限要素法で解くときに現れる行列と同一であり, その数値解法は容易である。
- P_k -有限要素を使うとき, $L^\infty(L^2(\Omega)) \cap L^2(H^1(\Omega))$ に対応するノルムで

$$O(\Delta t + h^k) \quad (12)$$

の精度で ϕ_h は ϕ に収束する。

- 収束精度の評価に現れる係数は, ν に依存しない [8]。

一方, 注意を要する点は, 合成関数 $\phi_h^{n-1} \circ X_1^n$ の積分にある。すなわち, ψ_{hi} を節点 P_i での基底関数とすると, (11a) から導かれる連立一次方程式の右辺ベクトルを求めるためには

$$\left(\frac{\phi_h^{n-1} \circ X_1^n}{\Delta t}, \psi_{hi} \right)$$

の計算が必要となるが, 合成関数 $\phi_h^{n-1} \circ X_1^n$ は要素上, 多項式でないばかりでなく, 一般に C^1 級の関数でない。その計算にはなんらかの数値積分が用いられるが, 粗い数値積分を用いると, 理論的結果である (12) が実現されないことが知られている [11]。数値積分を使わない方法としては, 集中質量近似 [7] や差分法 [5] を用いるものがある。

4 時間2次精度近似

4.1 2段近似

(3)に替えて, 2段近似

$$\frac{D\phi}{Dt}(X(t), t) = \frac{3\phi(X(t), t) - 4\phi(X(t - \Delta t), t - \Delta t) + \phi(X(t - 2\Delta t), t - 2\Delta t)}{2\Delta t} + O(\Delta t^2)$$

を使えば, 時間方向2次精度の近似が得られる.

$$X_2^n(x) \equiv x - 2u(x, t_n)\Delta t \quad (13)$$

とにおいて, (7)に対応して

$$\frac{D\phi}{Dt}(x, t_n) = \frac{3\phi(x, t_n) - 4\phi(X_1^n(x), t_{n-1}) + \phi(X_2^n(x), t_{n-2})}{\Delta t} + O(\Delta t^2)$$

となり, (8)に対応して,

$$\left(\frac{D\phi^n}{Dt}, \psi\right) \approx \left(\frac{3\phi^n - 4\phi^{n-1} \circ X_1^n + \phi^{n-2} \circ X_2^n}{\Delta t}, \psi\right) \quad (14)$$

が得られる. 移流拡散方程式を解くスキームで(11a)左辺第1項を(14)右辺に対応する式で置き換えれば, 時間方向2次精度2段スキームが得られる. このスキームは(12)に替り,

$$O(\Delta t^2 + h^k) \quad (15)$$

の収束が得られる [3].

4.2 1段近似

(5)に替り, $X(t_{n-1})$ の計算に2次 Runge-Kutta 法

$$X_2^n(x) \equiv x - u\left(x - u(x, t_n)\frac{\Delta t}{2}, t_{n-1/2}\right)\Delta t \quad (16)$$

あるいは, Heun 法

$$X_2^n(x) \equiv x - \frac{u(x, t_n) + u(x - u(x, t_n)\Delta t, t_{n-1})}{2}\Delta t \quad (17)$$

を使えば, (7)に替り,

$$\frac{D\phi}{Dt}(X(t_{n-1/2}), t_{n-1/2}) = \frac{\phi(x, t_n) - \phi(X_2^n(x), t_{n-1})}{\Delta t} + O(\Delta t^2) \quad (18)$$

が得られる. (18)左辺の評価点は $(x, t_{n-1/2})$ でなく, $(X(t_{n-1/2}), t_{n-1/2})$ になっている. (18)は評価点

$$Y_1^n(x) \equiv \frac{x + X_1^n(x)}{2}$$

でも成立する.

移流拡散方程式のとき, 点 $Y_1^n(x)$ での Crank-Nicholson 型の近似を拡散項と外力項に施すと

$$\frac{\nu}{2}(\Delta\phi^n + \Delta\phi^{n-1} \circ X_1^n), \quad \frac{1}{2}(f^n + f^{n-1} \circ X_1^n)$$

となる. この式から弱形式を導いて時間 2 次精度 1 段スキーム

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\phi_h^n - \phi_h^{n-1} \circ X_2^n}{\Delta t}, \psi_h \right) + \frac{\nu}{2}(\nabla\phi_h^n + \nabla\phi_h^{n-1} \circ X_1^n, \nabla\psi_h) + \frac{\nu\Delta t}{2}(J^n\nabla\phi_h^n, \nabla\psi_h) \\ & = \frac{1}{2}(f^n + f^{n-1} \circ X_1^n, \psi_h) \end{aligned} \quad (19)$$

が得られる. ここに, J^n は行列

$$J_{ij}^n = \frac{\partial u_i^n}{\partial x_j}, \quad i, j = 1, \dots, d$$

である. (19) 左辺第 3 項は, 時間 2 次精度を得るために必要な項である. このスキームは時間 1 次スキームで述べた特長を持ち, 時間刻み 2 次の収束精度 (15) が成立する [8].

5 非圧縮粘性流体問題

流速 $u : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^d$ と圧力 $p : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ を未知関数とし, Navier-Stokes 方程式によって記述される非圧縮粘性流体問題:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u - \nu\Delta u = f, \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T) \quad (20a)$$

$$\nabla \cdot u = 0, \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T) \quad (20b)$$

$$u = 0, \quad x \in \Gamma, t \in (0, T) \quad (20c)$$

$$u = u^0, \quad x \in \Omega, t = 0 \quad (20d)$$

を考える. ここに,

$$f : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad u^0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$$

は与えられた外力, 初期流速であり, ν は拡散係数である. 関数空間

$$V = (H_0^1(\Omega))^d, \quad Q = L_0^2(\Omega)$$

を使って, (20a)-(20c) は $(u, p) : (0, T) \rightarrow V \times Q$ を未知関数とする弱形式

$$(\mathcal{L}_0(u(t))u(t), v) + a_0(u(t), v) + b(v, p(t)) = (f(t), v), \quad \forall v \in V, t \in (0, T) \quad (21a)$$

$$b(u(t), q) = 0, \quad \forall q \in Q, t \in (0, T) \quad (21b)$$

に書き替えられる. ここに, $\mathcal{L}_0(u)$ は (1) で定義した物質微分作用素,

$$a_0(u, v) = 2\nu \int_{\Omega} D(u) : D(v) dx, \quad b(v, q) = - \int_{\Omega} q \nabla \cdot v dx$$

であり, $D(u)$ は変形速度テンソル

$$D_{ij}(u) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

である.

V_h を V を近似する有限要素空間, Q_h を Q を近似する有限要素空間とする. 問題 (20) の時間 1 次精度 Galerkin 特性曲線有限要素近似スキームは, $\{(u_h^n, p_h^n) \in V_h \times Q_h; n = 0, \dots, N_T\}$ を, $n = 1, \dots, N_T$ として,

$$\left(\frac{u_h^n - u_h^{n-1} \circ X_1^n}{\Delta t}, v_h \right) + a_0(u_h^n, v_h) + b(v_h, p_h^n) = (f^n, v_h), \quad \forall v_h \in V_h \quad (22a)$$

$$b(u_h^n, q_h) = 0, \quad \forall q_h \in Q_h \quad (22b)$$

$$u_h^0 = \Pi_h u^0 \quad (22c)$$

で求めることである. ここに, $\Pi_h : C(\bar{\Omega})^d \rightarrow V_h$ は補間作用素であり,

$$X_1^n(x) \equiv x - u_h^{n-1}(x)\Delta t$$

である. (22a), (22b) を解くための連立一次方程式の行列は対称であり, 時間に依存しない. Stokes 方程式を混合型有限要素法で解くときに現れる行列と同一であり, その数値解法には MINRES などの効率的な手法を用いることができる. 下限上限条件を満たす有限要素空間の組 (V_h, Q_h) を使うとき, (u_h, p_h) が $(L^\infty(L^2(\Omega)) \cap L^2(H^1(\Omega)))^d \times L^2(L^2(\Omega))$ に対応するノルムで (12) の精度で (u_h, p_h) は (u, p) に収束する [10]. ここに, k は対応する Stokes 問題の収束精度である.

(14) の近似を用いれば, 時間 2 次精度 Galerkin 特性曲線有限要素近似スキームが得られる. ただし,

$$X_1^n(x) \equiv x - u_h^*(x)\Delta t, \quad X_2^n(x) \equiv x - 2u_h^*(x)\Delta t, \quad u_h^* \equiv 2u_h^{n-1} - u_h^{n-2}$$

とする. 解くべき連立一次方程式は対称行列であり, 上述と同じノルムで時間 2 次精度の収束 (15) が得られる [2].

(16) を使うと, 時間方向 2 次 1 段近似のスキームを導くことができる. このスキームは非線形になり, 反復解法で解かれる [4].

6 二流体問題

$d = 2$ として, 次の二流体問題を考える. 領域 Ω に $m + 1$ 個の非圧縮粘性流体があり, それぞれの流体 k は密度 ρ_k , 粘性 μ_k を持ち, 時刻 t で未知の領域 $\Omega_k(t)$ を占めている. 流体 $k (= 1, \dots, m)$ は流体 0 に囲まれており, その界面 $\Gamma_k(t)$ では表面張力が働いている. その表面張力係数を σ_k とする. $\Gamma_k(t)$ は閉曲線であり, 未知関数

$$\chi_k : [0, 1) \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \chi(1, t) = \chi(0, t) \quad (t \in (0, T))$$

を使って,

$$\Gamma_k(t) = \{\chi_k(s, t); s \in [0, 1]\}$$

と表わされる. $\Omega_k(t)$, $k = 1, \dots, m$, は $\Gamma_k(t)$ の内部であり,

$$\Omega_0(t) = \Omega \setminus \bigcup \{\bar{\Omega}_k(t); k = 1, \dots, m\}$$

である. 未知関数である流速と圧力

$$u : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad p : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$$

と χ_k は次の方程式系

$$\rho_k \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u \right\} - \nabla [2\mu_k D(u)] + \nabla p = \rho_k f, \quad x \in \Omega_k(t), \quad t \in (0, T) \quad (23a)$$

$$\nabla \cdot u = 0, \quad x \in \Omega_k(t), \quad t \in (0, T) \quad (23b)$$

$$[u] = 0, \quad [-pn + 2\mu D(u)n] = \sigma_k \kappa n, \quad x \in \Gamma_k(t), \quad t \in (0, T) \quad (23c)$$

$$\frac{\partial \chi_k}{\partial t} = u(\chi_k, t), \quad s \in [0, 1), \quad t \in (0, T) \quad (23d)$$

$$u = 0, \quad x \in \Gamma, \quad t \in (0, T) \quad (23e)$$

$$u = u^0, \quad x \in \Omega, \quad t = 0 \quad (23f)$$

$$\chi_k = \chi_k^0, \quad s \in [0, 1), \quad t = 0 \quad (23g)$$

を満たす. ここに, (23a),(23b) は $k = 0, \dots, m$ で, (23c), (23d), (23g) は $k = 1, \dots, m$ で成立する.

$$f : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad u^0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \chi_k^0 : [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^2$$

は与えられた関数であり, f は通常, 重力加速度, u^0 は初期流速, χ_k は初期流体界面である. $[\cdot]$ は両側から界面への極限値の差を示し, κ は界面の曲率, n は単位法線ベクトルである. (23d) は界面 Γ_k はその位置での流速 u で移動することを意味している.

密度 ρ , 粘性 μ

$$\rho : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mu : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$$

を $\Omega_k(t)$ から決まる区分的定数関数とする. (23a)-(23d) は弱形式

$$\left(\sqrt{\rho} \frac{D}{Dt} (\sqrt{\rho} u), v \right) + a_0(\mu, u, v) + b(v, p) = (\rho f, v) - d(\chi, v) \quad (24)$$

と (21b) に書くことができる. ここに,

$$a_0(\mu, u, v) = 2 \int_{\Omega} \mu D(u) : D(v) dx, \quad d(\chi, v) = \sum_{k=1}^m \int_{\Gamma_k} \sigma_k \frac{\partial \chi}{\partial \ell} \cdot \frac{\partial v}{\partial \ell} d\ell$$

であり, d は表面張力に起因する双一次形式であり, ℓ は線素である.

問題 (23) の Galerkin 特性有限要素近似を考える. Δt を時間刻みとする. $\chi (\equiv (\chi_k))$ の近似 χ_h を探す空間 X_h として, 多角形をパラメータ $s \in [0, 1)$ でパラメータ化した空間を

選ぶ。ただし、その次元 N_x^n は時間ステップ n に依存する。流速と圧力の近似空間 V_h, Q_h は (22) のように、例えば、 $P2/P1$ 要素を選ぶ。密度、粘性の近似 ρ_h, μ_h の空間として、 $P0$ 要素空間 Ψ_h を選ぶ。

関数空間 $X_h \times \Phi_h \times \Phi_h \times V_h \times Q_h$ の中で、 $(n-1)$ 時間ステップから n ステップ、

$$(\chi_h^{n-1}, \rho_h^{n-1}, \mu_h^{n-1}, u_h^{n-1}, p_h^{n-1}) \rightarrow (\chi_h^n, \rho_h^n, \mu_h^n, u_h^n, p_h^n)$$

へ次のように進める。(23d) に、 $n=1$ のときは Euler 近似、それ以外は Adams-Bashforth 近似を用いて、

$$\frac{\tilde{\chi}_h^n - \chi_h^{n-1}}{\Delta t} = \begin{cases} u_h^{n-1}(\chi_h^{n-1}), & \forall s_i^{n-1}, n=1 \\ \frac{3}{2}u_h^{n-1}(\chi_h^{n-1}) - \frac{1}{2}u_h^{n-2}(\chi_h^{n-1} - \Delta t u_h^{n-1}(\chi_h^{n-1})), & \forall s_i^{n-1}, n \geq 2, \end{cases}$$

により、 $\tilde{\chi}_h^n$ を求める。

$$\chi_h^n = \mathcal{X}_h(\tilde{\chi}_h^n), \quad \rho_h^n = \mathcal{R}_h(\chi_h^n), \quad \mu_h^n = \mathcal{M}_h(\chi_h^n)$$

により、 $\chi_h^n, \rho_h^n, \mu_h^n$ を求める。ここで、 \mathcal{X}_h は、多角形の頂点の過疎過密の修正、面積修正をする作用素であり、 $\mathcal{R}_h, \mathcal{M}_h$ は χ_h^n から、 $\rho_h^n, \mu_h^n \in \Psi_h$ を決める作用素である。(24) の右辺の第 2 項を χ_h^n から求め、左辺第 1 項の物質微分に Galerkin 特性曲線近似を適用し、(22b) とからなる (u_h^n, p_h^n) に関する Stokes 型の問題を解く。

このスキームは [12] で開発されたスキームを Galerkin 特性曲線近似に拡張したものであり、エネルギーの意味で安定性を評価できるスキームである。

数値計算結果を示そう。領域 Ω は図 1 に示されている。 $m=1$ であり、図 2 に示され

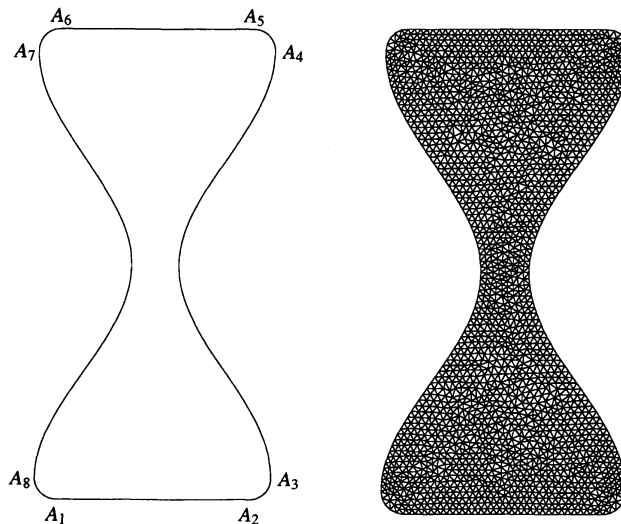


図 1: 領域 Ω と 領域分割.

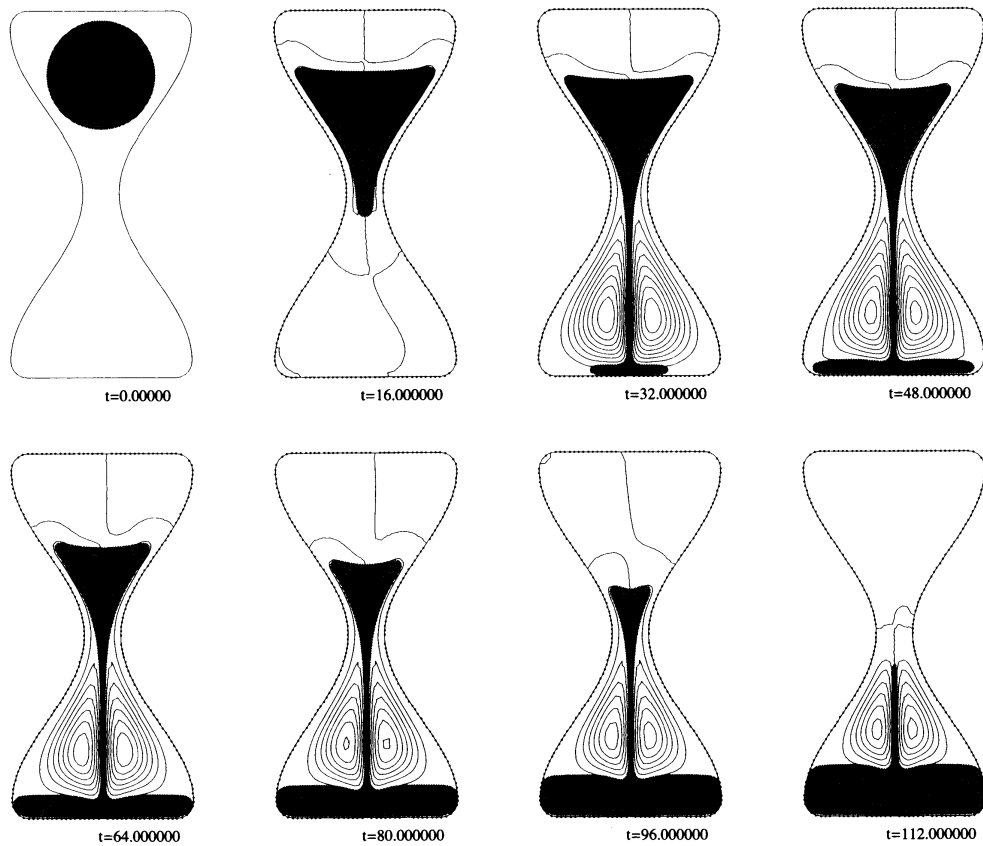


図 2: 界面と流線, $t = 0, 16, \dots, 112$.

ている初期領域 Ω_0^0 と Ω_1^0 を定める. 初期速度と重力加速度は,

$$u^0 = (0, 0)^T, \quad f = (0, -2)^T.$$

である. 領域 Ω を三角形分割し図 1 のメッシュを得る. 全要素数 N_e と全自由度数 N (流速自由度と圧力自由度の和) は

$$N_e = 3,974, \quad N = 18,476$$

である.

$$(\rho_0, \mu_0) = (1, 1), \quad (\rho_1, \mu_1) = (100, 2), \quad \sigma_1 = 0.1$$

とする. 最終時刻 T , 時間増分 Δt , 全時間ステップ数 N_T は

$$T = 150, \quad \Delta t = \frac{1}{8}, \quad N_T = 1,200$$

である. 図 2 は $t = 0$ から $t = 112$ まで時間増分 16 で流体の動きを描写している.

Galerkin 特性曲線有限要素法を使うことにより計算時間は特性曲線法を使わないとき [13] の約 40% になった.

7 おわりに

Galerkin 特性曲線有限要素法の最近の結果を述べた。有限要素法と特性曲線法の結びつきに関しては [6] を参照されたい。質量保存性を持つ Galerkin 特性曲線近似 [9] は、紙面の都合で触れることができなかった。二流体問題に関しては収束性も込めて、多くの未解決問題が残っている。安定性に関しても、筆者の知るところ、Bänsch[1] の結果のみである。Galerkin 特性曲線有限要素法は流れ問題の強力な手法として今後も発展していくであろう。

参考文献

- [1] E. Bänsch, Finite element discretization of the Navier-Stokes equations with a free capillary surface, *Numerische Mathematik*. **88**, 203–235, (2001).
- [2] K. Boukir, Y. Maday, B. Métivet, and E. Razafindrakoto. A high-order characteristics/finite element method for the incompressible Navier-Stokes equations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 25, pp. 1421–1454, 1997.
- [3] R. E. Ewing and T. F. Russell. Multistep Galerkin methods along characteristics for convection-diffusion problems. In R. Vichnevetsky and R. S. Stepleman, editors, *Advances in Computer Methods for Partial Differential Equations*, Vol. 4, pp. 28–36. IMACS, 1981.
- [4] H. Notsu and M. Tabata. A single-step characteristic-curve finite element scheme of second order in time for the incompressible Navier-Stokes equations. *Journal of Scientific Computing*, Vol. 38, No. 1, pp. 1–14, 2009.
- [5] H. Notsu, H. Rui and M. Tabata. A second-order characteristics finite difference method for convection-diffusion problems, in preparation.
- [6] O. Pironneau. *Finite Element Methods for Fluids*. John Wiley & Sons, Chichester, 1989.
- [7] O. Pironneau and M. Tabata. Stability and convergence of a Galerkin-characteristics finite element scheme of lumped mass type. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 64, pp. 1240–1253, 2010.
- [8] H. Rui and M. Tabata. A second order characteristic finite element scheme for convection-diffusion problems. *Numerische Mathematik*, Vol. 92, pp. 161–177, 2002.
- [9] H. Rui and M. Tabata. A mass-conservative characteristic finite element scheme for convection-diffusion problems. *Journal of Scientific Computing*, Vol. 43, pp. 416–432, 2010.

- [10] E. Süli. Convergence and nonlinear stability of the Lagrange-Galerkin method for the Navier-Stokes equations. *Numerische Mathematik*, Vol. 53, pp. 459–483, 1988.
- [11] M. Tabata. Discrepancy between theory and real computation on the stability of some finite element schemes. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 199, pp. 424–431, 2007.
- [12] M. Tabata. Finite element schemes based on energy-stable approximation for two-fluid flow problems with surface tension. *Hokkaido Mathematical Journal*, Vol. 36, No. 4, pp. 875–890, 2007.
- [13] M. Tabata. Numerical simulation of fluid movement in an hourglass by an energy-stable finite element scheme. In M. N. Hafez, K. Oshima, and D. Kwak, editors, *Computational Fluid Dynamics Review 2010*, pp. 29–50. World Scientific, Singapore, 2010.