

## 不連続ガレルキン有限要素法の理論と応用

菊地 文雄 (一橋大・経済), 及川 一誠 (東大・数理)

### 1 はじめに

不連続ガレルキン有限要素法 (DGFEM) は, Reed と Hill が中性子輸送方程式に対する三角形メッシュ法として発表したのに始まるとされる [16]. 他方, それ以前に要素間で不連続な関数を用いた有限要素法として, 非適合法や Pian, Tong らのハイブリッド法があり [4, 15], 最近はこれらを結合したハイブリッド型 DGFEM が開発・解析されている [3, 10, 11, 14]. DGFEM の定式化の要点は, 要素間境界での連続性を選点的あるいは平均的に課し処理することであり, Lagrange 乗数法やペナルティ法などが利用される. また, ハイブリッド型では, 要素内の未知関数とともに要素間境界での未知関数 (フラックス) が独立に使用される.

ここでは, 報告者が従事してきたハイブリッド型 DGFEM の理論と応用を中心に概説する. DGFEM の理論に関する基本的文献としては [1, 2, 6] 等がある.

### 2 手法の概要

ここでは 2 次元の有界多角形領域  $\Omega$  上での Poisson 方程式の境界値問題を想定して概説する.  $\Omega$  の境界を  $\partial\Omega$  と記す.  $\Omega$  上の関数に対する  $L^2(\Omega)$  や  $H^\kappa(\Omega)$  ( $\kappa > 0$  は非整数の場合を含む) などの関数空間は既知とする.  $L^2(\Omega)$ ,  $L^2(\Omega)^2$  双方の内積とノルムを  $(\cdot, \cdot)_\Omega$  と  $\|\cdot\|_\Omega$  で,  $H^\kappa(\Omega)$  のノルムと標準的セミノルムを  $\|\cdot\|_{\kappa, \Omega}$  と  $|\cdot|_{\kappa, \Omega}$  で表す. 領域が  $\Omega$  以外の場合, これらは  $\Omega$  をその領域の記号に置き換えて記して用いる.

$\partial\Omega$  の空でない部分集合  $\partial\Omega_D$  は有限個の閉線分からなるとし, そこへのトレースが 0 である  $H^1(\Omega)$  の部分空間を  $H_D^1(\Omega)$  とする. 次の Poisson 方程式の境界値問題を考える:  $f \in L^2(\Omega)$  を与えて次を満たす  $u \in H_D^1(\Omega)$  を求めよ.

$$(\nabla u, \nabla v)_\Omega = (f, v)_\Omega \quad (\forall v \in H^1(\Omega)) \quad (1)$$

この場合,  $u \in H^{\frac{3}{2}+\sigma}(\Omega) \cap H_D^1(\Omega)$  ( $0 < \sigma \leq \frac{1}{2}$ ) となる [5].

DGFEM を導入するため,  $\Omega$  の多角形要素による“正則な”分割族  $\{\mathcal{T}^h\}_{h>0}$  を構成する. 正則の意味は省略するが, 各種の幾何学的条件で表され, DGFEM では従来の有限要

素法での分割の正則性条件よりも、緩和できる可能性がある [2]. 各多角形要素  $K \in \mathcal{T}^h$  の辺の数は分割族共通の上限を持つとする. 内角には平角や優角も許す. 各  $K \in \mathcal{T}^h$  の辺は開線分とし  $e$  等で記し,  $K$  の周を  $\partial K$ ,  $K$  の辺の集合を  $\mathcal{E}^K$ , 分割の辺全体の集合を  $\mathcal{E}^h$  と書く.  $\mathcal{E}^h$  の元との和集合の閉包を骨格 (skeleton)  $\Gamma^h$  と呼ぶ. 要素, 辺の幾何学的量として,  $h_K = K$  の直径,  $h = \max_{K \in \mathcal{T}^h} h_K$ ,  $|K| = K$  の面積,  $|e| = e$  の長さを定義する.  $L^2(\partial K)$  の内積, ノルムは  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\partial K}$ ,  $|\cdot|_{\partial K}$  と記し,  $L^2(e)$  についても同様とする. DGFEM では各  $\mathcal{T}^h$  に付随した次の区分的 Sobolev 空間を用いる ( $\kappa > 0$ ).

$$H^\kappa(\mathcal{T}^h) = \{v \in L^2(\Omega); v|_K \in H^\kappa(K) (\forall K \in \mathcal{T}^h)\} \quad (2)$$

また,  $L^2(\Gamma^h)$  に  $\partial\Omega_D$  上で 0 となる条件を付加した空間を  $L^2_D(\Gamma^h)$  と書く. ここで考えるハイブリッド型 DGFEM では,  $H^{\frac{3}{2}+\sigma}(\mathcal{T}^h)$  ( $\sigma > 0$ ) の関数の他に  $L^2(\Gamma^h)$ ,  $L^2_D(\Gamma^h)$  の関数を用い, フラックスと呼ぶ.

さらに各  $K$  について  $P^k(K)$  ( $k$  は多項式次数) などの有限次元空間  $Q^K \in L^2(K)$  を用意し,  $g \in L^2(\partial K)$  に対して  $p = \{p_1, p_2\} \in (Q^K)^2$  を次式で対応させる作用素  $R_K$  (要素リフティング作用素) を定義する.

$$(p, q)_K = \langle g, q \cdot n \rangle_{\partial K} \quad (\forall q = \{q_1, q_2\} \in (Q^K)^2) \quad (3)$$

$n = \{n_1, n_2\}$  は 2 次元領域の境界での外向き単位法線である.

$-\Delta$  に対して DGFEM で用いる双 1 次形式の一例として下記をあげておく.

$$\begin{aligned} B_h(\{u, \hat{u}\}, \{v, \hat{v}\}) &= (\nabla_h u, \nabla_h v)_\Omega + \sum_K [\langle \nabla u \cdot n, \hat{v} - v \rangle_{\partial K} + \langle \nabla v \cdot n, \hat{u} - u \rangle_{\partial K} \\ &\quad + \sum_{e \in \mathcal{E}^K} \frac{\eta_0}{|e|} \langle \hat{u} - u, \hat{v} - v \rangle_e + (R_K(\hat{u} - u), R_K(\hat{v} - v))_K] \\ &(\{u, \hat{u}\}, \{v, \hat{v}\} \in H^{\frac{3}{2}+\sigma}(\mathcal{T}^h) \times L^2(\Gamma^h); \eta_0 > 0 \text{ はペナルティ係数}) \end{aligned} \quad (4)$$

上記で,  $\partial K, e$  上の  $u, \nabla u$  などは  $K$  からのトレースの意味とし,  $\nabla_h$  は  $(\nabla_h u)|_K = \nabla(u|_K)$  で特徴付ける. 右辺第 1 項は適合・非適合法でも現れ, 第 2, 3 項は Tong のハイブリッド変位法以来の未定係数法由来の項 [4], 第 4 項は内部ペナルティ項 [1, 2] であり, 最後は安定化のためのリフティング項 [1, 11] で, 使用しないこともあるが, その場合は  $\eta_0 > 0$  をある程度大きくとる必要がある. 上記は対称な双 1 次形式だが, 安定性の観点から非対称なものも利用される [2]. ただし, 非対称な定式化は Nitsche の技巧が適用し難いなどの欠点もある (詳細は略す).

次に分割族に付属した  $H^{\frac{3}{2}+\sigma}(\mathcal{T}^h) \times L^2_D(\Gamma^h)$  の適当な有限要素空間族  $\{V_D^h\}_{h>0}$  を構成する.  $V_D^h$  の具体例としては, 正の整数  $k$  を指定した上で  $U^h = \Pi_K P^k(\Omega)$ ,  $\hat{U}^h =$

$\Pi_{e \in \mathcal{E}^h} P^k(e)$  としたとき,  $V_D^h = U^h \times (\hat{U}^h \cap L_D^2(\Gamma^h))$  があげられる. このとき, (1) に対応する有限要素近似は次のようになる:  $f \in L^2(\Omega)$  を与えて次のような  $\{u_h, \hat{u}_h\} \in V_D^h$  を求めよ.

$$B_h(\{u_h, \hat{u}_h\}, \{v_h, \hat{v}_h\}) = (f, v_h)_\Omega \quad (\forall \{v_h, \hat{v}_h\} \in V_D^h) \quad (5)$$

DGFEM の解析のため,  $\{u, \hat{u}\} \in H^{\frac{3}{2}+\sigma}(\mathcal{T}^h) \times L^2(\Gamma^h)$  ( $\sigma > 0$ ) に対し, 次のセミノルムを定義する [2].

$$|\{u, \hat{u}\}_h|^2 = \|\nabla_h u\|_\Omega^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}^h} \sum_{e \in \mathcal{E}^K} \frac{1}{|e|} |u - \hat{u}|_e^2 \quad (6)$$

$$|||\{u, \hat{u}\}|||_h^2 = |\{u, \hat{u}\}_h|^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}^h} \sum_{e \in \mathcal{E}^K} |e| \cdot |\nabla u|_e^2 \quad (7)$$

上記で,  $K$  の辺  $e$  上の  $u, \nabla u$  は  $K$  からのトレースの意味とする. これら 2 つのセミノルムは一般には異なるが, 分割族や近似空間に関する若干の仮定の下では,  $V_D^h$  内では同等になることが示せる. また,  $\partial\Omega_D$  上での境界条件を考慮すれば, ノルムになることもわかる [1, 14]. 次節では, 表面上は (7) のみ現れる.

### 3 手法の解析

Poisson 方程式および類似の 2 階線形楕円型方程式に対する基本的 DGFEM の誤差解析手法は, [1, 2] などにまとめられている. ハイブリッド型 DGFEM についても大筋では同様である [11, 14]. 一言で言えば, 適当な分割依存のセミノルムを導入した上で, 近似能力, 整合性, 有界性, 強圧性等を示すことにより基本的な誤差評価式がえられ, さらに共役整合性をも示せれば Nitsche の技法が利用できる.

DGFEM をより一般の問題, たとえば固体の Navier 方程式や流体の Stokes 方程式のような連立偏微分方程式, 固有値問題, 強圧性の成立しない問題, 非自己共役問題, 半線形問題などに適用しようとする, 形式的な定式化はもとより, 様々な理論的な課題が生じる. それは, 基礎となる関数空間が要素分割依存で, 不連続な関数に対するものであることが主因であり, たとえばすでに述べた区分的 Sobolev 空間と通常の Sobolev 空間の差を考えれば納得できよう. 離散コンパクト性 [7] をはじめ, 連続問題では利用できた各種の関数解析的事項の離散版を構築することが必要とされる. この点については, すでに若干の結果が報告されているが (たとえば [2]), さらに研究が必要と思われる.

以下, 上記で述べたうちの基本的概念例とその利用法の概略を述べておく.

**[H0]** 近似能力 正定数  $C_a$  が存在し, 任意の  $v \in H^{\frac{3}{2}+\sigma}(\Omega) \cap H_D^1(\Omega)$  ( $\sigma > 0$ ) に対し,  $\{v_h, \hat{v}_h\} \in V_D^h$  ( $h > 0$ ) として次を満たすものが存在する.

$$\| \| \{v - v_h, \hat{v} - \hat{v}_h\} \| \|_h \leq C_a h^{\frac{1}{2}+\sigma} \|u\|_{\frac{3}{2}+\sigma, \Omega} \quad (\hat{v} = v|_{\Gamma^h}) \quad (8)$$

**[H1]** 整合性 モデル問題 (1) の  $u \in H^{\frac{3}{2}+\sigma}(\Omega) \cap H_D^1(\Omega)$  に対し, すべての  $h > 0$  について次が成立する.

$$B_h(\{u, \hat{u}\}, \{v_h, \hat{v}_h\}) = (f, v_h)_\Omega \quad (\forall \{v_h, \hat{v}_h\} \in V_D^h) \quad (9)$$

**[H2]** 有界性 正定数  $C_b$  が存在して, 任意の  $h > 0$ ,  $\{u, \hat{u}\}, \{v, \hat{v}\} \in H^{\frac{3}{2}+\sigma}(\mathcal{T}^h) \times L^2(\Gamma^h)$  ( $\sigma > 0$ ) に対して次が成立する.

$$|B_h(\{u, \hat{u}\}, \{v, \hat{v}\})| \leq C_b \| \| \{u, \hat{u}\} \| \|_h \cdot \| \| \{u, \hat{u}\} \| \|_h \quad (10)$$

**[H3]** 強圧性 正定数  $C_s$  が存在して, すべての  $h > 0$  と  $\{v_h, \hat{v}_h\} \in V_D^h$  に対して次が成立する.

$$|B_h(\{v_h, \hat{v}_h\}, \{v_h, \hat{v}_h\})| \geq C_s \| \| \{v_h, \hat{v}_h\} \| \|_h^2 \quad (11)$$

(8) に現れる  $h$  のべきは, 解の正則性を考慮して与えたもので, 収束だけなら正べきであれば十分である. これらを仮定すれば,  $C$  を上記の  $C_a, C_b, C_s$  で定まる正定数として, (1) の解  $u$  と (5) の近似解  $\{u_h, \hat{u}_h\}$  の間に次の誤差評価式がえられる.

$$\| \| \{u - u_h, \hat{u} - \hat{u}_h\} \| \|_h \leq C h^{\frac{1}{2}+\sigma} \|u\|_{\frac{3}{2}+\sigma, \Omega} \quad (\hat{u} = u|_{\Gamma^h}) \quad (12)$$

これを示すには, まず [H1] の (9) と近似方程式 (5) を共通の任意の  $\{v_h, \hat{v}_h\} \in V_D^h$  に対して考えて差をとり, さらに [H0] により  $u$  に対して近似能力を持つ  $\{u_h^*, \hat{u}_h^*\} \in V_D^h$  を選んで用いると, 次式がえられる.

$$B_h(\{u_h - u_h^*, \hat{u}_h - \hat{u}_h^*\}, \{v_h, \hat{v}_h\}) = B_h(\{u - u_h^*, \hat{u} - \hat{u}_h^*\}, \{v_h, \hat{v}_h\})$$

ここで  $v_h = u_h - u_h^*$ ,  $\hat{v}_h = \hat{u}_h - \hat{u}_h^*$  と選び, 左辺に [H3], 右辺に [H2] を用いれば, 次式をえる.

$$C_s \| \| \{u_h - u_h^*, \hat{u}_h - \hat{u}_h^*\} \| \|_h \leq C_b \| \| \{u - u_h^*, \hat{u} - \hat{u}_h^*\} \| \|_h$$

これに三角不等式と [H0] を用いれば, 目的の評価をえる.

なお, 近似解の存在自体は強圧性 [H3] により保証され,  $L^2$  評価  $\|u - u_h\|_\Omega$  については, (1) の共役問題 (この場合は実質的に同一) に対する整合性 (共役整合性) が成立していれば, Nitsche の技巧により  $O(h^{1+2\sigma})$  の評価がえられる.

## 4 適用例

以下、ハイブリッド型 DGFEM の適用例を中心に概説する。

### 4.1 Poisson 方程式

Poisson 方程式の境界値問題は、楕円型問題の基本であり、各種の DGFEM の適用結果が発表されている。著者らの結果は [11, 14] などにあり、区分多項式の次数や双 1 次形式の選び方に関する数値実験結果が含まれている。なお、ボクセル法をハイブリッド型 DGFEM を利用して修正し、境界形状の近似を改善する手法と数値例が [8, 9] にある。

### 4.2 2次元弾性問題

2次元弾性問題は歴史的にも実用的にも有限要素解析の典型的対象である。基本的には Navier 方程式の 2次元版を扱う。[10] には定式化や要素行列の誘導とともに、三角形や四辺形以外の多角形要素も用いた数値例が示され、従来要素との計算結果の比較やペナルティ係数の大きさの影響も考察されている。

理論的課題としては、Korn 不等式の離散版の確認などが重要である。

### 4.3 移流拡散方程式と移流方程式

DGFEM は移流拡散方程式や移流方程式にも適用できるが、移流項の近似が本質的である。ハイブリッド型 DGFEM については、[12, 13] で一種の上流近似が提案され、解析と数値実験の結果が報告されている。要素間境界で、流れの向きに応じ要素内関数の境界値とフラックス値とを切り替え利用する。直接には隣接要素の境界値は使用しないのでハイブリッド型の利点がいかにされ、また双 1 次形式の強圧性が保証できる。

以下では、次の形の 2次元定常移流方程式について、双 1 次形式の例を与え、基本的な下界評価式を紹介しておく。移流拡散方程式については、拡散項の近似にすでに述べた双 1 次形式  $B_h(\cdot, \cdot)$  を利用できる。

$$\mathbf{b} \cdot (\nabla u) + cu = f \quad (\Omega \text{内}) \quad (13)$$

ここで、 $\mathbf{b}$  は 2次元既知ベクトル値関数、 $c, f$  は既知関数とし、 $c_0$  をある正定数として、 $\mathbf{b}$  と  $c$  の間に次の関係を要請する。

$$c - \frac{1}{2} \nabla \cdot \mathbf{b} \geq c_0 > 0 \quad (14)$$

このとき、移流項  $\mathbf{b} \cdot (\nabla u)$  に対するハイブリッド型 DGFEM での双 1 次形式として、

[12, 13] では次の形を提案している（一種の上流近似？）.

$$b_h(\{u_h, \hat{u}_h\}, \{v_h, \hat{v}_h\}) = \sum_K \{(\mathbf{b} \cdot (\nabla u_h), v_h)_K + (\hat{u}_h - u_h, [\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}]_+ \hat{v}_h - [\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}]_- v_h)_{\partial K}\} \quad (15)$$

ここで,  $\{u_h, \hat{u}_h\}, \{v_h, \hat{v}_h\}$  は  $V^h := U^h \times \hat{U}^h$  の任意元であり, 下付の  $+$ ,  $-$  は関数の正の部分と負の部分を表す. すなわち, 要素間境界で, 流れ場  $\mathbf{b}$  が  $K$  から流出するところではフラックス  $\hat{v}_h$  を, 流入するところでは  $v_h$  を用いている.

このとき, 任意の  $\{v_h, \hat{v}_h\} \in V^h$  に対し, 次の評価が得られている.

$$b_h(\{v_h, \hat{v}_h\}, \{v_h, \hat{v}_h\}) + (c v_h, v_h)_\Omega \geq \frac{1}{2} \sum_K \left| |\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}|^{\frac{1}{2}} (\hat{v}_h - v_h) \right|_{\partial K}^2 + c_0 \|v_h\|_\Omega^2 \quad (16)$$

これにより, 一種の強圧性が保証され, さらに誤差評価式もえられる.

数値例として,  $\Omega = (0, 1)^2 \setminus \{(\frac{1}{2}, y); 0 < y \leq \frac{1}{2}\}$  (スリット入り単位正方形),  $f = c = 0$ ,  $\mathbf{b}^T = (\frac{1}{2} - y, x - \frac{1}{2})$  なる問題を扱う. ただし, 流出境界上では境界条件は与えず, 流入境界上のスリット部以外では  $u = 0$  を, スリット部の流入境界側では次の条件を課す.

$$u(\frac{1}{2}, y) = \sin^2(2\pi y) \quad (0 \leq y \leq \frac{1}{2}) \quad (17)$$

厳密解は, スリット上で与えられた上記の関数を, 正方形の中心に回転することによりえられる (ただし, 中心  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ , 半径  $\frac{1}{2}$  の円の外側では解は 0. 一種の定常回転流). 特に, スリット上でも厳密解は連続になる.

なお, この問題では  $c_0 = 0$  であり, 理論解析はより複雑になるが, スリット上での数値解の不連続度が精度の目安になるので, 数値例としては便利である.

領域を一様な正方形要素に分割し, 各要素では, 要素内も要素境界上 (フラックス) でも 1 次あるいは 2 次区分多項式を用いた. ただし, フラックスは正方形要素の辺上の各点で両側の要素に共通な値をとるが, 頂点では不連続性を許すものとした. 図 1 には,  $10 \times 10$  と  $40 \times 40$  の分割について, 1 次要素と 2 次要素の要素内近似関数  $u_h$  の結果を示す. 要素の高次化と細分で結果が改善される様子が, 特にスリット部での数値解の不連続性や厳密解のサポート外での数値解を見ることにより確認できる.

#### 4.4 その他：時間依存問題など

DGFEM は時間依存問題にももちろん適用できる. そのためには慣性項などに由来する質量行列の計算が必要だが, この部分は通常は要素ごとに独立な計算が可能で, 対角化や

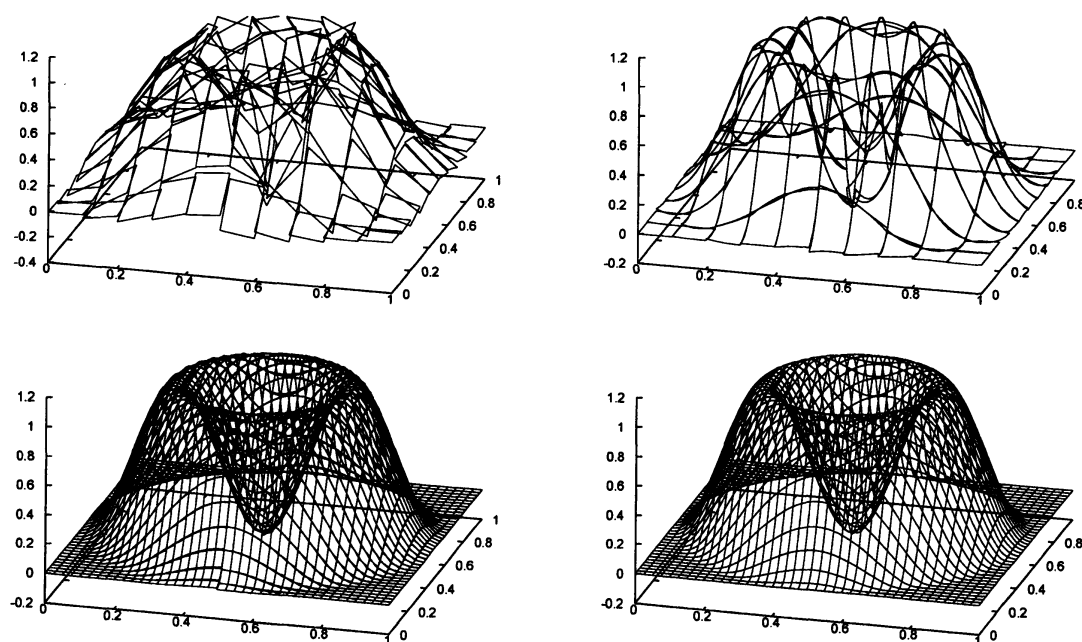


図1 数値解：左は  $P^1$  要素，右は  $P^2$  要素，上は  $10 \times 10$  分割，下は  $40 \times 40$  分割

並列化には適している．反面，ハイブリッド型 DGFEM では定常問題と異なり，線形問題でも厳密な意味では静的縮約ができないが，有効な近似的縮約手法の探求は今後の課題である．また理論的には，対応する定常問題作用素のレゾルベントの評価が重要である．

## 5 結び

不連続ガレルキン法はすでにかなり研究され，適用例や理論的基礎付けの蓄積もなされつつある．ただし，従来の有限要素法や有限体積法にどの程度置き換われるかは今後の課題で，むしろ従来手法で扱いにくかった部分を補う形で発展するかとも思う．例えば，移動境界問題や大変形問題などはそのような部分になろうか．手法の開発と解析に多くの方の関心が集まれば幸いである．

## 参考文献

- [1] Arnold, D.N., Brezzi, F., Cockburn, B., Marini, L.D.: Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems. *SIAM J. Numer. Anal.* **39**, 1749-1779 (2002)

- [2] Brenner, S.C., Scott, L.R.: *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*, 3rd ed. Springer-Verlag (2008)
- [3] Cockburn, B., Gopalakrishnan, J., Lazarov, R.: Unified hybridization of discontinuous Galerkin, mixed, and continuous Galerkin methods for second order elliptic problems. *SIAM J. Numer. Anal.* **47**, 1319-1365 (2009)
- [4] Fung, Y.C., Tong, P.: *Classical and Computational Solid Mechanics*. World Scientific Pub. (2001)
- [5] Grisvard, P.: *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains*. Pitman (1985)
- [6] Hesthaven, J.S., Warburton, T.: *Nodal Discontinuous Galerkin Methods: Algorithms, Analysis, and Applications*. Springer-Verlag (2008)
- [7] 菊地文雄：不連続ガレルキン法での離散コンパクト性について。2011年度日本数学会秋季総合分科会 応用数学分科会講演アブストラクト, 145-157 (2011)
- [8] Kikuchi, F., Ishii, K.: On the Applicability of DGFEM. *Proc. Comput. Eng. Conf., JSCES*, **15**(2), 517-520 (2010)
- [9] 菊地文雄, 石井恵三：不連続ガレルキン法による有限要素の開発と実用化（古典的要素の改良・拡張）, 日本応用数理学会 2010年度年会講演予稿集, 105-106 (2010).
- [10] Kikuchi, F., Ishii, K., Oikawa, I.: Discontinuous Galerkin FEM of hybrid displacement type—development of polygonal elements—. *Theor. Appl. Mech. Japan.* **57**, 395-404 (2009)
- [11] Oikawa, I.: Hybridized discontinuous Galerkin method with lifting operator. *JSIAM Lett.* **2**, 99-102 (2010)
- [12] 及川一誠：移流拡散方程式に対するハイブリッド型不連続 Galerkin 法。2010年度日本数学会秋季総合分科会 応用数学分科会講演アブストラクト, 80-81 (2010)
- [13] 及川一誠：1階線形偏微分方程式に対するハイブリッド型不連続 Galerkin 法。日本応用数理学会 2011年度年会講演予稿集, 307-308 (2011)
- [14] Oikawa, I. Kikuchi, F.: Discontinuous Galerkin FEM of hybrid type. *JSIAM Lett.* **2**, 49-52 (2010)
- [15] Pian, T.H.H., Wu, C.-C.: *Hybrid and Incompatible Finite Element Methods*. Chapman & Hall (2005)
- [16] Reed, W.H., Hill, T.R.: *Triangular mesh methods for the neutron transport equation*. Los Alamos Scientific Laboratory Report LA-UR-73-479, 1973.