

## 超離散 Allen-Cahn 方程式

### Ultradiscrete Allen-Cahn equation

\* 村田実貴生

\* 青山学院大学理工学部物理・数理学科

\*Mikio Murata

\* *Department of Physics and Mathematics, College of Science and Engineering,  
Aoyama Gakuin University, Sagamihara 252-5258 JAPAN*

*murata@gem.aoyama.ac.jp*

A systematic approach to the construction of ultradiscrete analogues for differential systems is presented. This method is tailored to first-order differential equations and reaction-diffusion systems. An ultradiscrete analog of the Allen-Cahn equation is proposed. Stationary solutions, traveling wave solutions and entire solutions of the resulting ultradiscrete systems are constructed. An ultradiscrete system corresponding to the Gray-Scott model is also proposed. The ultradiscrete system is directly related to the elementary cellular automaton rule 90.

## 1 はじめに

超離散化 [1] は差分方程式をセル・オートマトンに変換する極限操作である。この手法でソリトン・セル・オートマトンが数多く構成されているが、元の方程式の厳密解の構造などの本質的な特徴を保存していることが知られている。

[2] においてリッカチ型の微分方程式に対して超離散化を行う系統的な方法を提案した。そのアイデアを発展させて、一般の微分方程式に対して超離散化を行う系統的な方法を提案する。その方法は 1 階の微分方程式や反応拡散方程式に適用できるものである。1 成分の反応拡散方程式としてよく知られている Allen-Cahn 方程式にその方法を適用して超離散方程式を導出する。超離散方程式は区分線形方程式であるので、その「線形性」から様々な厳密解を得ることができる。得られた方程式に対して、定常解や進行波解および大域解を与える。これらの解は元の方程式の解と凡そ類似していることが分かる [3]。

また、2 成分の反応拡散系としてよく知られる Gray-Scott モデルに対して、この手法により超離散モデルを構成する。そのモデルは時空パターンがフラクタル図形を描くエレメンタリー・セル・オートマトンのルール 90 と呼ばれるものを含むなど、連続系と同様に興味深いパターンをもつものとなっている [4]。

反応拡散系においては、偏微分方程式を用いる連続モデルとセル・オートマトンを用いる離散モデルの研究が並行して行われているが、両者のつながりは専ら挙動の定性的な性質にのみにより論じられており、直接的な対応は明らかでない。トロピカル離散化では、連続モデルに直接対応するセル・オートマトンモデルを構成することができる。したがって、両者の知見を他者に生かした研究が進められるものと期待される。

## 2 トロピカル離散化

この節では、1 階の常微分方程式から超離散化が適用可能な離散方程式を系統的に構成する「トロピカル離散化」を説明する。

次の形の反応拡散系の偏微分方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u) - g(u) \quad (2.1)$$

の離散化を考える。ここでは  $u > 0$  の解を考えることにし、 $f(u), g(u) \geq 0$  とする。この式の離散化は函数

$$m(u_n^j) = \frac{1}{2} (u_n^{j+1} + u_n^{j-1}) \quad (2.2)$$

を用いて,

$$u_{n+1}^j = m(u_n^j) \frac{\varepsilon^{-1} m(u_n^j) + f(m(u_n^j))}{\varepsilon^{-1} m(u_n^j) + g(m(u_n^j))} \quad (2.3)$$

とすればよい. (2.3) を

$$\frac{u_{n+1}^j - u_n^j}{\varepsilon} = \frac{\delta^2}{2\varepsilon} \frac{2m(u_n^j) - 2u_n^j}{\delta^2} + \frac{m(u_n^j) \{f(m(u_n^j)) - g(m(u_n^j))\}}{m(u_n^j) + \varepsilon g(m(u_n^j))}$$

と変形して  $t = \varepsilon n$ ,  $x = \delta j$  とおき,  $\delta = \sqrt{2D\varepsilon}$  としてから  $\varepsilon \rightarrow 0$  とすると, 式 (2.1) が得られることにより, 離散化になっていることが確認できる. また, この式は正値性が保障されるために超離散化も適用可能である. 具体的には, (2.3) に対して, 各変数に次の指数函数型の変換

$$\varepsilon = \exp(E/\lambda), \quad u_n^j = \exp(U_n^j/\lambda), \quad f(u_n^j) = \exp\{F(U_n^j)/\lambda\}, \quad g(u_n^j) = \exp\{G(U_n^j)/\lambda\}$$

を行い,  $\lambda \rightarrow +0$  の極限をとることで実現される. そのとき

$$\lim_{\lambda \rightarrow +0} \lambda \log(e^{U/\lambda} + e^{V/\lambda}) = \max(U, V)$$

のような操作を行うことになる. 例えば, (2.2) の超離散化は

$$M(U_n^j) = \max(U_n^{j+1}, U_n^{j-1}) \quad (2.4)$$

となる. (2.4) を用いて, (2.3) は

$$U_{n+1}^j = M(U_n^j) + \max\{M(U_n^j) - E, F(M(U_n^j))\} - \max\{M(U_n^j) - E, G(M(U_n^j))\}$$

という式に変換される. 元の方方程式の乗算, 除算, 加算がそれぞれ加算, 減算, 最大値函数に変換されていることがわかる. また, 空間  $d$  次元のラプラシアン  $\Delta = \sum_{k=1}^d \partial^2 / \partial x_k^2$  を用いた

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\Delta u + f(u) - g(u)$$

という偏微分方程式についても

$$m(u_n^j) = \frac{1}{2d} \sum_{k=1}^d (u_n^{j+e_k} + u_n^{j-e_k})$$

を用いて,

$$u_{n+1}^j = m(u_n^j) \frac{\varepsilon^{-1} m(u_n^j) + f(m(u_n^j))}{\varepsilon^{-1} m(u_n^j) + g(m(u_n^j))}$$

とすればよい. この離散化の方法は [5] で用いられているものである. 更に, この離散化の式も超離散化可能であり,

$$M(U_n^j) = \max_{k=1, \dots, d} (U_n^{j+e_k}, U_n^{j-e_k})$$

を用いて,

$$U_{n+1}^j = M(U_n^j) + \max\{M(U_n^j) - E, F(M(U_n^j))\} - \max\{M(U_n^j) - E, G(M(U_n^j))\}$$

となる.

### 3 超離散 Allen-Cahn 方程式

この節では, Allen-Cahn 方程式に対してトロピカル離散化を適用して, 超離散 Allen-Cahn 方程式を構成し, 解について考察する.

### 3.1 Allen-Cahn 方程式のトロピカル離散化

Allen-Cahn 方程式 [6] は

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u(1-u)(u-a), \quad (0 < a < 1) \quad (3.1)$$

という形の放物型偏微分方程式である。本稿では (3.1) と同値である

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (1-u)(u-a)(u-b) \quad (0 < b < a < 1) \quad (3.2)$$

に対して離散化を行う。(3.2) は (2.1) において,  $f(u) = (1+a+b)u^2 + ab$ ,  $g(u) = u^3 + (a+b+ab)u$  としたものである。したがって, トロピカル離散化を行うと, 次の離散方程式

$$u_{n+1}^j = \frac{\varepsilon^{-1}m(u_n^j) + (1+a+b)m(u_n^j)^2 + ab}{\varepsilon^{-1} + m(u_n^j)^2 + a + b + ab} \quad (3.3)$$

を得る。次に (3.3) に変数変換

$$\varepsilon = \exp(E/\lambda), \quad u_n = \exp(U_n/\lambda), \quad a = \exp(A/\lambda), \quad b = \exp(B/\lambda) \quad (3.4)$$

を行ってから,  $\lambda \rightarrow +0$  の極限をとることで,

$$U_{n+1}^j = \max \{M(U_n^j) - E, \max(0, A, B) + 2M(U_n^j), A + B\} - \max \{-E, 2M(U_n^j), A, B, A + B\} \quad (3.5)$$

を得る。元の方程式のパラメータの条件  $b < a < 1$  に対応して  $B < A < 0$  とし, 以降  $E > -A$  の場合を考えると, 式 (3.5) は

$$U_{n+1}^j = \max \{0, -E - M(U_n^j), A + B - 2M(U_n^j)\} - \max \{0, A - 2M(U_n^j)\} \quad (3.6)$$

とまとめられる。この式を超離散 Allen-Cahn 方程式と呼ぶことにする。なお, (3.6) は場合分けにより  $-A < E \leq -(A+B)/2$  のとき,

$$U_{n+1}^j = \begin{cases} B & (M(U_n^j) < A + B + E) \\ M(U_n^j) - A - E & (A + B + E \leq M(U_n^j) < -E) \\ 2M(U_n^j) - A & (-E \leq M(U_n^j) < A/2) \\ 0 & (M(U_n^j) \geq A/2) \end{cases}$$

$E > -(A+B)/2$  のとき,

$$U_{n+1}^j = \begin{cases} B & (M(U_n^j) < (A+B)/2) \\ 2M(U_n^j) - A & ((A+B)/2 \leq M(U_n^j) < A/2) \\ 0 & (M(U_n^j) \geq A/2) \end{cases}$$

と書ける。

(3.6) において拡散効果がないと仮定すると, 常差分方程式

$$U_{n+1} = \max(0, -E - U_n, A + B - 2U_n) - \max(0, A - 2U_n)$$

になる。この方程式の平衡点は  $U = 0, A, B$  である。任意の  $U_0$  から出発したときの解は,  $U_0 > A$  のときは

$$U_n = \min \{0, 2^n(U_0 - A) + A\} \quad (n \geq 1) \quad (3.7)$$

と書ける。 $U_0 < A$  のときは  $-A < E \leq -(A+B)/2$  ならば  $n_0 = \min \{0, \lceil \log_2(A+E)/(A-U_0) \rceil\}$  として

$$U_n = \begin{cases} 2^n(U_0 - A) + A & (n \leq n_0) \\ \max \{B, -(A+E)(n - n_0) + 2^{n_0}(U_0 - A) + A\} & (n \geq n_0 + 1) \end{cases} \quad (3.8)$$

と書ける。 $E > -(A+B)/2$  ならば

$$U_n = \max \{B, 2^n(U_0 - A) + A\} \quad (n \geq 1) \quad (3.9)$$

と書ける。したがって  $U = 0, B$  は安定平衡点であり,  $U = A$  は不安定平衡点である。

### 3.2 進行波解

方程式 (3.6) の進行波解を求めるには  $U_n^j = V^{j-cn}$  を仮定して,

$$V^{j-c} = \max \{0, -E - M(V^j), A + B - 2M(V^j)\} - \max \{0, A - 2M(V^j)\}$$

を満たす解を求めればよいが, 次の定理が有効である.

**Theorem 1.** もし函数  $U(s) = D(s)$  が

$$U(s+1) = F(U(s)) \quad (3.10)$$

を満たす広義単調減少函数ならば,  $U_n^j = D((j-cn)/(1-c))$  ( $c < 1$ ) は

$$U_{n+1}^j = F(M(U_n^j)) \quad (3.11)$$

の速度  $c$  の進行波解になる. もし函数  $U(s) = I(s)$  が (3.10) を満たす広義単調増加函数ならば,  $U_n^j = I((j-cn)/(-1-c))$  ( $c < -1$ ) は (3.11) の速度  $c$  の進行波解になる.

*Proof.*

$$U_{n+1}^j = D\left(\frac{j-c(n+1)}{1-c}\right) = D\left(\frac{j-1-cn}{1-c} + 1\right),$$

かつ,  $D(s)$  の単調減少性より

$$\begin{aligned} F(M(U_n^j)) &= F(\max(U_n^{j+1}, U_n^{j-1})) = F\left(\max\left\{D\left(\frac{j+1-cn}{1-c}\right), D\left(\frac{j-1-cn}{1-c}\right)\right\}\right) \\ &= F\left(D\left(\frac{j-1-cn}{1-c}\right)\right) \end{aligned}$$

が成り立つ. また函数  $D(s)$  は

$$D\left(\frac{j-1-cn}{1-c} + 1\right) = F\left(D\left(\frac{j-1-cn}{1-c}\right)\right)$$

を満たすので, 定理が成り立つ. □

さらに空間対称性から,  $U_n^j = D((-j+cn)/(1+c))$  は速度  $c > -1$  の進行波解になり,  $U_n^j = I((-j+cn)/(-1+c))$  は  $c > 1$  の進行波解になる. 今の場合,  $-A < E \leq -(A+B)/2$  のときは (3.7) と (3.8) より

$$D(s) = \begin{cases} -2^s(A+E) + A & (s \leq 0) \\ \max\{B, -(A+E)s - E\} & (s > 0), \end{cases}$$

$$I(s) = \min\{0, A(1-2^s)\}$$

ととれる.  $E > -(A+B)/2$  のときは (3.7) と (3.9) より

$$D(s) = \max\{B, 2^s(B-A) + A\},$$

$$I(s) = \min\{0, A(1-2^s)\}$$

ととれる.

進行波解 I:

$$U_n^j = D\left(\frac{j-cn}{1-c}\right)$$

は  $\lim_{j \rightarrow -\infty} U_n^j = A$ ,  $\lim_{j \rightarrow \infty} U_n^j = B$  を満たす速度  $c < 1$  のフロント進行波解になる. 特に  $c = 0$  のときはフロント定常解になる. 微分方程式ではこの形の  $c \geq 0$  の解は存在しないので, そこが異なる.

進行波解 II:

$$U_n^j = \begin{cases} A & (j \leq n) \\ B & (j \geq n+1) \end{cases}$$

は  $\lim_{j \rightarrow -\infty} U_n^j = A$ ,  $\lim_{j \rightarrow \infty} U_n^j = B$  を満たす速度  $c = 1$  のフロント進行波解になる。この解は進行波解 II の  $c \rightarrow 1$  の極限に相当すると考えられる。

進行波解 III:

$$U_n^j = \max \left\{ D \left( \frac{j - cn + l}{1 - c} \right), D \left( \frac{-j + cn}{1 + c} \right) \right\}$$

は  $\lim_{j \rightarrow -\infty} U_n^j = A$ ,  $\lim_{j \rightarrow \infty} U_n^j = A$  を満たす速度  $|c| < 1$  のパルス進行波解になる。特に  $c = 0$  のときはパルス定常解になる。この形の解は微分方程式では見られないものである。

進行波解 IV:

$$U_n^j = \begin{cases} D \left( \frac{j+n+l}{2} \right) & (j \leq -n) \\ A & (j \geq -n+1) \end{cases}$$

は  $\lim_{j \rightarrow -\infty} U_n^j = A$ ,  $\lim_{j \rightarrow \infty} U_n^j = A$  を満たす速度  $-1$  のパルス進行波解になる。この解は進行波解 III の  $c \rightarrow -1$  の極限に相当すると考えられる。この形の解も微分方程式では見られない。

進行波解 V:

$$U_n^j = I \left( \frac{j - cn}{-1 - c} \right)$$

は  $\lim_{j \rightarrow -\infty} U_n^j = A$ ,  $\lim_{j \rightarrow \infty} U_n^j = 0$  を満たす速度  $c < -1$  の進行波解になる。この形の解は微分方程式の解と対応する。

進行波解 VI:

$$U_n^j = \begin{cases} A & (j \leq -n) \\ 0 & (j \geq -n+1) \end{cases}$$

は  $\lim_{j \rightarrow -\infty} U_n^j = A$ ,  $\lim_{j \rightarrow \infty} U_n^j = 0$  を満たす速度  $-1$  の進行波解になる。この解は進行波解 IV の  $c \rightarrow -1$  の極限に相当すると考えられる。

進行波解 VII:

$$U_n^j = \begin{cases} D \left( \frac{j+n+l}{2} \right) & (j \leq -n) \\ A & (-n+1 \leq j \leq -n+k) \\ 0 & (j \geq -n+k+1) \end{cases}$$

は  $\lim_{j \rightarrow -\infty} U_n^j = A$ ,  $\lim_{j \rightarrow \infty} U_n^j = 0$  を満たす速度  $-1$  の進行波解になる。このような単調でない進行波は微分方程式でも存在し、それに対応する解と考えられる。

進行波解 VIII:

$$U_n^j = \begin{cases} B & (j \leq -n) \\ A & (-n+1 \leq j \leq -n+k) \\ 0 & (j \geq -n+k+1) \end{cases}$$

は  $\lim_{j \rightarrow -\infty} U_n^j = B$ ,  $\lim_{j \rightarrow \infty} U_n^j = 0$  を満たす速度  $-1$  の進行波解になる。このような2つの安定平衡点を結ぶ進行波は微分方程式でも存在し、それに対応する解と考えられる。

### 3.3 大域解

任意の  $(j, n) \in \mathbb{Z}$  に対して成り立つ解を大域解という。例えば,  $U_n^j = D(n)$  や  $U_n^j = I(n)$  は大域解であり, 進行波解も大域解である。それ以外の大域解を求める。

大域解 I:

$$U_n^j = \max \left\{ I \left( \frac{j - cn - 1}{-1 - c} \right), I \left( \frac{-j + dn - 1}{-1 + d} \right) \right\}, \quad (c < -1, d > 1)$$

これは消滅解である。また  $c \rightarrow -1$  または  $d \rightarrow 1$  としても解になる。

大域解 II:

$$U_n^j = \max \left\{ D \left( \frac{j - cn + 1}{1 - c} \right), D \left( \frac{-j + dn + 1}{1 + d} \right) \right\}, \quad (c < 1, d > -1)$$

これは  $c$  と  $d$  の大小で挙動が異なる ( $c = d$  のときは進行波解)。また  $c \rightarrow 1$  または  $d \rightarrow -1$  としても解になる。

大域解 III:

$$U_n^j = \begin{cases} D \left( \frac{-j + cn + k}{1 + c} \right) & (j \leq -n) \\ I \left( \frac{j - dn - l}{-1 - d} \right) & (j \geq -n + 1) \end{cases} \quad (c > -1, d < -1)$$

$c \rightarrow -1$  または  $d \rightarrow -1$  としても解になる。

大域解 IV:

$$U_n^j = \begin{cases} D \left( \frac{j - cn + k}{1 - c} \right) & (j \leq -n) \\ I \left( \frac{j - dn - l}{-1 - d} \right) & (j \geq -n + 1) \end{cases} \quad (c < 1, d < -1)$$

これは  $c$  と  $-1$  との大小で挙動が変わる。 $c \rightarrow 1$  または  $d \rightarrow -1$  としても解になる。

大域解 V:

$$U_n^j = \begin{cases} \max \left\{ D \left( \frac{j - cn + 1}{1 - c} \right), D \left( \frac{-j + dn + 1}{1 + d} \right) \right\} & (j \leq -n) \\ I \left( \frac{j - en - 1}{-1 - e} \right) & (j \geq -n + 1) \end{cases}$$

ただし,  $c < 1, d > -1, e < -1$  である。これも速度について極限をとることができる。

## 4 超離散 Gray-Scott モデル

この節では, Gray-Scott モデルに対してトロピカル離散化を適用して, 超離散 Gray-Scott モデルを構成する。また超離散モデルの値を有限個に制限してセル・オートマトンとみなし, その時空間パターンを分類する。

Gray-Scott モデル [7] は

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D_u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - uv^2 + a(1 - u), \quad (4.1a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = D_v \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + uv^2 - bv \quad (4.1b)$$

で与えられる。パルスの衝突や分裂現象が見られることから, 反応拡散系においてよく研究されているモデルである。ここでは, (4.1) を  $w = v + 1, D_w = D_v$  と変数変換し,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D_u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u(w - 1)^2 + a(1 - u), \quad (4.2a)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = D_w \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + u(w - 1)^2 - b(w - 1) \quad (4.2b)$$

に対して離散化を適用する. 式 (4.2) を式 (2.1) を元に離散化すると,

$$u_{n+1}^j = \frac{\varepsilon^{-1} m_p(u_n^j) + 2m_p(u_n^j) w_{n+1}^j + a}{\varepsilon^{-1} + (w_{n+1}^j)^2 + 1 + a}, \quad (4.3a)$$

$$w_{n+1}^j = \frac{\varepsilon^{-1} m_q(w_n^j) + m_p(u_n^j) \{m_q(w_n^j)^2 + 1\} + b}{\varepsilon^{-1} + 2m_p(u_n^j) + b} \quad (4.3b)$$

とできる. 但し,  $m_p(u_n^j) = (u_n^{j+p} + u_n^{j-p})/2$  とする. (4.3) に対して,  $t = \varepsilon n$ ,  $x = \delta j$  とおき,  $\delta = \sqrt{2D\varepsilon}$  としてから  $\varepsilon \rightarrow 0$  とすると (4.2) において,  $D_u = p^2 D$ ,  $D_w = q^2 D$  としたものが得られる. (4.3) の超離散化は

$$U_{n+1}^j = \max \{ M_p(U_n^j) - E, M_p(U_n^j) + W_{n+1}^j, A \} - \max \{ -E, 2W_{n+1}^j, 0, A \}, \quad (4.4a)$$

$$W_{n+1}^j = \max [ M_q(W_n^j) - E, M_p(U_n^j) + \max \{ 2M_q(W_n^j), 0 \}, B ] - \max \{ -E, M_p(U_n^j), B \} \quad (4.4b)$$

となる. 但し,  $M_p(U_n^j) = \max(U_n^{j+p}, U_n^{j-p})$  とする. 以降  $W_n^j \geq 0$  のときを考えることにし, さらに簡単のために  $E \rightarrow \infty$  とすると (4.4) は

$$U_{n+1}^j = \max \{ M_p(U_n^j) + W_{n+1}^j, A \} - \max \{ 2W_{n+1}^j, A \}, \quad (4.5a)$$

$$W_{n+1}^j = \max \{ M_p(U_n^j) + 2M_q(W_n^j), B \} - \max \{ M_p(U_n^j), B \} \quad (4.5b)$$

とまとめられる. この式を超離散 Gray-Scott モデルと呼ぶことにする.

(4.5) は値域をうまく制限するとセル・オートマトン [8] にすることができる. たとえば  $B \geq 1$  とすると,  $U_n^j \in \{0, -1\}$ ,  $W_n^j \in \{0, 1\}$  に制限できる. このときはパラメータの取り方で 5 通りのセル・オートマトンになる.

タイプ I:  $A \leq -1, B = 1$  のとき

$M_p(U_n^j), M_q(W_n^j)$	0, 0	0, 1	-1, 0	-1, 1
$U_{n+1}^j, W_{n+1}^j$	0, 0	-1, 1	-1, 0	-1, 0

1 の塊のある初期値から出発させると, その塊が分裂し 2 つの進行波になる. 更にその進行波は対消滅することが分かる (図 1).

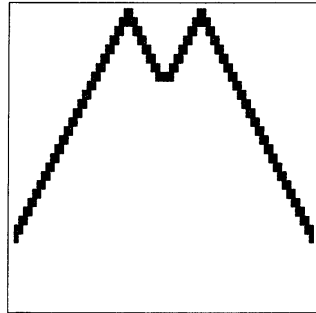


図 1:  $A \leq -1, B = 1$  かつ  $p = q = 1$  のときの  $W_n^j$  の時空間パターン

タイプ II:  $0 \leq A \leq 1, B = 1$  のとき

$M_p(U_n^j), M_q(W_n^j)$	0, 0	0, 1	-1, 0	-1, 1
$U_{n+1}^j, W_{n+1}^j$	0, 0	-1, 1	0, 0	0, 0

このとき  $U_{n+1}^j = -W_{n+1}^j$  となるので,  $W_n^j$  の単独の方程式にできる. さらに  $p = q = 1$  のときはフラクタル図形を描くことで知られる ECA ルール 90:

$W_n^{j-1} W_n^j W_n^{j+1}$	111	110	101	100	011	010	001	000
$W_{n+1}^j$	0	1	0	1	1	0	1	0

と等価になる (図 2). また拡散比を  $p = 2, q = 1$  に変えると, 定在型自己複製パターンが観察される (図 3).

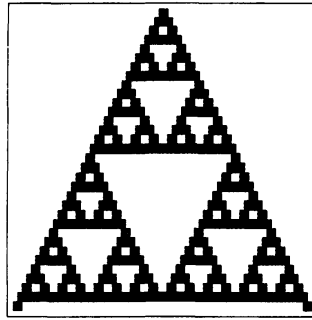


図 2:  $0 \leq A \leq 1, B = 1$  かつ  $p = q = 1$  のときの  $W_n^j$  の時空パターン

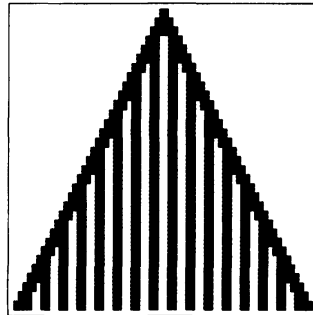


図 3:  $0 \leq A \leq 1, B = 1$  かつ  $p = 2, q = 1$  のときの  $W_n^j$  の時空パターン

タイプ III:  $A \geq 2, B = 1$  のとき

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} M_p(U_n^j), M_q(W_n^j) & 0,0 & 0,1 & -1,0 & -1,1 \\ \hline U_{n+1}^j, W_{n+1}^j & 0,0 & 0,1 & 0,0 & 0,0 \end{array}$$

このとき  $U_{n+1}^j = 0$  であるので,  $W_{n+1}^j$  は単独の超離散拡散方程式  $W_{n+1}^j = M_q(W_n^j)$  に従う.

タイプ IV:  $A \leq -1, B \geq 2$  のとき

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} M_p(U_n^j), M_q(W_n^j) & 0,0 & 0,1 & -1,0 & -1,1 \\ \hline U_{n+1}^j, W_{n+1}^j & 0,0 & 0,0 & -1,0 & -1,0 \end{array}$$

このとき  $W_{n+1}^j = 0$  であるので,  $U_{n+1}^j$  は単独の超離散拡散方程式  $U_{n+1}^j = M_p(U_n^j)$  に従う.

タイプ V:  $A \geq 0, B \geq 2$  のとき

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} M_p(U_n^j), M_q(W_n^j) & 0,0 & 0,1 & -1,0 & -1,1 \\ \hline U_{n+1}^j, W_{n+1}^j & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \end{array}$$

これは  $U_{n+1}^j = W_{n+1}^j = 0$  である. つまり, 速やかに定常状態になる.

もし (4.5) において  $B \geq L$  とすると,  $U_n^j \in \{0, -1, \dots, -L\}$  かつ  $W_n^j \in \{0, 1, \dots, L\}$  に制限できるので,  $U_n^j$  も  $W_n^j$  も  $L+1$  個の状態をもつセル・オートマトンになる. そのときの時空パターンは先の 5 種類に大別することができる.

タイプ I	タイプ II	タイプ III	タイプ IV	タイプ V
$A \leq -1$	$0 \leq A \leq 2L - 1$	$A \geq 2L$	$A \leq -1$	$A \geq 0$
$B = L$	$B = L$	$B = L$	$B \geq L + 1$	$B \geq L + 1$



たとえば,  $L = 2$  のときは影付きのシェルピンスキー三角形が現れる (図 4).

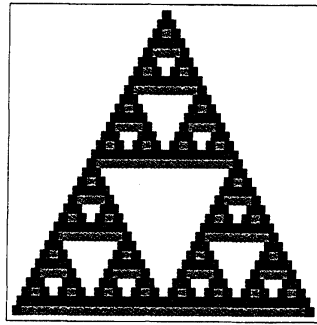


図 4:  $A = 3, B = 2$  かつ  $p = q = 1$  のときの  $W_n^j \in \{0, 1, 2\}$  の時空パターン

## 5 まとめ

1 階の常微分方程式や放物型偏微分方程式を系統的に超離散方程式に変換する手順である「トロピカル離散化」の方法を紹介した. 特に, 単独の反応拡散方程式である Allen-Cahn 方程式に対して, トロピカル離散化により対応する超離散方程式を構成した. そして基本的な解である進行波解や大域解を求めた. また, 2 成分の反応拡散系である Gray-Scott モデルに対して, トロピカル離散化により対応する超離散モデルを構成し, 特にセル・オートマトンとみなして時空パターンの分類を行った.

超離散方程式は, 区分的には線形方程式であるため厳密解を求めやすい, 解析が容易であるという優れた特徴がある. 既存の微分方程式についてトロピカル離散化の手法を用いてより扱いやすい数理モデルが構成され, モデル化された現象についてより一層の解明がなされることが期待される.

## 参考文献

- [1] T. Tokihiro, D. Takahashi, J. Matsukidaira and J. Satsuma: "From soliton equations to integrable cellular automata through a limiting procedure", *Phys. Rev. Lett.* **29** (1996), 3247–3250.
- [2] 村田 実貴生: 「微分方程式の系統立った離散化の方法」, 研究集会「非線形波動研究の新たな展開—現象とモデル化—」, 九州大学応用力学研究所研究集会報告, 22AO-S8 (2011), 1–6.
- [3] M. Murata: "Tropical discretization: ultradiscrete Fisher-KPP equation and ultradiscrete Allen-Cahn equation", Preprint.
- [4] M. Murata: "An ultradiscrete Gray-Scott model that contains ECA Rule 90", Preprint.
- [5] K. Matsuya and T. Tokihiro: "Existence and non-existence of global solutions for a discrete semilinear heat equation", *Discrete Contin. Dyn. Syst.* **31** (2011), 209–220.
- [6] S. Allen and J. W. Cahn: "A microscopic theory for antiphase boundary motion and its application to antiphase domain coarsening", *Acta. Metall.* **27** (1979), 1084–1095.
- [7] P. Gray and S. K. Scott: "Sustained oscillations and other exotic patterns of behavior in isothermal reactions", *J. Phys. Chem.* **89** (1985), 22–32.
- [8] S. Wolfram: "Cellular Automata and Complexity", Addison-Wesley (1994).