

## 電気双極子代用電荷法と数値等角写像への応用

電気通信大学大学院 情報・通信工学専攻 緒方秀教 (Hidenori Ogata)

The Department of Communication Engineering and Informatics

The University of Electro-Communications

### 1 はじめに

代用電荷法 (charge simulation method, method of fundamental solutions)[4] はポテンシャル問題の数値解法であり, 科学技術の広い分野で応用されている. この解法は,

- プログラミングが簡単
- 計算量が少ない
- ある条件下では収束が速い (指数関数的収束する)

という利点を持つ. そして, 元來電気力学の問題で考案されたこの方法は現在, 流体力学, 弾性問題, 波動問題など幅広い分野に拡張され用いられている.

この解法の原理は素朴であり, 求めようとするポテンシャル関数を複数の点電荷のポテンシャルの重ね合わせで近似するというものである. すなわち,  $\mathcal{D}$  を 2次元平面内の領域として, Laplace 方程式の Dirichlet 境界値問題

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \mathcal{D} \\ u = f & \text{on } \partial\mathcal{D} \end{cases} \quad (1)$$

に対し,

$$u(\mathbf{x}) \simeq u_N(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N Q_j E(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}_j), \quad E(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2\pi} \log \|\mathbf{x}\| \quad (2)$$

という形で近似解を求めるのである. ここで,  $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \dots, \boldsymbol{\xi}_N$  は領域  $\mathcal{D}$  外部にユーザによって与えられる点であり, 電荷点と呼ばれる.  $Q_1, Q_2, \dots, Q_N$  は後述する方法で定められる実数係数であり, 電荷と呼ばれる. 容易にわかるように, 近似解  $u_N$  は領域  $\mathcal{D}$  で Laplace 方程式を厳密に満たす. Dirichlet 境界条件については, 電荷  $Q_j$  を適切に選ぶことにより,  $u_N$  が境界条件を近似的に満たすようにする. 具体的には, 選点法により電荷  $Q_j$  を定める. すなわち, 境界  $\partial\mathcal{D}$  に拘束点と呼ばれる点  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N$  をとり, 拘束条件

$$u_N(\mathbf{x}_i) = f(\mathbf{x}_i) \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (3)$$

を満たすように電荷  $Q_j$  を定める. 方程式 (3) は

$$\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & \cdots & G_{1N} \\ G_{21} & G_{22} & \cdots & G_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ G_{N1} & G_{N2} & \cdots & G_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(\mathbf{x}_1) \\ f(\mathbf{x}_2) \\ \vdots \\ f(\mathbf{x}_N) \end{bmatrix}, \quad G_{ij} = -\frac{1}{2\pi} \log \|\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\xi}_j\| \quad (1 \leq i, j \leq N) \quad (4)$$

と書き直され,  $Q_j$  に対する連立 1 次方程式をなす. つまり, ポテンシャル問題 (1) に対する代用電荷法では, 連立 1 次方程式 (4) の解  $Q_j$  を求め, それを用いて式 (2) により近似解  $u_N$  を計算するのである.

ところで、近似解  $u_N$  に用いられる式 (2) 第 2 式の関数  $E(\boldsymbol{x})$  は、 $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$  で Laplace 方程式  $\Delta E(\boldsymbol{x}) = 0$  を満たすものならば何でもよい。そこで、代用電荷法で  $E(\boldsymbol{x})$  として点電荷ポテンシャルの代わりに電気双極子ポテンシャルを用いたものを考えてみる。これを本論文では電気双極子代用電荷法と呼ぶことにする。そして、本論文では電気双極子代用電荷法の性質について実験的に調べ、従来の代用電荷法と比較する。

本論文の構成は次のとおりである。第 2 節では電気双極子代用電荷法の導入を行う。第 3 節ではいくつかの数値例を示す。ここではとくに、円板内部領域におけるポテンシャル問題を例にして、電気双極子代用電荷法の性質を調べる。円板領域における問題に対しては、従来の代用電荷法の性質は理論的によく調べられているので [3]、電気双極子代用電荷法に対する数値実験結果を、理論的研究により分かる従来の代用電荷法の性質と比較する。第 4 節は数値等角写像への電気双極子代用電荷法の応用を扱う。等角写像とは複素正則関数による複素平面領域の写像であり、数値等角写像とは写像関数である複素正則関数の近似計算に他ならない。複素正則関数の実部は調和関数、虚部はその共役調和関数であることに着目すると、数値等角写像の問題は調和関数の境界値問題に帰着される。天野はこの観点から代用電荷法による数値等角写像の方法を提案した [1]。本論文では、同様の観点から電気双極子代用電荷法の数値等角写像への応用を提案する。第 5 節では本論文のまとめを行い、今後の課題について触れる。

## 2 電気双極子代用電荷法

点  $\boldsymbol{\xi} \pm \boldsymbol{d}/2$  にそれぞれ電荷  $\pm Q$  があるとき、電荷対がつくるポテンシャルは

$$\psi(\boldsymbol{x}) = -\frac{Q}{2\pi} \left\{ \log \left\| \boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi} - \frac{\boldsymbol{d}}{2} \right\| - \log \left\| \boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi} + \frac{\boldsymbol{d}}{2} \right\| \right\} = \frac{Q}{2\pi} \left\{ \frac{\boldsymbol{d} \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi})}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}\|^2} + O(\|\boldsymbol{d}\|^2) \right\}$$

で与えられる。 $Q\boldsymbol{d} = \boldsymbol{p}$  (一定のベクトル) としたまま極限  $\boldsymbol{d} \rightarrow \mathbf{0}$  とすると、

$$\psi(\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{p} \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi})}{2\pi\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}\|^2}$$

となる。 $\boldsymbol{p}$  を電気双極子モーメントとよび、 $\psi(\boldsymbol{x})$  を電気双極子モーメント  $\boldsymbol{p}$  のつくるポテンシャルと呼ぶ。

本論文では、ポテンシャル問題 (1) に対し、問題領域  $\mathcal{D}$  の外部に置かれた複数の電気双極子モーメントのつくるポテンシャルの重ね合わせにより近似解を求める方法を提案する。すなわち、次の形で近似解を求める。

$$u(\boldsymbol{x}) \simeq u_N(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^N \frac{\boldsymbol{p}_j \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}_j)}{2\pi\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}_j\|^2}. \quad (5)$$

ここで、 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \dots, \boldsymbol{\xi}_N$  は領域  $\mathcal{D}$  の外部にユーザが与える点で、双極子点と呼ぶことにする。 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \dots, \boldsymbol{p}_N$  は仮想的な電気双極子モーメントを表す 2 次元定数ベクトルであり、以下に述べる方法で定める。式 (5) の近似解  $u_N$  は、容易にわかるように、領域  $\mathcal{D}$  で Laplace 方程式を厳密に満たす。Dirichlet 境界条件については、電気双極子モーメント  $\boldsymbol{p}_j$  を適切に選ぶことにより、 $u_N$  が近似的に境界条件をみたすようにする。具体的には、選点法により  $\boldsymbol{p}_j$  を定める。すなわち、境界  $\partial\mathcal{D}$  上に拘束点と呼ばれる  $2N$  個の点  $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_{2N}$  をとり、拘束条件

$$u_N(\boldsymbol{x}_i) = f(\boldsymbol{x}_i) \quad (i = 1, 2, \dots, 2N) \quad (6)$$

をみたすように  $\boldsymbol{p}_j$  を定める。方程式 (6) は、 $\boldsymbol{p}_j = (p_x^{(j)}, p_y^{(j)})$ ,  $\boldsymbol{x}_i = (x_i, y_i)$ ,  $\boldsymbol{\xi}_j = (\xi_j, \eta_j)$  ( $i = 1, 2, \dots, 2N$ ;  $j = 1, 2, \dots, N$ ) とおけば、 $p_x^{(j)}, p_y^{(j)}$  に対する連立 1 次方程式

$$\sum_{j=1}^N \frac{p_x^{(j)}(x_i - \xi_j) + p_y^{(j)}(y_i - \eta_j)}{(x_i - \xi_j)^2 + (y_i - \eta_j)^2} = f(\boldsymbol{x}_i) \quad (i = 1, 2, \dots, 2N) \quad (7)$$

に書き換えられる。したがって、ポテンシャル問題 (1) に対する電気双極子代用電荷法では、連立1次方程式 (7) を解いて電気双極子モーメント  $\mathbf{p}_j = (p_x^{(j)}, p_y^{(j)})$  ( $j = 1, 2, \dots, N$ ) を求め、これを式 (5) に代入して近似解  $u_N$  を計算するのである。

注意 電気双極子を代用電荷法に用いるというアイデアは、すでに [2] など提案されている。[2] では、ポテンシャル問題 (1) の近似解を

$$u(\mathbf{x}) \simeq u_N(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N \frac{p_j \mathbf{n}_j \cdot (\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}_j)}{2\pi \|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}_j\|^2} \quad (8)$$

としている。ここで、 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \dots, \boldsymbol{\xi}_N \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\mathcal{D}}$  は双極子点、 $p_1, p_2, \dots, p_N \in \mathbb{R}$  は電気双極子の大きさ、 $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \dots, \mathbf{n}_N \in \mathbb{R}^2$  は電気双極子の向きを与える単位ベクトルであり、双極子点  $\boldsymbol{\xi}_j$  に加えて双極子の向き  $\mathbf{n}_j$  もユーザが与えるとしている。そして、双極子の大きさ  $p_j$  を選点法により決める。したがって、未知数は  $p_j$  ( $j = 1, 2, \dots, N$ ) の  $N$  個である。これに対し本論文の方法では  $p_j$  に加えて双極子の向き  $\mathbf{n}_j$  ( $j = 1, 2, \dots, N$ ) も unknown とし選点法で定めるので、未知数の個数は  $2N$  となる。

### 3 数値例

本節では、電気双極子代用電荷法について、いくつかの数値例によりその性能・性質を調べる。ここでは、問題領域としていちばんシンプルと考えられる円板領域

$$\mathcal{D}_\rho = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\mathbf{x}\| < \rho \} \quad (\rho > 0) \quad (9)$$

をとり、従来の代用電荷法と本論文の電気双極子代用電荷法を比較する。なお、双極子点・拘束点のとり方は次のようにするのが自然であろう。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi}_j &= q\rho \left( \cos \frac{2\pi(j-1)}{N}, \sin \frac{2\pi(j-1)}{N} \right) \quad (j = 1, 2, \dots, N; q > 1), \\ \mathbf{x}_i &= \rho \left( \cos \frac{2\pi(i-1)}{2N}, \sin \frac{2\pi(i-1)}{2N} \right) \quad (i = 1, 2, \dots, N). \end{aligned} \quad (10)$$

式 (10) のような双極子点・拘束点配置を等間隔同位相点配置とよび、パラメータ  $q$  を **assignment parameter** とよぶ。

円板領域  $\mathcal{D}_\rho$  におけるポテンシャル問題 (1) に対する従来の代用電荷法については、理論的によく調べられている [3]。この場合、代用電荷法の電荷点・拘束点は最も自然な次のとり方で配置する。

$$\left. \begin{aligned} \boldsymbol{\xi}_i &= q\rho \left( \cos \frac{2\pi(i-1)}{N}, \sin \frac{2\pi(i-1)}{N} \right) \\ \mathbf{x}_i &= \rho \left( \cos \frac{2\pi(i-1)}{N}, \sin \frac{2\pi(i-1)}{N} \right) \end{aligned} \right\} \quad (i = 1, 2, \dots, N; q > 1). \quad (11)$$

この電荷点・拘束点配置も等間隔同位相点配置と呼び、パラメータ  $q (> 1)$  を **assignment parameter** と呼ぶことにする。そして、円板領域  $\mathcal{D}_\rho$  におけるポテンシャル問題に対する従来の代用電荷法について、次の定理が成立する [3]。

**定理 1** 円板領域  $\mathcal{D}_\rho$  におけるポテンシャル問題 (1) に対し、等間隔同位相点配置 (*assignment parameter*  $q$ ) の電荷点・拘束点 (11) を用いた代用電荷法で近似解を求める際、次の仮定が成り立つとする<sup>1</sup>。

<sup>1</sup>2 番目の仮定は物理的に不自然であるが、これは、式 (2) の代用電荷法の近似解  $u_N$  がアフィン変換に対する不変性を持たないことによる。これに対し、室田が提案した代用電荷法の不変スキーム [5] では、2 番目の仮定は不要である。しかし、近似解の収束の速さは式 (13) と同じである。

- 境界データ  $f$  を

$$f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n e^{in\theta}$$

と Fourier 級数展開すると, Fourier 係数  $f_n$  について

$$f_n = O(a^{|n|}) \quad \text{as } n \rightarrow \pm\infty \quad (12)$$

が成り立つ. ここで,  $a$  は  $0 < a < 1$  なる定数である.

- $\rho^N (q^N - 1) \neq 1$ , かつ,  $q\rho \neq 1$ .

このとき, 代用電荷法の近似解の誤差について次が成立する.

$$\epsilon_N \equiv \sup_{\mathbf{x} \in \mathcal{D}_\rho} |u(\mathbf{x}) - u_N(\mathbf{x})| = \begin{cases} O(q^{-N}) & (q < a^{-1/2}) \\ O(Nq^{-N}) & (q = a^{-1/2}) \\ O(a^{N/2}) & (q > a^{-1/2}). \end{cases} \quad (13)$$

したがって, 近似解  $u_N$  は  $N$  に対し指数関数的収束する.  $\square$

これに対し, 電気双極子代用電荷法の近似解の振る舞いはどのようになるか, 以下の数値例で調べる. なお, 以下の数値例では数値計算はすべて, 計算機は HP Compaq 8000 Elite Business PC (CPU は Intel(R) CORE(TM)2 Duo CPU E8400, 3.00GHz 3.00GHz, メモリは 2.00GB), プログラム言語は C++, コンパイラは GCC Ver.4.5.0 を用い, 倍精度計算で行った.

例 1 はじめに, 境界データを

$$f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = x^2 - y^2 = \rho^2 \cos 2\theta \quad (x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta)$$

とした場合を調べる. この問題に対する電気双極子代用電荷法の誤差  $\epsilon_N$  の減衰のしかたは, 図 1(D) のようになる. なお, 誤差  $\epsilon_N$  について最大値の原理より

$$\epsilon_N \equiv \max_{\mathbf{x} \in \partial \mathcal{D}_\rho} |u_N(\mathbf{x}) - u(\mathbf{x})| = \max_{\mathbf{x} \in \partial \mathcal{D}_\rho} |u_N(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})| \quad (14)$$

が成り立つので, 境界 (円周)  $\partial \mathcal{D}_\rho$  の上だけで誤差を見積もればよい. 本論文の数値例では, 境界  $\partial \mathcal{D}_\rho$  上の多数の (1024 個の) 点を取り, それらの上での最大値を計算することにより式 (14) で与えられる誤差  $\epsilon_N$  を計算した. 図より, 電気双極子代用電荷法の誤差  $\epsilon_N$  は  $N$  に対し指数関数的に減衰し, さらに, assignment parameter  $q$  の値を大きくするほど速く減衰することが分かる. そこで, 各  $q$  の値に対し誤差  $\epsilon_N$  の減衰率を調べ, 表 1 に記した. 表より, この例に対しては電気双極子代用電荷法の誤差はおおよそ  $\epsilon_N \simeq O(q^{-N})$  となることが分かる.

表 1: 例 1 に対する (D) 電気双極子代用電荷法, および, (M) 従来の代用電荷法の誤差の収束性.

$q$	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2
(D)	$O(1.37^{-N})$	$O(1.53^{-N})$	$O(1.75^{-N})$	$O(1.93^{-N})$	$O(2.21^{-N})$
$\epsilon_N$ (M)	$O(1.45^{-N})$	$O(1.65^{-N})$	$O(1.86^{-N})$	$O(2.08^{-N})$	$O(2.28^{-N})$

一方, 従来の代用電荷法の誤差  $\epsilon_N$  の減衰の仕方も調べ, 結果を図 1(M), 表 1 に示した. この結果から, 従来の代用電荷法の誤差はおおよそ  $\epsilon_N \simeq O(q^{-N})$  と指数関数的減衰することが分か

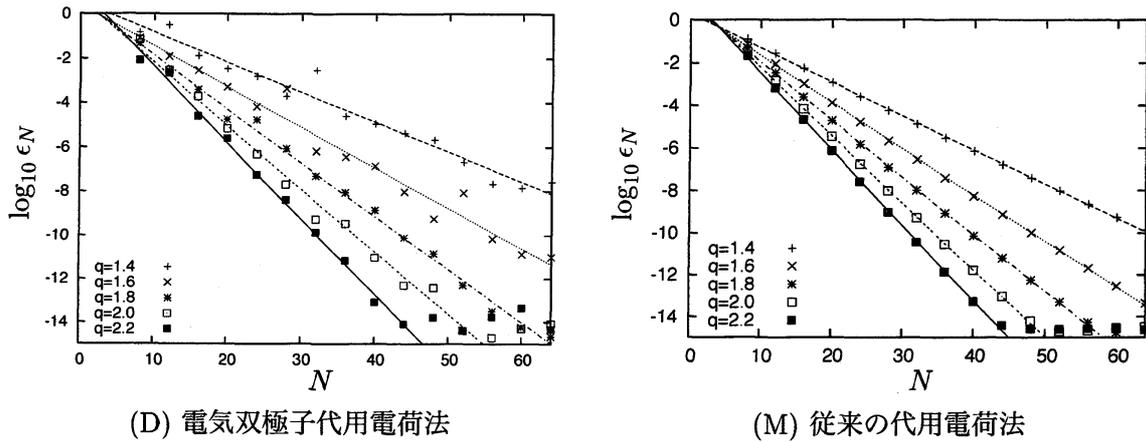


図 1: 例 1 に対する (D) 電気双極子代用電荷法, および, (M) 従来の代用電荷法の誤差.

る. この例の場合, 定理 1 において  $a = \varepsilon$  ( $\varepsilon$  は任意に小さい正数) ととれるので, 理論誤差評価は  $\varepsilon_N = O(q^{-N})$  となる. 実験結果はこの理論誤差評価とよく符合している.

以上より, 本例については, 電気双極子代用電荷法, 従来の代用電荷法ともに誤差は  $\varepsilon_N = O(q^{-N})$  となることが分かる. なお, 図 1 から, 電気双極子代用電荷法の近似解の収束の仕方は, 従来の代用電荷法と比べると若干不安定であることが分かる.

例 2 つぎに, 境界データを

$$f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a^{|n|} e^{in\theta} = \frac{1 - a^2}{1 - 2a \cos \theta + a^2} \quad (a = 0.25)$$

とした場合を調べる. この問題に対し, 近似解を電気双極子代用電荷法, および, 従来の代用電荷法で計算し, 誤差  $\varepsilon_N$  の点数  $N$  に対する変化を図 2 に示した. 図より, 電気双極子代用電荷法, 従来の代用電荷法いずれについても, 誤差  $\varepsilon_N$  は  $N$  に対し指数関数的に減衰し, assignment parameter  $q$  を大きくするほど速く減衰することが分かる. ただし, 電気双極子代用電荷法について,  $N = 8$  で  $\varepsilon_N \sim 10^{11}$  から  $10^{15}$  と,  $N$  が小さい場合誤差  $\varepsilon_N$  が極端に大きい.

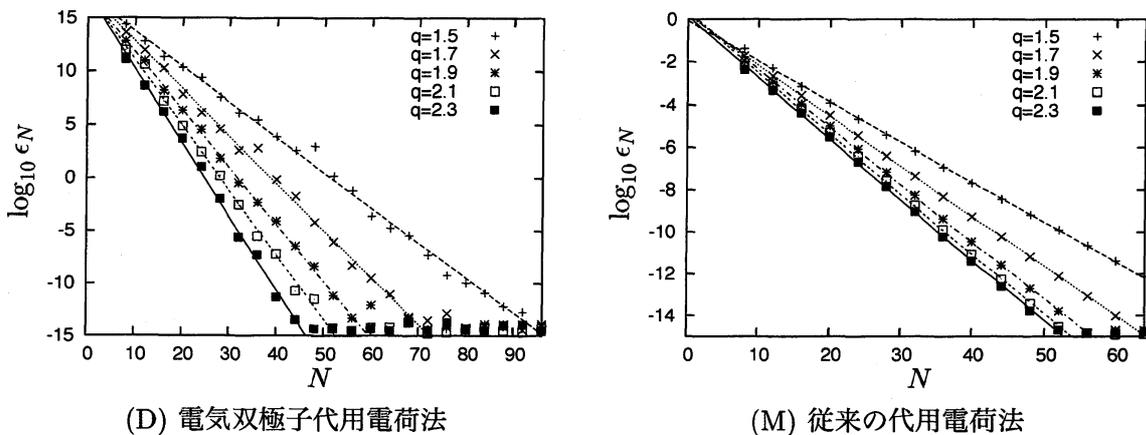


図 2: 例 2 に対する (D) 電気双極子代用電荷法, および, (M) 従来の代用電荷法の誤差.

つぎに, 電気双極子代用電荷法, および, 通常の代用電荷法それぞれについて, 各  $q$  の値に対

し誤差の減衰率を調べた。その結果を表2に記す。従来の代用電荷法について、定理1より理論誤差評価は

$$\epsilon_N = \begin{cases} O(q^{-N}) & (q < a^{-1/2} = 2) \\ O(a^{N/2}) = O(2^{-N}) & (q > a^{-1/2} = 2) \end{cases}$$

となり、表に記された数値実験結果もこれにおおよそ符合している。一方、電気双極子代用電荷法については、表の数値実験結果から、 $q = 1.5, 1.7, 1.9$  の場合についてはおおよそ  $\epsilon_N \simeq O(q^{-2N})$  であると言える。 $q = 2.1, 2.3$  の場合については、誤差の減衰率がどのような法則に従うか分からない。なお、図2から、この数値例においても、電気双極子代用電荷法の近似解の収束の仕方は従来の代用電荷法に比べると若干不安定であることが分かる。

表2: 例2に対する (D) 電気双極子代用電荷法、および、(M) 従来の代用電荷法の誤差の収束性。

$q$	1.5	1.7	1.9	2.1	2.3
(D)	$O(1.47^{-2N})$	$O(1.67^{-2N})$	$O(1.86^{-2N})$	$O(2.02^{-2N})$	$O(2.23^{-2N})$
(M)	$O(1.55^{-N})$	$O(1.72^{-N})$	$O(1.86^{-N})$	$O(1.92^{-N})$	$O(1.94^{-N})$

以上をまとめると、電気双極子代用電荷法の誤差の減衰率は、assignment parameter  $q (> 1)$  が十分小さいとき、例1では  $\epsilon_N = O(q^{-N})$ 、例2では  $\epsilon_N = O(q^{-2N})$  となる。したがって、誤差  $\epsilon_N$  が  $N$  に対し指数関数的に減衰することは言えるが、誤差の減衰率の定量的な値は問題（境界データ）に依存し、どのような法則に従うかは不明である。

#### 4 数値等角写像への応用

本節では、電気双極子代用電荷法の数値等角写像への応用について議論する。従来の代用電荷法については、天野らが数値等角写像への応用の研究を精力的に行なっている ([1] など)。代用電荷法による数値等角写像のアイディアは次のとおりである。等角写像とは複素平面領域の解析関数による写像であり、数値等角写像とは写像関数である複素解析関数の近似を求めることである。 $F(z)$  を複素平面領域  $\mathcal{D}$  における解析関数とすると、 $u(x, y) = \operatorname{Re} F(z)$  ( $z = x + iy$ ) は  $\mathcal{D}$  における調和関数、 $v(x, y) = \operatorname{Im} F(z)$  は  $\mathcal{D}$  における  $v(x, y)$  の共役調和関数である。そこで、調和関数  $u(x, y)$  を代用電荷法で近似すると、

$$u(x, y) = \operatorname{Re} F(z) \simeq -\frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N Q_j \log \|x - \xi_j\| = \operatorname{Re} \left\{ -\frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N Q_j \log(z - \zeta_j) \right\},$$

$$\xi_j = (\xi_j, \eta_j), \quad \zeta_j = \xi_j + i\eta_j \quad (j = 1, 2, \dots, N),$$

よって、複素解析関数  $F(z)$  に対する近似

$$F(z) \simeq -\frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N Q_j \log(z - \zeta_j)$$

を得る。すなわち、代用電荷法によって、複素解析関数に対し複素対数関数の1次結合による近似が得られるのである。

では、代用電荷法の代わりに電気双極子代用電荷法を用いれば、どのような近似公式が得られるか？調和関数  $u(x, y)$  を電気双極子代用電荷法で近似すると、

$$u(x, y) = \operatorname{Re} F(z) \simeq \sum_{j=1}^N \frac{\mathbf{p}_j \cdot (\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}_j)}{2\pi \|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}_j\|^2} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N \frac{p_j}{z - \zeta_j} \right\},$$

$$\mathbf{p}_j = (p_x^{(j)}, p_y^{(j)}), \quad p_j = p_x^{(j)} + ip_y^{(j)} \quad (j = 1, 2, \dots, N),$$

よって、複素解析関数  $F(z)$  に対する近似

$$F(z) \simeq \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N \frac{p_j}{z - \zeta_j} \quad (15)$$

を得る。すなわち、電気双極子代用電荷法によって、複素解析関数に対する有理関数による近似が得られるのである。

以上の考察のもと、等角写像の近似について考える。ここでは、 $\mathcal{D}$  を内部単連結領域、 $\mathcal{U}$  を単位円板領域  $\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$  として、等角写像  $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{U}$  を考える。ただし、領域  $\mathcal{D}$  内部に点  $z_0$  をとり、写像関数  $w = f(z)$  は

$$f(z_0) = 0, \quad f'(z_0) > 0 \quad (16)$$

を満たすとする。Riemann の写像定理より、等角写像  $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{U}$  で条件 (16) を満たすものは唯一つ存在することが知られている。以下、 $z_0 = 0$  と仮定する。

写像関数を

$$f(z) = z \exp g(z) \quad (17)$$

と表すと、条件 (16) (で  $z_0 = 0$  としたもの) より、関数  $g(z)$  は  $\mathcal{D}$  で解析的、 $\overline{\mathcal{D}}$  で連続であり、条件

$$\operatorname{Re} g(z) = -\log |z| \quad \text{on } \partial\mathcal{D}, \quad \operatorname{Im} g(0) = 0 \quad (18)$$

を満たす。条件 (18) は写像関数  $w = f(z)$  が境界  $\partial\mathcal{D}$  を単位円周  $|w| = 1$  に写す、すなわち、 $\partial\mathcal{D}$  上  $|f(z)| = 1$  であることによる。そこで、 $\mathcal{D}$  上の複素解析関数  $g(z)$  に対し、電気双極子代用電荷法による近似を適用する。すなわち、

$$g(z) \simeq g_N(z) = C + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N \frac{p_j}{z - \zeta_j}, \quad (19)$$

$$C \in \mathbb{R}, \quad p_1, p_2, \dots, p_N \in \mathbb{C}, \quad \zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_N \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathcal{D}} \quad (20)$$

とする。ここで、 $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_N$  は双極子点であり、ユーザが与える。 $p_1, p_2, \dots, p_N$  は電気双極子モーメントであり、 $C$  とあわせて下記に述べる方法で定める。まず、境界条件 (18) について、境界  $\partial\mathcal{D}$  上に拘束点  $z_1, z_2, \dots, z_{2N}$  をとり、拘束点上で  $g_N(z)$  が境界条件を満たすとする。すなわち、

$$\operatorname{Re} g_N(z_i) = -\log |z_i| \quad (i = 1, 2, \dots, 2N) \quad (21)$$

とする。さらに、条件 (18) 第 2 式より

$$\operatorname{Im} g_N(0) = 0 \quad (22)$$

とする。条件 (21), (22) はそれぞれ

$$C + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N \frac{p_x^{(j)}(x_i - \xi_j) + p_y^{(j)}(y_i - \eta_j)}{(x_i - \xi_j)^2 + (y_i - \eta_j)^2} = -\log |z_i| \quad (i = 1, 2, \dots, 2N), \quad (23)$$

$$\sum_{j=1}^N \frac{-p_x^{(j)}\eta_j + p_y^{(j)}\xi_j}{\xi_j^2 + \eta_j^2} = 0 \quad (24)$$

と書き直され、 $p_x^{(1)}, p_y^{(1)}, p_x^{(2)}, p_y^{(2)}, \dots, p_x^{(N)}, p_y^{(N)}, C$  に対する  $(2N+1)$  元連立 1 次方程式をなす。

以上をまとめると、題意の等角写像を近似を求めるには、領域  $\mathcal{D}$  外部に双極子点  $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_N$  を、境界  $\partial\mathcal{D}$  上に拘束点  $z_1, z_2, \dots, z_{2N}$  を与えて、それに対し、連立 1 次方程式 (23), (24) を解いて実定数  $C$ 、および、電気双極子モーメントを表す複素定数  $p_1, p_2, \dots, p_N$  を求める。そうすれば、式 (19) の関数  $g_N(z)$  を用いて、 $w = f_N(z) \equiv z \exp g_N(z)$  が題意の等角写像の近似を与える。

注意 従来の代用電荷法 [1] では、解析関数  $g(z)$  を

$$g(z) \simeq g_N(z) = C - \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N Q_j \log(z - \zeta_j), \quad (25)$$

$$C, Q_1, Q_2, \dots, Q_N \in \mathbb{R}, \quad \zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_N \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathcal{D}} \quad (26)$$

と近似する。ここで、電荷点  $\zeta_j$  ( $j = 1, 2, \dots, N$ ) はユーザが与え、実係数  $C$  および電荷  $Q_j$  ( $j = 1, 2, \dots, N$ ) は、境界条件 (18) をユーザが選んだ拘束点  $z_i \in \partial\mathcal{D}$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) 上で満たすという条件、および、式 (18) 第 2 式 (で  $z_0 = 0$  とおいた式) から課される条件  $\text{Im} g_N(0) = 0$  により決定する。ところが、式 (25) 右辺が複素対数関数  $\log(z - \zeta_j)$  という多価関数を含む。実際のコンピュータ計算では複素対数関数  $\log(z - \zeta_j)$  は主値、すなわち、 $-\pi < \text{Im} \log(z - \zeta_j) \leq \pi$  なる分枝を計算することになるが、その時、半直線  $z = \zeta_j + x$  ( $x \leq 0$ ) 上に  $2\pi i$  の不連続が生じ、これが関数  $g_N(z)$  の計算を困難にしている。これに対しては、不連続を避ける計算の工夫がいくつか提案されている。

一方、電気双極子代用電荷法による近似 (19) では、近似関数は有理関数、すなわち、1 価関数で表されているので、上記のような複素対数関数の不連続という問題は生じない。

数値例 領域  $\mathcal{D}$  として楕円内部

$$\mathcal{D} = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \frac{(\text{Re } z)^2}{A^2} + \frac{(\text{Im } z)^2}{B^2} < 1 \right\} \quad (A = 1, B = 0.5) \quad (27)$$

をとり、 $\mathcal{D}$  から  $\mathcal{W}$  への等角写像の近似を本論文で提案する方法で計算した。双極子点  $\zeta_j$ 、拘束点  $z_i$  は次のようにとった。

$$\zeta_j = J \left( q\rho \exp \left( i \frac{2\pi(j-1)}{N} \right) \right) \quad (j = 1, 2, \dots, N; q > 1), \quad (28)$$

$$z_i = J \left( \rho \exp \left( i \frac{2\pi(i-1)}{2N} \right) \right) \quad (i = 1, 2, \dots, N), \quad (29)$$

ただし、

$$\rho = \sqrt{\frac{A+B}{A-B}}, \quad c = \sqrt{A^2 - B^2}, \quad J(\zeta) = \frac{c}{2} \left( \zeta + \frac{1}{\zeta} \right) \quad (\text{Joukowski 変換}) \quad (30)$$

である。式 (28) のパラメータ  $q$  もここでは assignment parameter と呼ぶことにする。図 3 に、本論文で提案する方法による数値等角写像の様子を示す。図 (a) には楕円領域  $\mathcal{D}$  に含まれる実軸または虚軸に平行な直線群、図 (b) にはそれらの数値等角写像  $w = f_N(z)$  による像を描いている。数値等角写像の誤差の大きさを見積もるため、誤差の指標

$$\epsilon_N \equiv \max_{z \in \partial\mathcal{D}} \|f_N(z) - |f(z)|\| = \max_{z \in \partial\mathcal{D}} \|f_N(z) - 1\| \quad (31)$$

を求めた<sup>2</sup>。式 (28) の assignment parameter  $q$  の値を様々にとり、 $\epsilon_N$  の値の  $N$  に対する変化の様子を図 4 に示した。なお、図 4 には従来の代用電荷法 [1] で計算した場合の誤差の指標  $\epsilon_N$  の  $N$

<sup>2</sup>数値等角写像の誤差については [1] を参照すること。

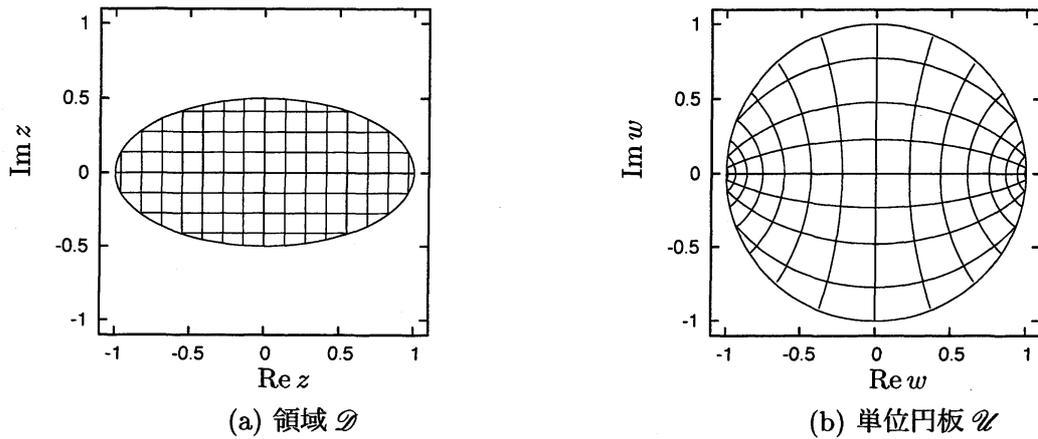


図 3: 電気双極子代用電荷法による楕円領域  $\mathcal{D}$  から単位円板  $\mathcal{U}$  への数値等角写像.

に対する変化の様子も示している。図より、誤差の指標  $\epsilon_N$  は  $N$  に対して指数関数的に減衰し、assignment parameter  $q$  が大きいほど減衰が速いことが分かる。そこで、それぞれの assignment parameter  $q$  の値に対し  $\epsilon_N$  の減衰の速さを調べ、表 3 に示した。表より、この数値例に対しては誤差の指標は assignment parameter  $q$  に対し  $\epsilon_N = O(q^{-N})$  となることが分かる。なお、表 3 には、従来の代用電荷法による数値等角写像 [1] で同じ数値例を計算した場合の誤差の指標  $\epsilon_N$  の減衰の速さも示している。

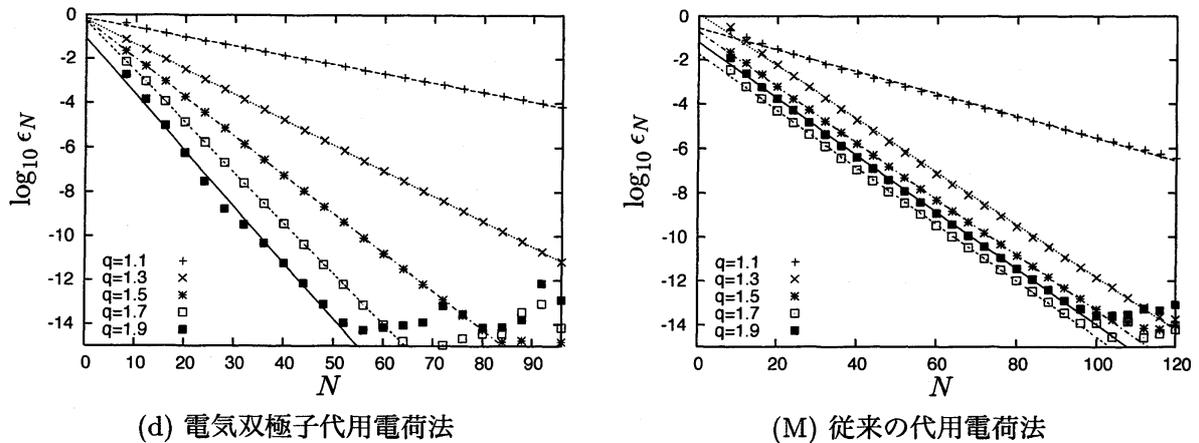


図 4: (D) 電気双極子代用電荷法、および、(M) 従来の代用電荷法による数値等角写像の誤差の指標  $\epsilon_N$ .

## 5 まとめと今後の課題

本論文では、2次元ポテンシャル問題 (Laplace 方程式の境界値問題) に対し、電気双極子代用電荷法、すなわち、電気双極子ポテンシャルの重ね合わせで近似関数を表す代用電荷法を提案した。そして、円板領域問題の数値例において、本論文の方法による近似解は従来の代用電荷法と同様、指数関数的収束するという速い収束性を示すことが分かった。しかし、指数関数的収束の速さは問題によってまちまちであり、従来の代用電荷法のようにどのような法則に従うのかは、数

表 3: (D) 電気双極子代用電荷法, および, (M) 従来の代用電荷法による数値等角写像の誤差の指標  $\epsilon_N$  の減衰の速さ.

$q$	1.1	1.3	1.5	1.7	1.9
(D)	$O(1.10^{-N})$	$O(1.30^{-N})$	$O(1.46^{-N})$	$O(1.69^{-N})$	$O(1.79^{-N})$
(M)	$O(1.12^{-N})$	$O(1.32^{-N})$	$O(1.34^{-N})$	$O(1.34^{-N})$	$O(1.34^{-N})$

値実験ではは分からなかった. また, 本論文の方法の近似解は従来の代用電荷法に比べると, 収束の仕方が若干不安定である.

さらに本論文では, 電気双極子代用電荷法の数値等角写像への応用も示した. 等角写像の写像関数が複素解析関数で表されることに着目して, その複素解析関数の実部である調和関数を電気双極子代用電荷法で近似し, 有理関数による写像関数の近似を得た. 従来の代用電荷法による数値等角写像では, 写像関数が複素対数関数で表されるため, 複素対数関数 (の主値) がもつ不連続を回避しなければならないという問題があったが, 本論文の方法では写像関数は 1 価関数で表されるため, そのような困難とは無縁である. 楕円内部領域に対する数値例では, 本論文の方法による近似写像は指数関数的収束という高い収束性を示すことが分かった.

本論文では, 電気双極子代用電荷法についてまだ僅かな事しか調べられていない. これから検証すべきことは, 次に挙げる通り, まだ多くの残されている. はじめに, 電気双極子代用電荷法の理論誤差評価に関心をもたれる. 本論文の数値例では内部円板領域での問題という最も簡単な場合のみ示したが, 一般の内部単連結領域, 外部単連結領域, さらに多重連結領域の問題についても数値実験による検証が必要である. その場合, 双極子点, 拘束点のとり方をどうすればよいかということが問題となる. これらの点のとり方次第で, 電気双極子代用電荷法の安定性が改善されることも期待される. また, 桂田が [2] で提案したような, 電気双極子の向きをユーザがあらかじめ指定する近似の仕方 (8) についても, 検討する必要がある. 最後に, 従来の代用電荷法と電気双極子代用電荷法を併用したハイブリッドな解法についても検証したい.

## 謝辞

本研究は科研費 (基盤研究 (C), 課題番号 22540116) の補助を受けている.

## 参考文献

- [1] K. Amano, A charge simulation method for the numerical conformal mapping of interior, exterior and doubly-connected domains, *J. Comput. Appl. Math.* **53** (1994) 353–370.
- [2] M. Katsurada, A mathematical theory of the charge simulation method II, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect IA, Math.* **36** (1989) 135–162.
- [3] M. Katsurada and H. Okamoto, A mathematical theory of the charge simulation method I, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect IA, Math.* **35** (1988) 507–518.
- [4] 村島定行, 代用電荷法とその応用, 森北出版, 1983 年.
- [5] 室田一雄, 代用電荷法におけるスキームの「不変性」について, *情報処理学会論文誌*, **34** (1993) 533–535.