

## 理科（特に物理）と算数・数学のより緊密な連携のための

### ささやかな問題提起

高エネルギー加速器研究機構（KEK）

物質構造科学研究所

兵頭俊夫

#### 1. はじめに

数学教育というコンセプト自体を自明のものとして、教育における数学を再定義して、有効な数学の教育を探ろうとされている（誤解しているかもしれないが）、この研究集会の企画者の皆様に敬意を表したい。

本研究会の世話人から私の講演の内容についての問い合わせをいただいたときに、いくつかのことを回答した。それらの切り口でうまく算数・数学教育と理科（特に物理分野の）教育の問題点を絡めて「バトル」ができればと思ったのだが、なかなか難しい。

それは、私が算数・数学や算数・数学教育についてあまりよく理解していないためであろうと思う。そこで、理科教育や物理教育の中で、数学に関わって気になっていることを、列挙して、話題を提供することでお許し頂きたい。

以下では、まず物理学と数学に関係して、私の一般的な考え方を述べ、次に上記の個別項目について記述する。

#### 2. 物理学と数学

私の物理学と数学についての考え方は、以前応用物理学会誌に書いた「大学における物理学基礎教育と数学の接点」[1]から、ほとんど変わっていない。そこでは、以下のようなことを述べた。

- ・物理学は、ニュートン以来、数学を使って自然を説明するという特徴を持つことによって以前の自然哲学より守備範囲を狭くしたが、厳密さを獲得することができた。
- ・これによって、物理学は産業革命以来の社会の大きな発展の基礎となった。
- ・自然を支配する根本法則が、数学で表せるといえるのは、考えてみると不思議なことである。（整数、ユークリッド幾何学、微分方程式、量子力学、等々。）「神は数学を使って自然を創造した」というのは本当なのかも知れない。
- ・学校は、授業時間が限られているから、理論偏重になるのはある程度やむを得ない面もあるが、物理法則は自然の振る舞いに関する法則だから、授業でもまず、現象を見せること、あるいは少なくともその解説からはじめるべきである。
- ・物理学における数式は、数学としてではなく物理学の要素として登場すべきである。大学の物理学の授業では、数学の授業より先に新しい数学的概念や手法が登場することがある。これはやむを得ないので、その場で丁寧に教える。（現地調達）
- ・数学的基礎付けよりは、概念を正しく（厳密でなくてもよい）理解し、恐れずに正しく使えることを目的とする。

・数学的な概念や手法を数学的なアプローチで理解することと、物理の講義で扱う数学の物理的意味理解することはともに重要であるが、これらはそれぞれ、数学と物理学の講義でしかできない。そこに登場する諸項目について、それぞれの立場から、お互いを意識しながら教えることができれば、理想的である。

これらは、大学の講義について書いたものであるが、小学校からの算数・数学の授業と理科（特に物理分野）の授業の中の算数・数学についても、同様のことが言える。算数・数学と理科（特に物理分野）との間で、カリキュラムの調整など、どこまで協力ができるかということが議論になることがあるが、完全な調整はどだい難しいと思う。算数・数学と理科ではもともと学ぶべき事柄や視点が異なる。また、小学生の数・量概念の理解と自然理解は別の筋道で発達する。小学生の発達は早いから時機を失すると、大事な概念を面白く学習することができなくなる。長さ、面積、体積、重さ、時間などの学習は、算数、理科それぞれの都合での教える順序を軸にしながら、可能な限り調整するのがよいだろう。いずれにしても、両方で教えるのがよく、どちらかに「任せる」と、それぞれの理解の流れが不十分になる。

### 3. 算数・数学と理科（特に物理）に共通に関係する個別の諸問題

私は、目的を立てて事業を進めるときに、必ず詳細から入る。これは多分に私の個人的な傾向ためであろうと思う。詳細から入るといわゆる「木を見て森を見ず」になる恐れがある。これを避けることは当然いつも意識している。実は、常に全体を意識しながら詳細を見ることで、これを避けることができる。私はこれを、「木を見て森を知り、木を育てて森をつくる」方法と称している[2]。以下に述べる各項目は、必ずしも互いに関連があるわけではない。教育数学の構築に際して「たくさんの木の中にはこのような木もありますよ。」というような項目の羅列としてお読み頂きたい。

(1) 相関関係と因果関係（あるいは推論の根拠と原因）の区別して教えることの重要性  
人の脳は物事を因果関係としてとらえることができると「分かった」思いやすらしい。幼児の「なぜ... (Why)」という問いに対して「それはそういうものなんだよ。詳しく言うとね... (How)」と答えてもなかなか納得してもらえないが、厳密には間違いでも「...だからだよ (Because)」と答えれば納得してもらえることが多い。最近話題になった例では、大気中の二酸化炭素濃度と平均気温には相関があるようだが、それを短絡的に「二酸化炭素濃度が上昇したので平均気温が上がった」とらえる解釈は受け容れられやすい。「他の理由で気温が上昇し、それに伴って海水の温度も上昇して、海水中の二酸化炭素が空気中に出てきたのかもしれない」という可能性を検討する立場は受け容れられにくいようだ。（ちなみに、20℃付近の水に溶ける二酸化炭素の量は気温が1℃上昇すると10%近く減少する。）

算数・数学の推論は必要十分条件でつながっていることが多い。必要十分条件でつながった命題は、原因・結果の関係（因果関係）にあるわけではないが、片方の命題に先に気づいて、「だから」ということで、他方の命題を続けることは、論理的には間違いではないが、因果関係であるかのような説明を避けた方がいいだろう。

大学レベルの物理でも、因果律的に理解してはじめて理解できたと考えることが多いが、

実は、因果律的理解を極力排除しない限り真の理解に達することができない事柄もある。たとえば、電磁気学のクーロン法則とビオ・サバールの法則は因果関係の法則である。すなわち、電荷が原因で電場が生じ、電流が原因で磁場が生じる。しかし、マクスウェルの方程式は相関関係を示すだけで、因果関係は記述していない。その微分形はある一点についての式であり、その点の磁場や電場は他の点の電荷密度や電流密度と関係しているので、因果関係を表しているはずがない。積分形を考えると、それはある慣性系における電磁場・電荷密度・電流密度（時間に依存していてもよい）のある時刻についての体積積分や線積分で記述されており、そのとき光速が有限であることを考慮する必要がないから、因果関係の式であるはずがない。このような式が自然界を記述しているのだから、全く驚くほかないが、これが将来実験によって否定されない限り、素直に受け容れて正しい理解に努める以外にない。

### （2）物理法則と数学の定理を区別して教えることの重要性

これは、多くの例がある話題ではない。「ガウスの法則」と「ガウスの定理」を区別して教えることの重要性以外は、（他にもありそうだがとっさには）例を思いつかない。ガウスの定理は発散（div）の定義から導かれる数学の定理であり、ガウスの法則は、実験でしか確認できないクーロンの法則にガウスの定理を適用して得られる物理法則である。従って、ガウスの法則も実験でしか証明できない。（現実には、クーロンの法則そのものの実験は精度が出ないので、ガウスの法則を精密に検証してクーロンの法則の検証に代える。）

たいていの電磁気学の法則では、電荷のまわりのクーロン場についてガウスの法則（電場に対すマクスウェルの方程式の積分形）を導く。その計算の途中で、クーロンの法則の  $r^{-2.0}$ （実数べき）と球の表面積の  $r^2$  が厳密に打ち消し合うと仮定すると、ガウスの法則が導かれる。この計算過程が実験にのみ裏付けられていることが強調されることは少ないので、学生にはやもやした感じが残る（何も感じない学生が多いかもしれないが）。次に、ガウスの法則の微分形（電場に対すマクスウェルの方程式の微分形）を導く段になると、発散の定義とガウスの定理の証明が、ガウスの法則に絡めて展開される。このため、中身はほとんどガウスの定理の説明であるにもかかわらず、この過程でガウスの定理を理解する学生はほとんどいないというもったいないことになっている。

### （3）教育の過程で植え付けてしまった誤概念は、どこかで訂正したい。

算数・数学では、何かを教えるときに間違っただけの概念を植え付けても仕方がない、ということは、ほとんどないものと思われる。一つ一つが論理的に積み上げられているからである。（そう思っているだけで、実はあるかもしれない。研究していただきたい。）理科では、日常生活に重要であったり、現代科学の知識を早めに与えた方がよいとして、厳密に教えると難しい内容を低い学年で教えることがあるので、そのようなケースが生じる。

最も典型的な例は、小学校の「てこの原理」の学習で、棒の両側に同じ質量のおもりをつるし、「腕の長さ×おもりの数が左右で同じであれば、水平に釣り合う」という誤概念である。この誤概念は、世界共通、理系文系を問わず（物理の大学教授を含む）90%以上の人が持っている。高校や大学の物理教師は、モーメントのつりあいの授業で、「水平でなくても釣り合う」ことを教えるのに、教える側も教わった側も、小学校の実験の話になったとたん、「水平に釣り合う」ことを容認してしまう。統合的な理解になっていないのである。

が、指摘されないと気づかない。(もちろん指摘されればすぐに気づく。) 小学校で「てこの原理」を教えるときは「水平に釣り合う」でなければ教えることはほとんど不可能であろう。だから、それでよい。しかし、高校・大学で力のモーメントのつりあいを教えるときに、小学校の実験に言及して、なぜあの場合は水平に釣り合っていたかについて述べるべきであろう。その方が、モーメントのつりあいの理解も深まる。

#### (4) 次元を重視する物理学と無視して平気な数学

数学では、縦  $am$ 、横  $bm$  の長方形の面積は  $ab m^2$  である。面積を  $S$  としてこれを  $S=ab m^2$  と書くのは文字の使用法の一貫性がないのだが、あまり違和感を感じない。本来は、面積を  $S m^2$  として、 $S=ab$  または  $S m^2=ab m^2$  であろう。すなわち算数・数学で扱う文字は原則として次元をもたない。その場合、単位をそろえておかないと間違いになる。物理では、縦  $a$ 、横  $b$  の長方形の面積は  $S=ab$  である。これは長さの次元をもつ量の積が長さの2乗の次元をもつ量になる関係である。 $a$ 、 $b$ 、 $S$  は単位 (cm か mm か等) が違えば数値が異なる。しかし長さそのものは同じである。だから、 $x$  が長さのとき、

$$y = x^2 + 2x + 3$$

のような式を見る物理屋は、面積と長さとなだの数との和のように見えて、落ち着かない。2が長さで、3は面積だと聞けば、安心して先に進める。

算数・数学の  $x$  = 物理の  $x$  / (物理の  $x$  の単位): 無次元の量  
 といってよいであろう。したがって、算数・数学では、上式は無次元の量の関係だから不安な気持ちになる必要はない。

学問の特徴から考えて、この使い分けは妥当であろう。大事なことは、この使い分けが行われていることを認識していることである。これは、対数や指数の学習では重要になる。たとえば、「素粒子のサイズから宇宙のサイズまでをの長さ  $x$  を直線上に表すのには対数  $\log x$  を使うと便利である。」と言うときに、「この  $x$  は長さを単位で割った無次元の量である。」という但し書きをつけて注意を喚起してほしい。

これに関しては、物理屋もうっかりしている場合がある。たとえば、体積  $V$  の中に  $N$  個の粒子を含む理想気体のエントロピーの計算で、エネルギーが  $E$  以下の状態の数 (Gibbs 補正を含む) を

$$\Omega_0(E, N, V) = \frac{V^N}{h^{3N} N!} \frac{(2\pi m E)^{\frac{3N}{2}} e^{\frac{5}{2}}}{\Gamma\left(\frac{3N}{2} + 1\right)}$$

と計算した後、エントロピーの式

$$S(E, N, V) = k \log \Omega_0$$

に代入した後、ご丁寧に

$$S(E, N, V) = Nk \left[ \log \frac{V}{N} + \frac{3}{2} \log \frac{2E}{3N} + \log \frac{(2\pi m)^{3/2}}{h^3} + \frac{5}{2} \right]$$

等のように展開している例が、日本の教科書には目立つようである。エントロピーの体積依存性やエネルギー依存性を見るにはよい形なのだが、展開する前に何らかの断り書きをした方がよいのではないかと思う。

ちなみに、次元とは、物理量からその具体的な大きさを除いた概念 (長さ、質量、時間など) である。SI (国際単位系) では、これまで知られている物理の基本法則に則してど

うしても必要な基本概念を7つの基本次元として選び、その単位を基本単位として定義している。この基本単位は、基本量の大きさをその何倍かで表すときの基準である。話し合いで決めることのできる量であるが、なるべく定義が明確で、装置さえあれば世界中どこでも精度よく測定できるような定義が選ばれている。

#### (5) 計算練習・問題演習と論理的理解

今の中学校理科では、ほとんど式を使わない。「概念理解」という言葉が式を使わない理解と勘違いされていることも原因の一つだが、小学校での計算演習不足のため式を使おうにも使えないという事情の方が大きいのではないか。

算数・数学や理科（特に物理）の概念を自家薬籠のものとして自信を持って使えるような深さまで理解するには、(1) 体で覚えた計算力 (2) 実例の問題解法練習 (3) 概念の論理的理解 が必要である。我が国では、(2) が必要以上に重視されているが、(1) がおろそかになっているために、その(2)すら難しくなっている。繰り返し練習が必要なのは(2)ではなく(1)である。

大学の物理教員が「熱力学（あるいは他の分野でも）教えるようになって初めて理解できる」と語るのをよく聞く。実際、これらの学問体系を正しく理解する事はたやすいことではない。しかし、(2)を繰り返すことで帰納的に(3)を達成しようとする（受験指導で見られる）方法論は、実は効率が悪い。(3)を主にして、確認、微妙な誤解の訂正のために(2)を利用するのが効率的である。教えるようになってはじめて理解できるのは、次の週の授業のために効率よく準備しなければならない教員が(3)を行うからである。

#### (6) 義務教育の間に全員に確実に身につけさせたいこと

私の考えでは、義務教育修了までにすべての子供がマスターしているべき事項は、算数・数学や理科だけでなく社会生活のあらゆる分野で必要になる、加減乗除、かけ算九九、比例、反比例、割合、ではないかと思う。分数と小数、投影図概念についても多くの子供に理解しておいてほしい。何らかの理由でこれらのことを理解しないままになっている子供は少なからずいるようであるが、算数・数学だけに任せず、全教科の教師が対応すべき事柄であろう。理科の授業で、これらを理解していない子供に出会ったら、理科よりは算数・数学を教えることに切り替えてほしいと、現場の先生にはお願いしている。理解していない子供には、まずこれを教えないと理科を教えられない。そのために理科を教える時間がなくなってもいいのではないかとすら思っている。なぜなら、それなしには教えたかった内容は教えられないのだし、繰り返し出てくる算数を教えておけば、その後の理科の授業にとって必ずプラスになると思うからである。

#### 文献

[1] 応用物理 **66** (1997) 276-278.

[2] 大学の物理教育 **16** (2010) 138-139.