数理解析研究所講究録
第 1803 巻 2012 年 98-117

連続ウェーブレット変換に対する不確定性原理

萬代武史（大阪電気通信大学）
共同研究者：芦野隆一，守本晃（大阪教育大学）

Uncertainty principle for continuous wavelet transform

Takeshi MANDAI (Osaka Electro-Communication University)
Collaborators: Ryuichi ASHINO and Akira MORIMOTO (Osaka Kyoiku University)

概要

連続ウェーブレット変換に対して，不確定性原理 (UP) を考える．特に，元の独立変数と変換後のスケール変数に関する不確定性原理を考えたい．中心と幅をどう定義するかが重要である．フーリエ変換の片側中心，片側幅が深く関係するので，これらについても述べる．

1 序

ここで不確定性原理 (Uncertainty Principle) と言っているのは，量子力学のそれではなく，むしろフーリエ変換の不確定性原理とでもいうべきものである．これは，関数の「中心」とその周りの「幅」を考え，元の関数の幅とそのフーリエ変換像の幅との積が一定の正の数以上であることを保証する定理である．我々が考えたいのは，フーリエ変換の代わりに連続ウェーブレット変換を考えた場合の不確定性原理である．特に，元の関数の幅と，ウェーブレット変換後のスケールパラメータ a に関する幅との積に興味がある．フーリエ変換の変数 ξ に当たるのが a だからである．このためには，従来のフーリエ変換の中心と幅の定義を変更して，正負の周波数を統合した中心と幅（片側中心，片側幅と呼ぶことにする）が大きく関わる．

実は，この講演を引き受けた直後に重要な論文がいくつか見つかり，特に２点，始めに考えていたのと違う形になった．

1．連続ウェーブレット変換に関する不確定性原理について，私が考えた結果の一部が既に（定式化は少し違うが）得られていることが分かった（主に [Sing99], [Wil00]）．そのため，引き受けたときに思っていたよりは，新しいと言える部分が少なくなってしまった．

Key words and phrases: center, width, uncertainty principle, analytic signal, time-frequency analysis, signal analysis

2．片側中心，片側幅を考えた場合の不確定性原理について，ぜひ知りたいと思っていたことの答えが書いてある古い論文が見つかった．[HiRo71] である．しかし，その証明に理解出来ない部分があり，果たしてこれで証明できているのか怪しいと言わざるを得ない．これが正しければ，我々の結果もよくなる．従って，以下では，[HiRo71] の結果（以下では **HR** の結果と呼ぶ）が正しい場合と，それに頼らない場合と両方を述べる．現在，[HiRo71] そのままではなく，彼らのアイデアを基に新たな気持ちで証明を考えているが，まだ解決していない．

連続ウェーブレット変換の定義を先に述べておこう．まず，$b \in \boldsymbol{R}$, $a > 0$, $\xi_0 \in \boldsymbol{R}$ に対して

$$(T_b f)(t) := f(t-b), \qquad \text{Translation} \tag{1.1}$$

$$(D_a f)(t) := \frac{1}{\sqrt{a}} f\left(\frac{t}{a}\right), \qquad \text{Dilation} \tag{1.2}$$

$$(M_{\xi_0} f)(t) := e^{i\xi_0 t} f(t) \qquad \text{Modulation} \tag{1.3}$$

とおく．これらはすべてユニタリ作用素である．フーリエ変換は，

$$\widehat{f}(\xi) := \int_{\boldsymbol{R}} f(t) e^{-i\xi t}\, dt$$

とする.（すべての $f \in L^2(\boldsymbol{R})$ に対して定義するには，もちろんこの積分ではダメで，よく知られた議論が要る.）

$f \in L^2(\boldsymbol{R})$ の $\psi \in L^2(\boldsymbol{R})$ に関する連続ウェーブレット変換とは

$$(W_\psi f)(b,a) := \int_{\boldsymbol{R}} f(t)\, \overline{(T_b D_a \psi)(t)}\, dt, \quad b \in \boldsymbol{R},\ a \in \boldsymbol{R}_+ := [0,\infty) \tag{1.4}$$

であり，ξ にあたるのはスケールパラメータ a である．任意の ψ を考えるわけではなく，主に admissibility condition と呼ばれる，逆変換がうまく行くための条件（またはそれに類似の条件）の下で考える．

2 通常の不確定性原理

まず，通常の（フーリエ変換に関する）不確定性原理について述べよう．

定義 2.1 $f \in L^2(\boldsymbol{R})$, $f \neq 0$, $tf \in L^2(\boldsymbol{R})$ に対して，

$$c[f] := \frac{1}{\|f\|^2} \int_{\boldsymbol{R}} t\, |f(t)|^2\, dt, \tag{2.1}$$

$$\Delta_m[f] := \sqrt{\frac{1}{\|f\|^2}\int_{\boldsymbol{R}} |t-m|^2\,|f(t)|^2\,dt} \tag{2.2}$$

と定義し，$c[f]$ を f の中心，$\Delta_m[f]$ を f の m の周りの半径(radius) と呼び，$2\Delta_m[f]$ を幅(width) と呼ぶ．$\Delta_m[f]$ は $m = c[f]$ のときに最小となる．この最小値

$$\Delta[f] := \min_m \Delta_m[f] = \Delta_{c[f]}[f] \tag{2.3}$$

を f の半径 と呼ぶ．$p(t) = \dfrac{|f(t)|^2}{\|f\|^2}$ は $\displaystyle\int_{\boldsymbol{R}} p(x)\,dx = 1$ を満たす非負関数なので，確率密度関数とみなすことができ，このとき，$c[f]$ は平均，$\Delta[f]$ は標準偏差である．

$\widehat{f}$ に対しても全く同様に定義する．

$$c[\widehat{f}] := \frac{1}{\|\widehat{f}\|^2}\int_{\boldsymbol{R}} \xi\,|\widehat{f}(\xi)|^2\,d\xi, \tag{2.4}$$

$$\Delta_\mu[\widehat{f}] := \sqrt{\frac{1}{\|\widehat{f}\|^2}\int_{\boldsymbol{R}} |\xi-\mu|^2\,|\widehat{f}(\xi)|^2\,d\xi}, \tag{2.5}$$

$$\Delta[\widehat{f}] := \min_\mu \Delta_\mu[\widehat{f}] = \Delta_{c[\widehat{f}]}[\widehat{f}]. \tag{2.6}$$

$\Delta_m[f]$ は，∞ を許せば $f \in L^2(\boldsymbol{R})$, $f \fallingdotseq 0$ のみで定義できる．($c[f]$ はそうはいかない.)

さて，ここで $\Delta[f]$ も $\Delta[\widehat{f}]$ も有限値として定義できる関数の集合として次を定義しておく．

定義 2.2 $\quad WF := \{\, f \in L^2(\boldsymbol{R}) \mid f \fallingdotseq 0, tf \in L^2(\boldsymbol{R}), \xi\widehat{f} \in L^2(\boldsymbol{R})\,\}$.

$f \in WF$ なら $f \in L^1(\boldsymbol{R}) \cap B_0^0(\boldsymbol{R})$ となる．ただし，$B_0^0(\boldsymbol{R}) := \{ f \in C^0(\boldsymbol{R}) \mid f(t) \to 0 (t \to \pm\infty) \}$（無限遠で 0 となる連続関数の空間）である．

通常の（フーリエ変換に関する）不確定性原理はつぎの定理である．

定理 2.3 $\quad f \in WF$ なら

$$\Delta[f]\Delta[\widehat{f}] \geq \frac{1}{2}. \tag{2.7}$$

$=$ が成立するのは，$f(t) = Ae^{i\mu t}e^{-(t-m)^2/(2\sigma^2)}$ $(A, \mu, m, \sigma \in \boldsymbol{R}, \sigma > 0)$ のときである．

上の事はいいかえると，

$f \in L^2(\boldsymbol{R})$, $f \fallingdotseq 0$ なら，任意の $m, \mu \in \boldsymbol{R}$ に対して

$$\Delta_m[f]\Delta_\mu[\widehat{f}] \geq \frac{1}{2}. \tag{2.8}$$

とも言える．ただし，

$$\infty \times \infty = \infty \times k = \infty \qquad (k > 0) \tag{2.9}$$

とする．

少なくとも $\sqrt{|t|}f \in L^2(\boldsymbol{R})$, $\sqrt{|\xi|}\widehat{f} \in L^2(\boldsymbol{R})$ ぐらいの条件がないと，$c[f]$, $c[\widehat{f}]$ の定義に問題が生じるが，(2.8) の形なら，$\Delta_*[*] = \infty$ を許せば，このような条件が要らない．

我々が考えたいのは，フーリエ変換の代わりに連続ウェーブレット変換を考えたときに同様の不等式が成り立つのか，ということである．

この目的のためには，実は $\widehat{f}$ に対して，上の定義ではなく，正負の ξ を統合した中心と半径（幅）が要る．実数値関数に限っては，実はすでに結果が得られていたので，それを以下に述べるが，その前に $c[f]$, $\Delta[f]$ の基本性質を述べておこう．

$$c[T_b f] = c[f] + b, \quad c[D_a f] = ac[f], \quad c[M_{\xi_0} f] = c[f], \tag{2.10}$$

$$\Delta[T_b f] = \Delta[f], \quad \Delta[D_a f] = a\Delta[f], \quad \Delta[M_{\xi_0} f] = \Delta[f], \tag{2.11}$$

$$c[\widehat{T_b f}] = c[\widehat{f}], \quad c[\widehat{D_a f}] = \frac{1}{a}c[\widehat{f}], \quad c[\widehat{M_{\xi_0} f}] = c[\widehat{f}] + \xi_0, \tag{2.12}$$

$$\Delta[\widehat{T_b f}] = \Delta[\widehat{f}], \quad \Delta[\widehat{D_a f}] = \frac{1}{a}\Delta[\widehat{f}], \quad \Delta[\widehat{M_{\xi_0} f}] = \Delta[\widehat{f}]. \tag{2.13}$$

3　片側不確定性原理

3.1　何が問題か?

もし f が実数値であると，$\overline{\widehat{f}(\xi)} = \widehat{f}(-\xi)$ が成立するので，$|\widehat{f}(\xi)|$ は ξ の偶関数であり，$c[\widehat{f}] = 0$ となる．しかし，ξ が運動量にあたる量子力学などとは違って，通信や信号処理などの分野で考えられているように，ξ を角周波数と考える立場では，これは“中心周波数”とは言い難い．例えば，$f(t) = e^{-t^2/2}\cos\xi_0 t$ $(\xi_0 > 0)$ を考えると，フーリエ変換は，図 1 の下図のようになる．このグラフは $\xi = \pm\xi_0$ の近くにピークを持ち，ピークの周りの“広がり具合”は ξ_0 によってほとんど変わらない．しかし，上の定義では，常に $c[\widehat{f}] = 0$ であり，$\Delta[\widehat{f}]$ は ξ_0 が増えるに従って，ほぼ比例的に増大する．(図 2 の右破線参照）．これでは，欲しいものが捉えられていない．$|\widehat{f}(\xi)|$ が偶関数なので，正の ξ のみを考えて中心や幅を考えるが自然であろう．

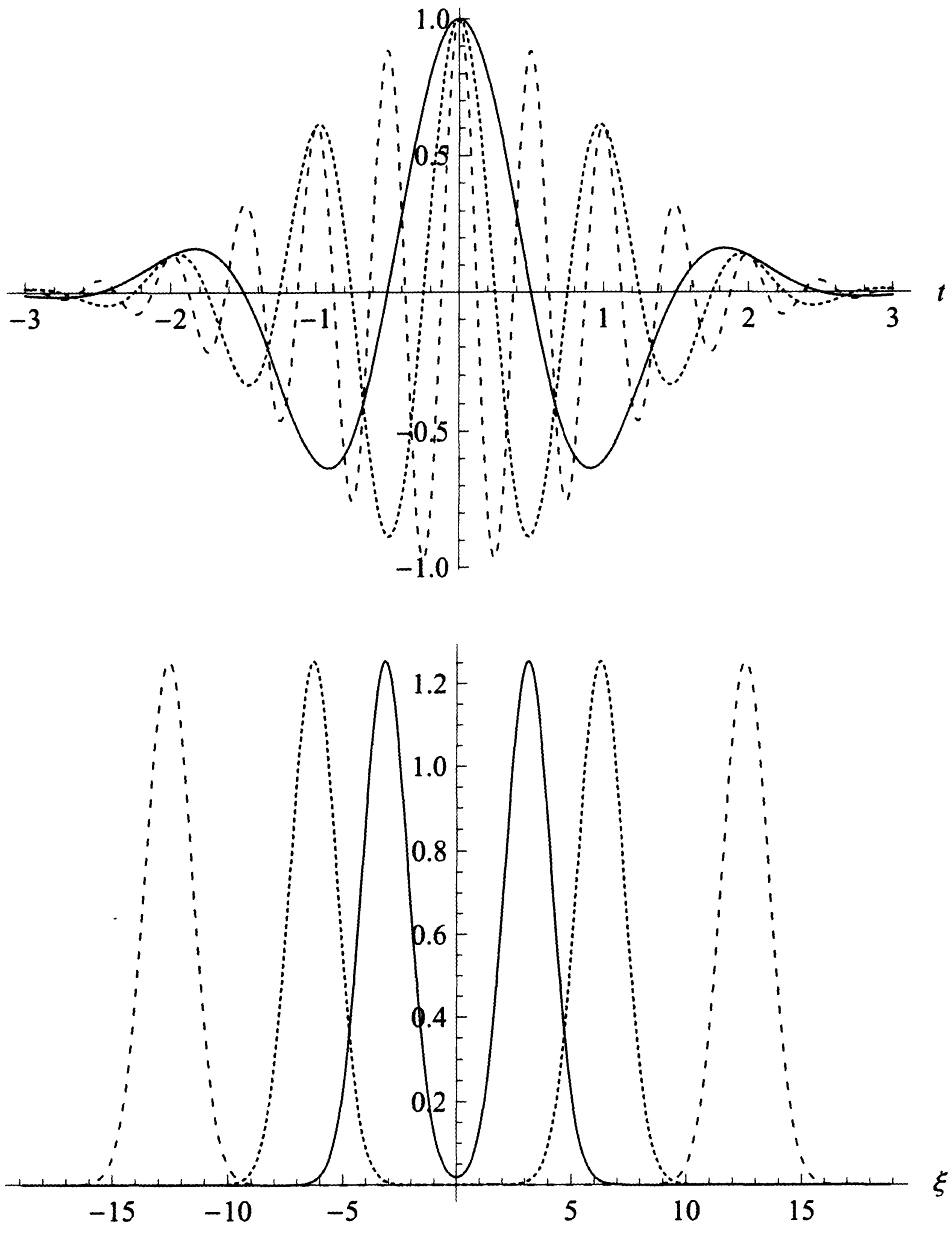

図 1: $f(t) = e^{-t^2/2}\cos\xi_0 t$ (上), $|\widehat{f}(\xi)|$ (下)
($\xi_0 = \pi$(実線), 2π(点線), 4π(破線))

3.2 片側中心と片側幅 (実数値関数の場合)

Kay-Silverman[KaSi57] は実信号に対して，正の周波数のみを考えて $\widehat{f}$ に対する中心と幅を考えた．我々の文脈に即した形で述べよう．

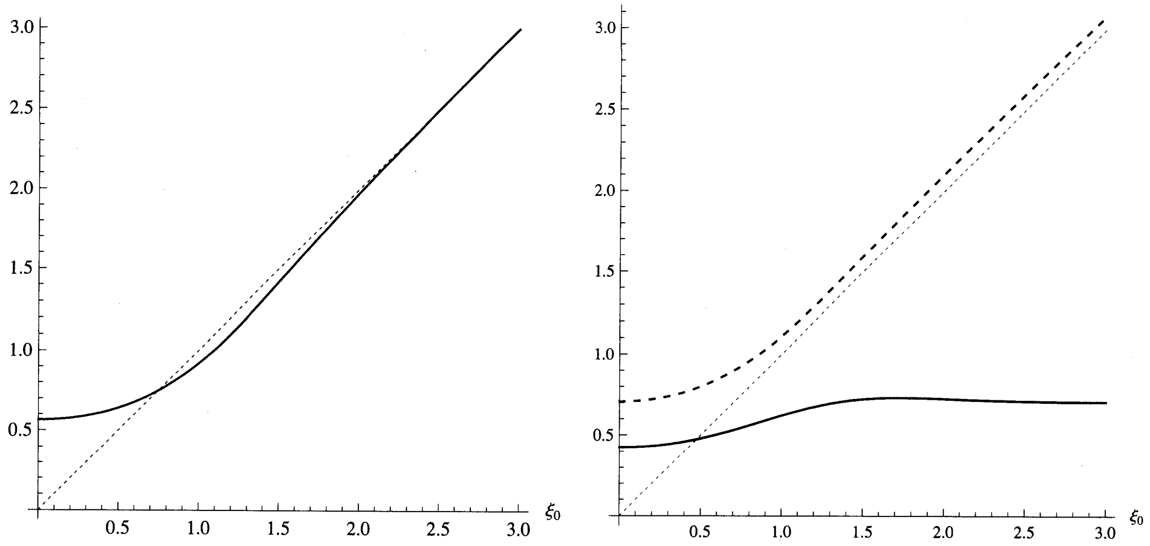

図 2: $c^+[\widehat{f}]$(左，実線)，$\Delta^+[\widehat{f}]$(右，実線)，$\Delta[\widehat{f}]$(右，破線).
$(f(t) = e^{-t^2/2}\cos\xi_0 t)$.

定義 3.1　$f \in L^2(\boldsymbol{R}) \setminus \{0\}$ は実数値とする．$\xi\widehat{f} \in L^2(\boldsymbol{R})$ のとき，

$$c^+[\widehat{f}] := \frac{\displaystyle\int_0^\infty \xi|\widehat{f}(\xi)|^2\,d\xi}{\displaystyle\int_0^\infty |\widehat{f}(\xi)|^2\,d\xi}, \tag{3.1}$$

$$\Delta_\mu^+[\widehat{f}] := \sqrt{\frac{\displaystyle\int_0^\infty |\xi-\mu|^2|\widehat{f}(\xi)|^2\,d\xi}{\displaystyle\int_0^\infty |\widehat{f}(\xi)|^2\,d\xi}}, \tag{3.2}$$

$$\Delta^+[\widehat{f}] := \Delta^+_{c^+[\widehat{f}]}[\widehat{f}] \tag{3.3}$$

と定義する．$c^+[\widehat{f}]$, $\Delta_\mu^+[\widehat{f}]$ をそれぞれ，$\widehat{f}$ の片側中心(*one-sided center*)，$\widehat{f}$ の μ の周りの片側半径(*one-sided radius*) と呼ぶ．やはり，$p^+(\xi) := \dfrac{|\widehat{f}(\xi)|^2}{\displaystyle\int_0^\infty |\widehat{f}(\xi)|^2\,d\xi}$ を $[0,\infty)$ 上の確率密度関数と見たときの，平均と標準偏差である．また，$\Delta^+[\widehat{f}]$ を $\widehat{f}$ の片側半径と呼び，$2\Delta^+[\widehat{f}]$ を $\widehat{f}$ の片側幅(*one-sided width*) と呼ぶ．

図 2 で分かるように，$f(t) = e^{-t^2/2}\cos\xi_0 t$ の場合，期待されるように，$c^+[\widehat{f}]$ はほぼ ξ_0 であり，$\Delta^+[\widehat{f}]$ は ξ_0 が大きくなってもほとんど変化しない．

また，彼らは同じ論文で以下の事を示した．

定理 3.2　$f \in WF$ は実数値関数とすると,

$$\Delta[f]\Delta^+[\widehat{f}] > \frac{1}{2}\left|1 - 2c^+[\widehat{f}]\frac{|\widehat{f}(0)|}{\|\widehat{f}\|^2}\right|. \tag{3.4}$$

特に, $\widehat{f}(0) = 0$ とすると,

$$\Delta[f]\Delta^+[\widehat{f}] > \frac{1}{2}. \tag{3.5}$$

言い換えると, すべての $m \in \boldsymbol{R}$, $\mu \in \boldsymbol{R}$ に対して

$$\Delta_m[f]\Delta^+_\mu[\widehat{f}] > \frac{1}{2}$$

が成り立つ.

ここで, = が成り立つことはないことに注意していただきたい. すでに述べたように $f \in WF$ なら $\widehat{f}$ は連続関数なので, $\widehat{f}(0)$ の値は意味を持つ.

$\widehat{f}(0) \fallingdotseq 0$ を満たさない f に対して, (3.4) の左辺の下限が正かどうかが大きな問題だが, Hilbert-Rothe[HiRo71] は以下の結果を述べている（表現は全く異なる）.

定理 3.3

$$c_0 := \inf_{f \in WF,\ 実数値} \Delta[f]\Delta^+[\widehat{f}] \tag{3.6}$$

とすると,

$$c_0 > 0. \tag{3.7}$$

この c_0 の値は, $[0, \infty)$ 上の2階線形常微分方程式の境界値問題

$$y'' = \lambda x(x-2)y, \qquad y'(0) = 0,\ y(\infty) = 0 \tag{3.8}$$

の最小固有値を $\lambda_0 (\fallingdotseq 0.3482)$ とするとき, $c_0 = \dfrac{\sqrt{\lambda_0}}{2} (\fallingdotseq 0.2951)$ で与えられ, 下限を与える f はその固有関数で与えられる.

しかし, § 1 で述べたように, この論文の証明は理解できない. (c_0 を実現する f があるとしたらどういう関数かという議論は問題ないが, 最小値が存在することの証明は理解できない.)

3.3　実数値でない場合への拡張

上の定義や定理を実数値と限らない場合に拡張したい. 上では, $|\widehat{f}(\xi)|$ が偶関数であることを活かして $\xi \geq 0$ のみを考えたが, ξ の正負を “統合” するのである.

まず c^+, Δ^+ の定義を拡張する.

定義 3.4 関数 $f \in L^2(\boldsymbol{R})$ が $\xi\widehat{f} \in L^2(\boldsymbol{R})$ を満たすとき,

$$c^+[\widehat{f}] := \frac{1}{\|\widehat{f}\|^2}\int_0^\infty \xi\,(|\widehat{f}(\xi)|^2 + |\widehat{f}(-\xi)|^2)\,d\xi \tag{3.9}$$

$$= \frac{1}{\|\widehat{f}\|^2}\int_{\boldsymbol{R}} |\xi|\,|\widehat{f}(\xi)|^2\,d\xi, \tag{3.10}$$

$$\Delta_\mu^+[\widehat{f}] := \sqrt{\frac{1}{\|\widehat{f}\|^2}\int_0^\infty (\xi-\mu)^2(|\widehat{f}(\xi)|^2 + |\widehat{f}(-\xi)|^2)\,d\xi} \tag{3.11}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{\|\widehat{f}\|^2}\int_{\boldsymbol{R}} (|\xi|-\mu)^2|\widehat{f}(\xi)|^2\,d\xi} \qquad (\mu > 0), \tag{3.12}$$

$$\Delta^+[\widehat{f}] := \Delta^+_{c^+[\widehat{f}]}[\widehat{f}] \tag{3.13}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{\|\widehat{f}\|^2}\int_{\boldsymbol{R}} \xi^2|\widehat{f}(\xi)|^2\,d\xi - c^+[\widehat{f}]^2}. \tag{3.14}$$

と定義する.

$$\|\widehat{f}\|^2 = \int_{\boldsymbol{R}} |\widehat{f}(\xi)|^2\,d\xi = \int_0^\infty (|\widehat{f}(\xi)|^2 + \widehat{f}(-\xi)|^2)\,d\xi \ (= 2\pi\|f\|^2) \tag{3.15}$$

である. $c^+[\widehat{f}]$, $\Delta^+[\widehat{f}]$ は $[0,\infty)$ 上の確率密度関数 $p^+_{\widehat{f}}(\xi) := \dfrac{|\widehat{f}(\xi)|^2 + |\widehat{f}(-\xi)|^2}{\|\widehat{f}\|^2}$ に対する平均と標準偏差である.

特に, $\underline{|\widehat{f}(-\xi)| = |\widehat{f}(\xi)|\text{ の場合}}$ (たとえば f が実数値 ($\widehat{f}(-\xi) = \overline{\widehat{f}(\xi)}$) の場合) には, 前節の定義と一致する.

例 3.5 $w(t) = e^{-t^2/(2\sigma^2)}e^{i\xi_0 t}$ ($\xi_0 \in \boldsymbol{R}$) とすると, $\|w\|^2 = \sqrt{\pi}\sigma$, $c[w] = 0$, $\Delta[w] = \dfrac{\sigma}{\sqrt{2}}$. $\widehat{w}(\xi) = \sqrt{2\pi}\sigma e^{-\sigma^2(\xi-\xi_0)^2/2}$ (図 3), $\|\widehat{w}\|^2 = 2\pi^{3/2}\sigma$, $c[\widehat{w}] = \xi_0$,

$$c^+[\widehat{w}] = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sigma}\left[\sqrt{\pi}\sigma\xi_0\mathrm{Erf}(\sigma\xi_0) + e^{-\sigma^2\xi_0^2}\right] = \xi_0\mathrm{Erf}(\sigma\xi_0) + \frac{1}{\sqrt{\pi}\sigma}e^{-\sigma^2\xi_0^2} \tag{3.16}$$

$$= |\xi_0| - |\xi_0|\left\{1 - \mathrm{Erf}(\sigma|\xi_0|) - \frac{1}{\sqrt{\pi}\sigma|\xi_0|}e^{-\sigma^2\xi_0^2}\right\}. \tag{3.17}$$

ここで,

$$\mathrm{Erf}(z) := \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-t^2}\,dt. \tag{3.18}$$

$\sigma c[\widehat{w}](= p)$ や $\sigma c^+[\widehat{w}]$ は $p = \sigma\xi_0$ にのみ依るので, p を横軸にしてグラフにすると, 図 4 になる. ($p = 0$ で $\sigma c^+[\widehat{w}] = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \fallingdotseq 0.5641896$.)

また,

$$\Delta[\widehat{w}] = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma}, \tag{3.19}$$

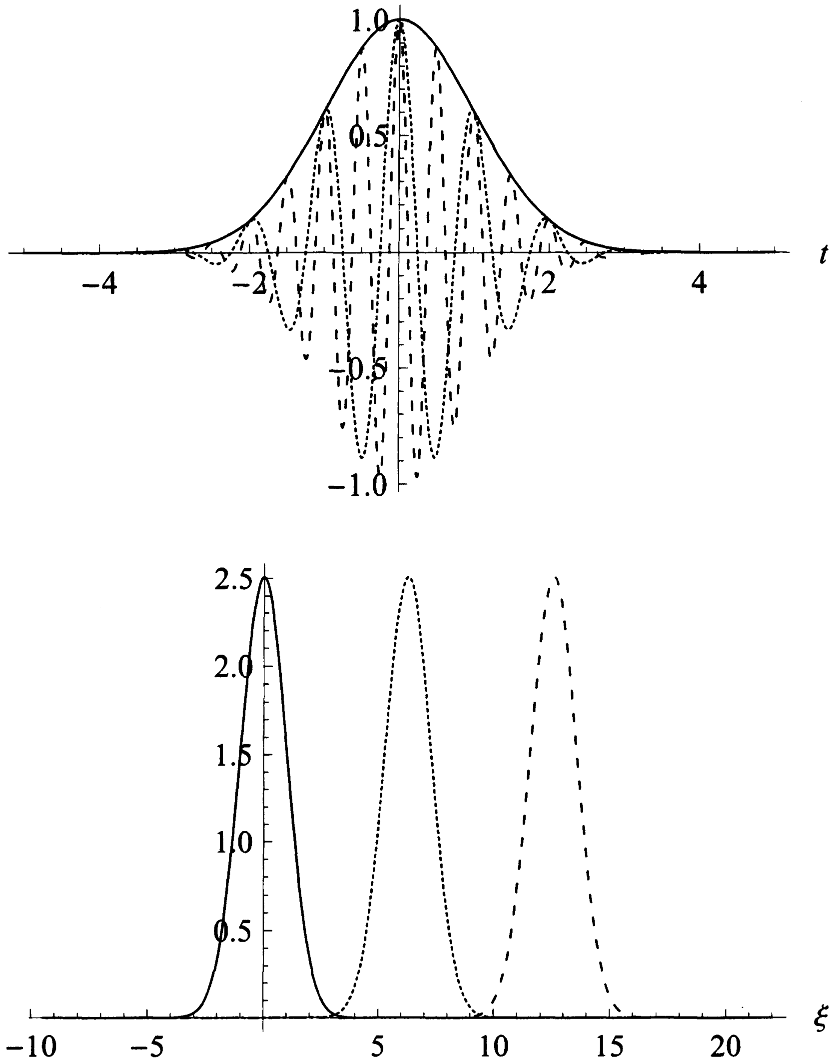

図 3: $w(t) = e^{-t^2/2}e^{i\xi_0 t}$ に対する $\mathrm{Re}\, w(t)$ と $\widehat{w}(\xi)$ ($\xi_0 = 0$(実線), 2π(点線), 4π(破線))

$$\Delta^+[\widehat{w}] = \sqrt{\xi_0^2 + \frac{1}{2\sigma^2} - c^+[\widehat{w}]^2} \tag{3.20}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\sqrt{2\pi\sigma^2\xi_0^2 + \pi - 2\{e^{-\sigma^2\xi_0^2} + \sqrt{\pi}\sigma\xi_0\mathrm{Erf}(\sigma\xi_0)\}^2} \tag{3.21}$$

$$= \frac{\sqrt{2\pi\sigma^2\xi_0^2 - 2\pi\sigma^2\xi_0^2\mathrm{Erf}(\sigma\xi_0)^2 - 4\sqrt{\pi}e^{-\sigma^2\xi_0^2}\sigma\xi_0\mathrm{Erf}(\sigma\xi_0) - 2e^{-2\sigma^2\xi_0^2} + \pi}}{\sqrt{2\pi}\sigma} \tag{3.22}$$

となる．$\sigma\Delta^+[\widehat{w}]$ で $\sigma\xi_0 = p$ として p についてグラフ化すると，図 5 となる．($p = 0$ で $\sigma\Delta^+[\widehat{w}] = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 - \dfrac{2}{\pi}} \fallingdotseq 0.42625.$)

あとで詳しく述べるが，常に $\Delta^+[\widehat{f}] \leq \Delta[\widehat{f}]$ である．

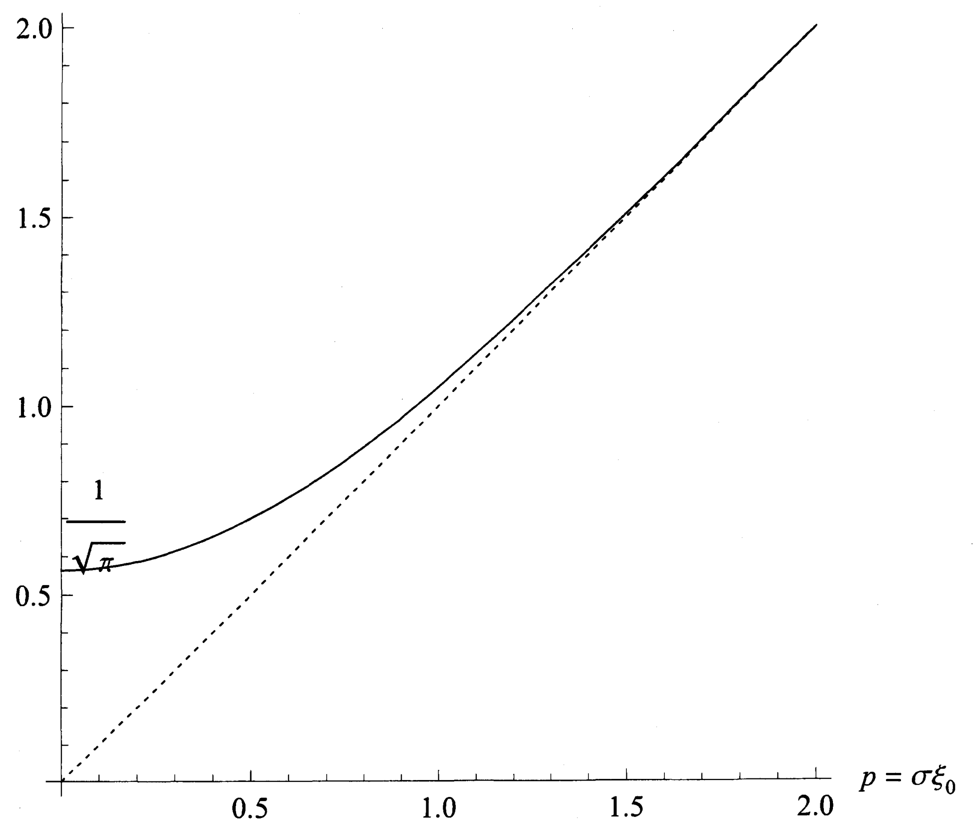

図 4: $w(t) = e^{-t^2/(2\sigma^2)}e^{i\xi_0 t}$ のときの $\sigma c[\widehat{w}] = p$ (点線) と $\sigma c^+[\widehat{w}]$ (実線) (横軸は $p = \sigma\xi_0$)

Kay-Silberman や Hilberg-Rothe の結果は，以下のようにそのまま実数値でない場合にも拡張できる．

定理 3.6 $f \in WF$ なら，実数値でなくても以下が成り立つ．

(1)

$$\Delta[f]\,\Delta^+[\widehat{f}] > \frac{1}{2}\left|1 - 2c^+[\widehat{f}]\frac{|\widehat{f}(0)|}{\|\widehat{f}\|^2}\right|. \tag{3.23}$$

特に，$\widehat{f}(0) = 0$ なら

$$\Delta[f]\,\Delta^+[\widehat{f}] > \frac{1}{2}. \tag{3.24}$$

また，$\frac{1}{2}$ にいくらでも近い左辺の値を持つ $\widehat{f}(0) = 0$ なる実数値の $f \in WF$ がある．

(2)

$$\Delta[f]\,\Delta^+[\widehat{f}] \geq c_0. \tag{3.25}$$

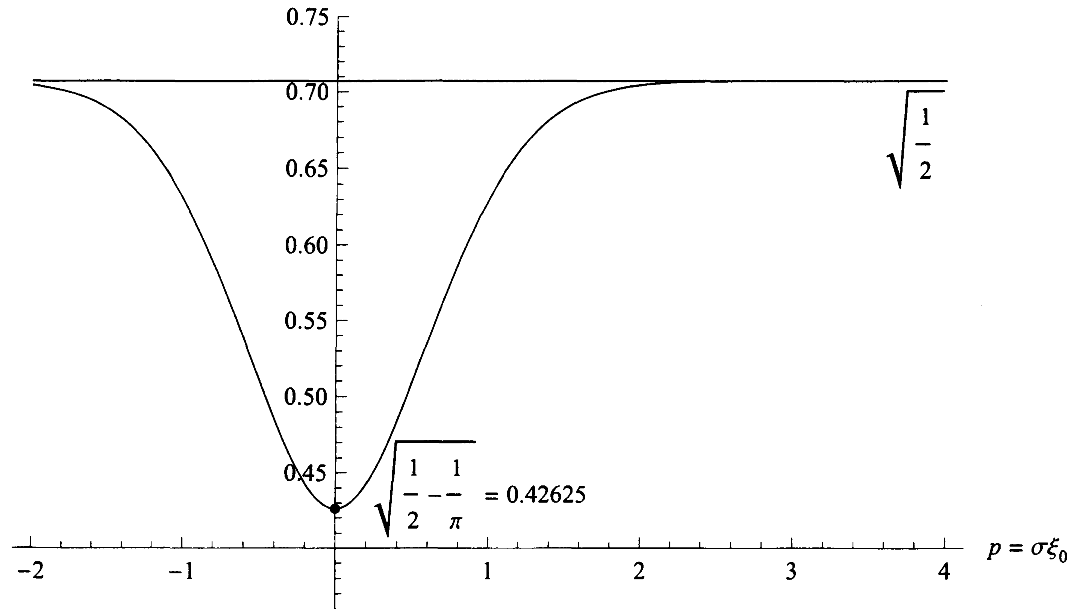

図 5: $w(t) = e^{-t^2/(2\sigma^2)}e^{i\xi_0 t}$ のときの $\sigma\Delta^+[\widehat{w}]$(と $\sigma\Delta[\widehat{w}] = \frac{1}{\sqrt{2}}$) (横軸は $p = \sigma\xi_0$)

(この結果には HR の結果は使わなくて良い．もし HR の結果が正しくなく，$c_0 = 0$ なら，この (2) は trivial な結果である.)

3.4 c^+, Δ^+ の基本性質

c^+, Δ^+ の基本性質を述べておこう. (後節の理解には必ずしも必要ではないので，飛ばしてもかまわないが，(1) と (3.28) は重要なので，見ておいていただきたい.)

命題 3.7 (1) $c^+[\widehat{f}] \geq |c[\widehat{f}]|$. = が成立するのは

$$\text{(C1)}: \quad \operatorname{supp} \widehat{f} \subset [0, \infty) \ \text{または} \ \operatorname{supp} \widehat{f} \subset (-\infty, 0]$$

のとき.

(2) 任意の $\mu_1, \mu_2 \in \boldsymbol{R}$ に対して

$$\Delta^+_{\mu_1}[\widehat{f}]^2 = \Delta_{\mu_2}[\widehat{f}]^2 + (\mu_1 - c^+[\widehat{f}])^2 - (\mu_2 - c[\widehat{f}])^2 - c^+[\widehat{f}]^2 + c[\widehat{f}]^2. \tag{3.26}$$

特に,

$$\Delta^+[\widehat{f}]^2 = \Delta_0[\widehat{f}] - c^+[\widehat{f}]^2 = \Delta[\widehat{f}]^2 - c^+[\widehat{f}]^2 + c[\widehat{f}]^2 \leq \Delta[\widehat{f}]^2. \tag{3.27}$$

言い換えると，

$$\Delta^+[\widehat{f}]^2 + c^+[\widehat{f}]^2 = \Delta[\widehat{f}]^2 + c[\widehat{f}]^2 \left(= \Delta_0[\widehat{f}]^2 = \Delta_0^+[\widehat{f}]^2\right). \tag{3.28}$$

f が実数値なら $c[\widehat{f}] = 0$ である．また，(3.26) で，$\mu_1 = \mu$, $\mu_2 = c[\widehat{f}]$ とすると，

$$\Delta_\mu^+[\widehat{f}]^2 = \Delta^+[\widehat{f}]^2 + (\mu - c^+[\widehat{f}])^2 \tag{3.29}$$

なので，$\mu = c^+[\widehat{f}]$ は $\Delta_\mu^+[\widehat{f}]$ を最小とする μ である．($\mu = c[\widehat{f}]$ は $\Delta_\mu[\widehat{f}]$ を最小とする μ であった．)

(3) $c^+[\widehat{T_b f}] = c^+[\widehat{f}], \quad c^+[\widehat{D_a f}] = \dfrac{1}{a} c^+[\widehat{f}],$

$$\left| c^+[\widehat{f}] - |\xi_0| \right| \leq c^+[\widehat{M_{\xi_0} f}] \leq c^+[\widehat{f}] + |\xi_0|. \tag{3.30}$$

$\xi_0 = 0$ のときは両方の等号が成立する．$\xi_0 \fallingdotseq 0$ の場合の等号は，右辺の $=$ は

(C2): $(\xi_0 > 0 \text{ and } \operatorname{supp} \widehat{f} \subset [0, \infty))$ または $(\xi_0 < 0 \text{ and } \operatorname{supp} \widehat{f} \subset (-\infty, 0])$

のとき，左辺の $=$ は

(C3): $(\xi_0 > 0 \text{ and } \operatorname{supp} \widehat{f} \subset (-\infty, -\xi_0])$ または $(\xi_0 > 0 \text{ and } \operatorname{supp} \widehat{f} \subset [-\xi_0, 0])$ または $(\xi_0 < 0 \text{ and } \operatorname{supp} \widehat{f} \subset [|\xi_0|, \infty))$ または $(\xi_0 < 0 \text{ and } \operatorname{supp} \widehat{f} \subset [0, |\xi_0|])$

のとき．また，$|c[\widehat{f}] + \xi_0| \leq c^+[\widehat{M_{\xi_0} f}]$ も成立する．$=$ は

(C4): $\operatorname{supp} \widehat{f} \subset [-\xi_0, \infty)$ または $\operatorname{supp} \widehat{f} \subset (-\infty, -\xi_0]$

のとき．

(4) $\Delta^+[\widehat{T_b f}] = \Delta^+[\widehat{f}], \quad \Delta^+[\widehat{D_a f}] = \dfrac{1}{a} \Delta^+[\widehat{f}],$

$$\Delta^+[\widehat{f}]^2 - 2(|\xi_0| c^+[\widehat{f}] - \xi_0 c[\widehat{f}]) \leq \Delta^+[\widehat{M_{\xi_0} f}]^2 \leq \Delta^+[\widehat{f}]^2 + 2(|\xi_0| c^+[\widehat{f}] + \xi_0 c[\widehat{f}]) \tag{3.31}$$

左辺の $=$ は $c^+[\widehat{M_{\xi_0} f}] = c^+[\widehat{f}] + |\xi_0|$ のとき，i.e. (C2) のとき，右辺の $=$ は $c^+[\widehat{M_{\xi_0} f}] = \left| c^+[\widehat{f}] - |\xi_0| \right|$ のとき，i.e. (C3) のとき．

また，$\Delta^+[\widehat{M_{\xi_0} f}]^2 \leq \Delta^+[\widehat{f}]^2 + (c^+[\widehat{f}]^2 - c[\widehat{f}]^2) = \Delta[\widehat{f}]^2$ も成立する．$=$ は (C4) のとき．($\Delta^+[\widehat{M_{\xi_0} f}]^2 \leq \Delta[\widehat{f}]^2$ は $\Delta^+[\widehat{M_{\xi_0} f}]^2 \leq \Delta[\widehat{M_{\xi_0} f}]^2 = \Delta[\widehat{f}]^2$ からも明らか．)

4　連続ウェーブレット変換に対するUP 1 (b と ξ)

我々の目的は，連続ウェーブレット変換のスケールパラメータ a を ξ の代わりに考えることであるが，その前に t と b に関する不確定性原理 (UP) について述べておく．まずは，連続ウェーブレット変換について述べる．

4.1 連続ウェーブレット変換

定義 4.1 $\psi \in L^2(\boldsymbol{R})$ とする．

(1) $f \in L^2(\boldsymbol{R})$ に対して

$$(W_\psi f)(b,a) := \langle f, T_b D_a \psi \rangle = \int_{\boldsymbol{R}} f(t) \frac{1}{\sqrt{a}} \overline{\psi\Big(\frac{t-b}{a}\Big)}\, dt, \qquad (b,a) \in \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}_+ \tag{4.1}$$

を ψ に関する f の連続ウェーブレット変換と呼ぶ．$W_\psi f$ は (b,a) の連続関数である．

(2) $\xi \fallingdotseq 0$ に対して，$C_\psi(\xi) := \displaystyle\int_0^\infty \frac{|\widehat{\psi}(a\xi)|^2}{a}\, da = \begin{cases} C_\psi(1) & (\xi > 0) \\ C_\psi(-1) & (\xi < 0) \end{cases}$ とおく．∞ を許せば常に意味があり，0 次正斉次関数である．すなわち，$C_\psi(r\xi) = C_\psi(\xi)$ $(r > 0)$ をみたす．

定理 4.2 $\psi \in L^2(\boldsymbol{R}), \psi \fallingdotseq 0$ が，次の条件 (Admissibility Condition)

$$\begin{aligned} &\text{(Adm.)} \quad C_\psi(\xi) = C_\psi < \infty \text{ が } \xi \fallingdotseq 0 \text{ によらない} \\ &\iff C_\psi(1) = C_\psi(-1) < \infty \\ &\iff \int_0^\infty \frac{|\widehat{\psi}(s)|^2}{s}\, ds = \int_0^\infty \frac{|\widehat{\psi}(-s)|^2}{s}\, ds < \infty \end{aligned}$$

を満たすとすると，任意の $f, g \in L^2(\boldsymbol{R})$ に対して

$$\|W_\psi f\|_{\mathscr{H}}^2 := \int_{\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}_+} |(W_\psi f)(b,a)|^2\, db \frac{da}{a^2} = C_\psi \|f\|^2, \tag{4.2}$$

$$\int_{\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}_+} (W_\psi f)(b,a) \overline{(W_\psi g)(b,a)}\, db \frac{da}{a^2} = C_\psi \langle f, g \rangle \tag{4.3}$$

が成り立つ．

4.2 b と ξ に関する UP

b に関する幅と ξ に関する幅との積については，[Sing99] や [Wil00] でも考えられている．片側幅については結果はないようである．

定義 4.3 $\psi \in L^2(\boldsymbol{R}), \psi \fallingdotseq 0$ とする．$f \in L^2(\boldsymbol{R}), f \fallingdotseq 0$ と $\beta \in \boldsymbol{R}$ に対して

$$\Delta_\beta^{(b)}[W_\psi f] := \sqrt{\int_{\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}_+} |b-\beta|^2 |(W_\psi f)(b,a)|^2\, db \frac{da}{a^2} \Big/ \|W_\psi f\|_{\mathscr{H}}^2} \in [0,\infty] \tag{4.4}$$

と定め，これを b に関する β の周りの $W_\psi f$ の半径と呼ぶ．さらに

$$\int_{\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}_+} |b||(W_\psi f)(b,a)|^2\,db\frac{da}{a^2} < \infty \tag{4.5}$$

を満たすとき

$$c^{(b)}[W_\psi f] := \int_{\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}_+} b|(W_\psi f)(b,a)|^2\,db\frac{da}{a^2}\Big/\|W_\psi f\|^2_{\mathscr{H}} \in \boldsymbol{R}, \tag{4.6}$$

$$\Delta^{(b)}[W_\psi f] := \Delta^{(b)}_{c^{(b)}[W_\psi f]}[W_\psi f] \in [0,\infty] \tag{4.7}$$

と定め，それぞれ b に関する $W_\psi f$ の中心，b に関する $W_\psi f$ の半径と呼ぶ．$\Delta^{(b)}_0[W_\psi f] < \infty$ のときには，$\beta = c^{(b)}[W_\psi f]$ は $\Delta^{(b)}_\beta[W_\psi f]$ が最小となる β である．

定理 4.4 $\psi \in L^2(\boldsymbol{R})$ が (Adm.) を満たすとすると，任意の $f \in L^2(\boldsymbol{R})$, $f \fallingdotseq 0$ に対して，

$$\Delta^{(b)}_\beta[W_\psi f]\,\Delta_\mu[\widehat{f}] > \frac{1}{2} \tag{4.8}$$

が任意の $\beta,\mu \in \boldsymbol{R}$ について成立する．

片側幅で考えても，下限は変わらない．

定理 4.5 $\psi \in L^2(\boldsymbol{R}) \cap L^1(\boldsymbol{R})$ が (Adm.) を満たすとすると，任意の $f \in L^2(\boldsymbol{R})$, $f \fallingdotseq 0$ に対して，

$$\Delta^{(b)}_\beta[W_\psi f]\,\Delta^+_\mu[\widehat{f}] > \frac{1}{2} \tag{4.9}$$

が任意の $\beta,\mu \in \boldsymbol{R}$ について成立する．

この結果は，HR の結果を使わずに示せる．上の 2 つの定理における ψ に対する条件の微妙な違いは，今の時点での Technical な問題 で，後者も $\psi \in L^2(\boldsymbol{R})$ だけで成立すると思われる．

5 連続ウェーブレット変換に対するUP 2 (t と a)

メインの目的である t と a に関する不確定性原理を述べる．

5.1 単純に考えると

単純に考えると a に関する幅（半径）は

$$\sqrt{\int_{\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}_+} |a-\alpha|^2 |(W_\psi f)(b,a)|^2\, db \frac{da}{a^2} \Big/ \|W_\psi f\|^2_{\mathscr{H}}} \tag{5.1}$$

と考えるのが自然に思えるが，実は次の定理が成り立つ．

定理 5.1 $\psi \in L^2(\boldsymbol{R})$, $\psi \fallingdotseq\!\!\!\!/\ 0$, $\int_0^\infty s|\widehat{\psi}(\pm s)|^2\, ds < \infty$ とする（実際に使われる多くの ψ は満たしている）．このとき，関数列 $f_j \in \mathscr{S}(\boldsymbol{R})$, $f_j \fallingdotseq\!\!\!\!/\ 0$ で

$$\frac{\displaystyle\int_{\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}_+} |a|^2 |(W_\psi f_j)(b,a)|^2\, db \frac{da}{a^2}}{\|W_\psi f_j\|^2_{\mathscr{H}}} \times \frac{\displaystyle\int_{\boldsymbol{R}} |t|^2 |f_j(t)|^2\, dt}{\|f_j\|^2} \to 0 \tag{5.2}$$

となるものが存在する．ここで，$\mathscr{S}(\boldsymbol{R})$ は急減少 C^∞ 関数の空間（Schwartz クラス）である．

これは，半径（幅）を (5.1) を使って測ると，不確定性原理は成り立たないことを意味している．

5.2 Wilczok の結果

Wilczok[Wil00] はウェーブレット変換を少し修正した次の変換を考え，以下の形の不確定性原理を与えた．

定義 5.2

$$(\widetilde{W}_\psi f)(a,b) := \int_{\boldsymbol{R}} f(t)\overline{\psi(at-b)}\, dt \quad (a,b) \in \boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{R}.$$

定理 5.3 $\psi \in L^2(\boldsymbol{R})$ が $\operatorname{supp}\widehat{\psi} \subset [0,\infty)$ を満たし，$C_\psi(1) = \int_0^\infty \frac{|\widehat{\psi}(a)|^2}{a}\, da < \infty$, $M := \int_0^\infty \frac{|\widehat{\psi}(a)|^2}{a^3}\, da < \infty$, を満たすとすると，$f \in L^2(\boldsymbol{R})$, $f \fallingdotseq\!\!\!\!/\ 0$ が実数値関数[1]のとき，

$$\frac{\displaystyle\int_{\boldsymbol{R}} t^2 |f(t)|^2\, dt}{\displaystyle\int_{\boldsymbol{R}} |f(t)|^2\, dt} \times \frac{\displaystyle\int_{\boldsymbol{R}_+\times\boldsymbol{R}} a^2 |(\widetilde{W}_\psi f)(a,b)|^2\, dadb}{\displaystyle\int_{\boldsymbol{R}_+\times\boldsymbol{R}} |(\widetilde{W}_\psi f)(a,b)|^2\, dadb} \geq \frac{1}{4}\frac{M}{C_\psi(1)}$$

が成り立つ．

[1] f が実数値関数であるとは，[Wil00] の論文には書いていないが，証明では少なくとも $|\widehat{f}(-\xi)| = |\widehat{f}(\xi)|$ は使っている．

通常のウェーブレット変換に対する結果として述べず，変換自体を修正しているところはやや不満であるが，これは本質的なことではない．本質的に不満なのは，

(i) 中心が考慮されていない．

(ii) $\operatorname{supp}\widehat{\psi} \subset [0,\infty)$ が仮定されている．

(iii) （実は）f を実数値に限っている．

という点であろう．特に (i) は極めて本質的であり，t に関しては中心を 0 としても一般性を失わないが，a については中心が 0 の場合に帰着することができないので，これでは不確定性原理としては不十分であろう，

5.3 主結果

我々の主結果を述べる[2]．

定義 5.4 (1)

$$\Delta_\alpha^{(a)}[W_\psi f] := \sqrt{\int_{\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}_+} \left|\frac{1}{a}-\frac{1}{\alpha}\right|^2 |(W_\psi f)(b,a)|^2\, db\frac{da}{a^2} \Big/ \|W_\psi f\|_{\mathscr{H}}^2} \in [0,\infty] \tag{5.3}$$

と定め，a に関する α の周りの $W_\psi f$ の半径と呼ぶ．さらに $\displaystyle\int_{\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}_+} \frac{1}{a}|(W_\psi f)(b,a)|^2\, db\frac{da}{a^2} < \infty$ のとき

$$c^{(a)}[W_\psi f] := \left(\int_{\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}_+} \frac{1}{a}|(W_\psi f)(b,a)|^2\, db\frac{da}{a^2} \Big/ \|W_\psi f\|_{\mathscr{H}}^2\right)^{-1}, \tag{5.4}$$

$$\Delta^{(a)}[W_\psi f] := \Delta^{(a)}_{c^{(a)}[W_\psi f]}[W_\psi f] \tag{5.5}$$

と定め，それぞれ a に関する $W_\psi f$ の中心，a に関する $W_\psi f$ の半径と呼ぶ．$\Delta_0^{(a)}[W_\psi f] < \infty$ のとき，$\alpha = c^{(a)}[W_\psi f]$ は $\Delta_\alpha^{(a)}[W_\psi f]$ が最小となる α である．これは，a ではなく，$\dfrac{1}{a}$ で中心や幅を考えているということである．

(2) $p \in \boldsymbol{R}$ とし，$\xi \fallingdotseq 0$ に対して，

$$C_{\psi,p}(\xi) := \int_0^\infty \frac{|\widehat{\psi}(a\xi)|^2}{a^p}\,da \times |\xi|^{-(p-1)} = \begin{cases} C_{\psi,p}(1) & (\xi > 0), \\ C_{\psi,p}(-1) & (\xi < 0) \end{cases} \tag{5.6}$$

とおく．$C_\psi(\xi)$ 同様，∞ を許せば常に意味があり，0 次正斉次関数である．また，$C_\psi(\xi) = C_{\psi,1}(\xi)$ であり，定理 5.3 の M は $M = C_{\psi,3}(1)$ である．

[2]序で述べたとおり，実は Wilczok の結果を知らずにこれらの結果を得ていた．

我々の主結果を述べる．c_0 は (3.6) で定義された非負定数で，HR の結果が正しければ，$c_0 > 0$ であり，具体的に与えられている．次の定理は，HR の結果とは独立に正しい形に述べてある．

定理 5.5 $f \in L^2(\boldsymbol{R})$, $f \fallingdotseq 0$ とし，$\psi \in L^2(\boldsymbol{R})$, $\psi \fallingdotseq 0$ とする．

(1) $|\widehat{\psi}(-\xi)| = |\widehat{\psi}(\xi)|$ とする．このとき，$C_{\psi,p}(1) < \infty$ なら $C_{\psi,p} := C_{\psi,p}(\xi)$ は ξ によらない定数である．$C_{\psi,1} < \infty$, $C_{\psi,3} < \infty$ とすると，

$$\Delta_m[f]\,\Delta_\alpha^{(a)}[W_\psi f] > \begin{cases} c_0\sqrt{\dfrac{C_{\psi,3}}{C_{\psi,1}}} & \text{(general)}\ , \\ \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{C_{\psi,3}}{C_{\psi,1}}} & \text{if } \widehat{f}(0) = 0 \end{cases} \tag{5.7}$$

が任意の $m \in \boldsymbol{R}$, $\alpha \in \boldsymbol{R}_+$ に対して成立する．

(2) $\operatorname{supp}\widehat{\psi} \subset [0,\infty)$ とし，$C_{\psi,1}(1) < \infty$, $C_{\psi,3}(1) < \infty$, $|\widehat{f}(-\xi)| = |\widehat{f}(\xi)|$ とすると，

$$\Delta_m[f]\,\Delta_\alpha^{(a)}[W_\psi f] > \begin{cases} c_0\sqrt{\dfrac{C_{\psi,3}(1)}{C_{\psi,1}(1)}} & \text{(general)}\ , \\ \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{C_{\psi,3}(1)}{C_{\psi,1}(1)}} & \text{if } \widehat{f}(0) = 0 \end{cases} \tag{5.8}$$

が任意の $m \in \boldsymbol{R}$, $\alpha \in \boldsymbol{R}_+$ に対して成立する．

(3) $\operatorname{supp}\widehat{\psi} \subset [0,\infty)$ とし，$C_{\psi,1}(1) < \infty$, $C_{\psi,3}(1) < \infty$, $\operatorname{supp}\widehat{f} \subset [0,\infty)$ とすると，

$$\Delta_m[f]\,\Delta_\alpha^{(a)}[W_\psi f] > \frac{1}{2}\sqrt{\frac{C_{\psi,3}(1)}{C_{\psi,1}(1)}}, \tag{5.9}$$

が任意の $m \in \boldsymbol{R}$, $\alpha \in \boldsymbol{R}_+$ に対して成立する．

6 多次元の試み

最後に，多次元への拡張の試みについて述べておく．残念ながら，不満足な結果しか得られていない．

6.1 通常のＵＰ

定義 6.1

$$WF_n = \{\, f \in L^2(\boldsymbol{R}^n) \mid |x|f, |\xi|\widehat{f} \in L^2(\boldsymbol{R}^n) \,\} \tag{6.1}$$

$$= \{\, f \in L^2(\boldsymbol{R}^n) \mid x_j f, \xi_j \widehat{f} \in L^2(\boldsymbol{R}^n)\ (j = 1, \ldots, n) \,\} \tag{6.2}$$

とおく．以下，$f \in W\!F_n$ とする．

$$c_j = c_j[f] := \frac{1}{\|f\|^2} \int_{\boldsymbol{R}^n} x_j |f(x)|^2 \, dx \quad (1 \le j \le n), \tag{6.3}$$

$$c = c[f] := (c_j)_{j=1}^n = (c_j[f])_{j=1}^n, \tag{6.4}$$

$m \in \boldsymbol{R}^n$ に対して

$$\Delta_{m,j} = \Delta_{m,j}[f] := \sqrt{\frac{1}{\|f\|^2} \int_{\boldsymbol{R}^n} |x_j - m_j|^2 |f(x)|^2 \, dx} \tag{6.5}$$

$$\Delta_j = \Delta_j[f] := \Delta_{c[f],j}[f] \tag{6.6}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{\|f\|^2} \int_{\boldsymbol{R}^n} |x_j|^2 |f(x)|^2 \, dx - c_j[f]^2} \quad (1 \le j \le n), \tag{6.7}$$

$$\Delta_m = \Delta_m[f] := (\Delta_{m,j}[f])_{j=1}^n, \tag{6.8}$$

$$\Delta = \Delta[f] := (\Delta_j[f])_{j=1}^n, \tag{6.9}$$

$$|\Delta| = |\Delta[f]| := \sqrt{\sum_{j=1}^n \Delta_j[f]^2} \tag{6.10}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{\|f\|^2} \int_{\boldsymbol{R}^n} |x - c[f]|^2 |f(x)|^2 \, dx} \tag{6.11}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{\|f\|^2} \int_{\boldsymbol{R}^n} |x|^2 |f(x)|^2 \, dx - \left|c[f]\right|^2} \tag{6.12}$$

n 次元の通常の不確定性原理は以下のようになる．

定理 6.2

$$\Delta_j[w]\Delta_j[\widehat{w}] \ge \frac{1}{2} \quad (1 \le j \le n), \qquad |\Delta[w]|\,|\Delta[\widehat{w}]| \ge \frac{n}{2}.$$

6.2 連続ウェーブレット変換に関するＵＰ

多次元の連続ウェーブレット変換は，いくつかの定義の仕方がありうるが，我々は以下のもっとも単純（自然）な定義を考えたい．

T_b は (1.1) とまったく同様であり，D_a は $(D_a f)(x) := \dfrac{1}{a^{n/2}} f\Big(\dfrac{x}{a}\Big)$ と定義する．やはりユニタリ作用素である．

定義 6.3　$\psi \in L^2(\boldsymbol{R}^n)$ とする.

(1) $f \in L^2(\boldsymbol{R}^n)$ に対して

$$(W_\psi f)(b,a) := \langle f, T_b D_a \psi \rangle = \int_{\boldsymbol{R}^n} f(t) \frac{1}{a^{n/2}} \overline{\psi\Big(\frac{t-b}{a}\Big)}\, dt \quad b \in \boldsymbol{R}^n,\ a \in \boldsymbol{R}_+ \tag{6.13}$$

を ψ に関する f の連続ウェーブレット変換と呼ぶ. $W_\psi f$ は (b,a) の連続関数である.

(2) $\xi \fallingdotseq 0$ に対して, $C_\psi(\xi) := \displaystyle\int_0^\infty \frac{|\widehat{\psi}(a\xi)|^2}{a}\, da$ とおく. ∞ を許せば常に意味があり, 0 次正斉次関数である. すなわち, $C_\psi(r\xi) = C_\psi(\xi)$ $(r > 0)$ をみたす.

定理 6.4　$\psi \in L^2(\boldsymbol{R}^n)$, $\psi \fallingdotseq 0$ が, 次の条件 (Admissibility Condition)

$$\text{(Adm.)} \quad C_\psi(\xi) = C_\psi < \infty \text{ が } \xi \fallingdotseq 0 \text{ によらない}$$

を満たすとすると, 任意の $f, g \in L^2(\boldsymbol{R}^n)$ に対して

$$\|W_\psi f\|^2_{\mathscr{H}_n} := \int_{\boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}_+} |(W_\psi f)(b,a)|^2\, db \frac{da}{a^{n+1}} = C_\psi \|f\|^2, \tag{6.14}$$

$$\int_{\boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}_+} (W_\psi f)(b,a) \overline{(W_\psi g)(b,a)}\, db \frac{da}{a^{n+1}} = C_\psi \langle f, g \rangle \tag{6.15}$$

が成り立つ.

連続ウェーブレット変換に対する不確定性原理は, 残念ながら, 中心を考慮しない形の結果しかまだ得られていない.

定理 6.5　$\psi \in L^2(\boldsymbol{R}^n)$, $\psi \fallingdotseq 0$ は (Adm.) を満たすとする. さらに, $\xi \fallingdotseq 0$ に対して $\displaystyle\int_0^\infty |\widehat{\psi}(a\xi)|^2 \frac{da}{a^3} < \infty$ とすると, $f \in L^2(\boldsymbol{R}^n)$, $f \fallingdotseq 0$ に対して

$$|\Delta_m[f]|^2 \times \frac{\displaystyle\int_{\boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}_+} \frac{1}{a^2} |(W_\psi f)(b,a)|^2\, db \frac{da}{a^{n+1}}}{\displaystyle\int_{\boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}_+} |(W_\psi f)(b,a)|^2\, db \frac{da}{a^{n+1}}}$$
$$\geq \Big(\frac{n}{2}\Big)^2 \frac{1}{C_\psi} \inf_{\xi \in \boldsymbol{R}^n \setminus \{0\}} \left\{ \frac{1}{|\xi|^2} \int_0^\infty |\widehat{\psi}(a\xi)|^2 \frac{da}{a^3} \right\} \tag{6.16}$$

が任意の $m \in \boldsymbol{R}^n$ に対して成立する.

ぜひ, 左辺の分子を (5.3) のように

$$\int_{\boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}_+} \left| \frac{1}{a} - \frac{1}{\alpha} \right|^2 |(W_\psi f)(b,a)|^2\, db \frac{da}{a^{n+1}}$$

にしたいところである.

参考文献

[Cohe95] L. Cohen, *Time-frequency analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1995.

[Groc01] Gröchenig, K., *Foundations of time-frequency analysis*, Birkhäuser, 2001.

[HiRo71] Hilbert, W. - Rothe, P.G., The General Uncertainty Relation for Real Signals in Communication Theory, Information and Control, **18**(1971), 103-125.

[KaSi57] Kay, I. - Silverman, R.A., On the Uncertainty Relation for Real Signals, Information and Control, **1**(1957), 64-75.

[Sing99] Singer, Peter, Uncertainty Inequalities for the Continuous Wavelet Transform, IEEE Trans. Information Theory, **45**:3(1999), 1039-1042.

[Wil00] Elke Wilczok, New Uncertainty Principles for the Continuous Gabor Transform and the Continuous Wavelet Transform, Documenta Mathematica, **5**(2000), 201-226.