数理解析研究所講究録
第1811巻 2012年 116-122

有限群の表現論におけるある予想に対する部分結果

千葉大学 大学院理学研究科
越谷 重夫 (こしたに)

§0. 序

今回の話は, 有限群のモジュラー表現論における大きな予想の一つであるブルエの可換不足群予想 (Broué's Abelian Defect Group Conjecture) の部分的な, ささやかな解答を与えた, という内容である. この話すべては Jürgen Müller, Felix Noeske (共にドイツ・アーヘン工科大学) との共同研究である [6].

§1. 記号, 定義など

以下簡単のために, ここでは必要最小限の記号定義を与えるに留める. 不明な言葉等は, 日本語で読める唯一の教科書　永尾 汎–津島行男 共著の [7] を参照して欲しい.

以下, p は素数, k で標数 p の代数的閉体を意味する. G と書けば常に有限群である. すると群代数 kG が考えられる訳だが, まず ${}_{kG}kG_{kG}$ の直既約 (indecomposable) 分解を考える. ちなみに, 非可換環論の人がよく使う記号として, 二つの環 A, B に対して, ${}_AM_B$, ${}_AM$, M_B と書いたりするが, これは順に M が (A, B) 両側加群, 左 A 加群, 右 B 加群　であることを意味する. また何も断らなかったら, 加群とは**有限生成右加群**を意味するものと決めておく.

$$ {}_{kG}kG_{kG} = \dots \oplus A \oplus \dots \qquad (\text{有限個}) $$

を kG の両側加群としての直既約分解とする．つまり，A は kG の直既約両側イデアル，である．そして，このような分解は一意的である（同型を除いて，などではなく，もう一つの分解があったら，本当に等しいのである）．このような A たちを，群代数 kG の**ブロック代数 (block algebra)** あるいは単に**ブロック** と呼ぶ．するとこのブロック A に対して，非常に重要な A の構造をかなり統制する部分群 P が存在する．つまり (A, A) 両側加群としての自然な全射

$$A \otimes_{kP} A \longrightarrow A, \qquad a \otimes a' \mapsto aa'$$

が分裂全射 (split-epi) になるような (G の) 部分群 P のうちで位数が最小のものを A の**不足群 (defect group)** と呼ぶ．初めに P として G 自身を取れるから，不足群の存在は直ぐ解る．そして実はこれは（本質的には Maschke の定理から）p 部分群になることが解る．また，Sylow の定理と全く同様にして，不足群 P は G 共役を除いて一意的に定まることも解る．この不足群が考えているブロック A にとってどのくらい本質的であるか（重要であるか）は例えば次の状況からもわかる．上の定義から，どんな勝手な直既約 kG 加群 X に対しても，$XA = X$ であれば，ある直既約 kP 加群 Y が存在して，

$$(*) \qquad\qquad X \,\Big|\, Y{\uparrow}^G$$

となっていることがわかる．ここで $X\big|Z$ で X が Z の直和因子 (direct summand) であることを意味する．また，$Y{\uparrow}^G$ は $Y{\uparrow}^G = Y \otimes_{kP} kG$ つまり，Y の G への誘導加群 (induced module) を意味する．つまり，すべての A に属する kG-加群は，必ずある kP 加群を G にまで誘導した加群の直和因子になっている，ということである．このことから解るように，kP 加群が A に属する kG 加群を支配，統制，制御していると言える．

§2. 問題

2.1 問題. A を kG のブロックで不足群 P を持つとする.（そして **§1** で述べたように P が A の表現を統制しているのであるから）「P の構造が与えられたとき, ブロック A についての情報, 性質についてどのくらいのことが解るのだろうか?」というのは, 全く至極まっとうな自然な問題である. そして, 有名な Brauer の第一主定理により A と同じ不足群を持ち Brauer 対応 と呼ばれる（自然な）対応で与えられているブロックが $N_G(P)$ にただ一つ存在する. これを B と呼ぶことにする. したがって, B の不足群は G の正規部分群なので, 上に述べたような B の情報, 性質は非常に詳しくわかっている. したがって, 次なる問題は, 「このよくわかっている B の表現論がどのくらい A の表現論と似ているのだろうか？」である. これは非常に自然な問題だと思う. 実際これは, Brauer の視点に遡（さかのぼ）る. A に属する G の既約 Brauer 指標の個数, のことである. 以上が動機となって, 1988 年頃 M.Broué (ミッシェル・ブルエ) [1] は次の予想を発表した.

2.2 (ブルエの可換不足群予想) [1]. 有限群 G と標数 $p > 0$ の代数的閉体 k に対して, kG のブロック A を考える. A の不足群を P として A のブラウアー対応である $kN_G(P)$ のブロックを B とする. このとき, もしも P が可換群であれば, A と B の有界導来圏 $\mathrm{D}^b(\text{mod-}A)$ と $\mathrm{D}^b(\text{mod-}B)$ とは, 互いに (三角圏として) 導来同値になっているのではないか？ここで, mod-A は有限生成右 A-加群全体からなるアーベル圏のことである.

この予想 **2.2** に対してどのくらいのことが解っているかということをここでは詳しく述べないが, 以下を参照して欲しい [2].

---

[1]ブルエは比較的最近出版された ローラン・シュヴァルツ Laurent Schwartz の自伝「闘いの世紀を生きた数学者・上, 下」シュプリンガー・ジャパン (2006) に沢山登場する. この本自体, 大変面白いので, 是非お薦めしたい.

§3. 主結果

3.1 観察と戦略. この話は以下の観察と共同研究者のひとりであるF.Noeskeによる観察 [8] が出発点（動機）になっている.

ここで A とは 散在型有限単純群 ヒグマン・シムスの群 HS の double cover 2.HS が持つ非主3-ブロックで不足群として位数 9 の基本可換群を持ったただ一つのものである. 一方 $B_0(\mathfrak{A}_8)$ は, 8 次の交代群 $\mathfrak{A}_8$ の主3-ブロックである. $\mathfrak{A}_8$ のシロー3-部分群もやはり位数 9 の基本可換群, つまり $B_0(\mathfrak{A}_8)$ の不足群は A のそれと同じ, というわけである. そこで以下は, これら 2 つのブロック A と $B_0(\mathfrak{A}_8)$ の 3-分解行列を書いたものである. ここで $*$ は複素共役を表す. また初めの 2 列の数字は各通常既約指標の次数を表している. もちろん . は 0 を意味している.

A	$B_0(\mathfrak{A}_8)$					
176	1	1	.	.	.	.
176*	7	.	1	.	.	.
616	14	1	.	1	.	.
616*	20	.	1	1	.	.
56	28	.	.	.	1	.
1000	35	.	.	.	.	1
1792	56	1	1	1	.	1
1232	64	1	.	.	1	1
1232*	70	.	1	.	1	1

これを見てわかるとおり, 指標の次数を無視すれば, この 2 つの分解行列はぴったり一致している. であるからして,「この 2 つのブロックは非常によく似ているのではないか? 特に森田同値なのではないか？」と問うことは, 非常に自然だと思う.

実は, これは筆者が他の共同研究者と行ったブルエの可換不足群予想 **2.2** の部分解決で散在型単純群 ヤンコーの 4 番目の群 J4 [3], 散在型単純

群 原田 (原田-ノートン) の群 HN [4], および散在型単純群 コンウェーの 3番目の群 Co_3 [5] での戦略と本質的に全く同じである. おまけに, $B_0(\mathfrak{A}_8)$ に対してのブルエの可換不足群予想 **2.2** は既に奥山哲郎によってかなり以前に既に証明されている [9, Example 4.3], [10].

実際, 今回の話で我々が実質的に証明したことは以下のことである.

3.2 補題 (越谷-Müller-Noeske) [6]**.** A を 散在型有限単純群 ヒグマン・シムスの群 HS の double cover 2.HS が持つ非主 3-ブロックで不足群として位数 9 の基本可換群を持つただ一つのものとする. また $B_0(\mathfrak{A}_8)$ を, 8次の交代群 $\mathfrak{A}_8$ の主 3-ブロックとする. このときこの 2 つの 3-ブロック A と $B_0(\mathfrak{A}_8)$ は (森田同値よりもさらに強い) Puig(プーチ) 同値になっている.

これと上記に述べた奥山哲郎の結果を合わせると, 以下のような今回の主定理が得られる, という訳である.

3.3 主定理 (越谷-Müller-Noeske) [6]**.** 散在型有限単純群 ヒグマン・シムスの群 HS の double cover 2.HS に対して, ブルエの可換不足群予想 (の強いバージョンつまり splendid 同値の存在) **2.2** が, すべての素数 p に対して成立する.

3.4 補題 3.2 の証明に関するコメント. 上で述べたとおり, 戦略, 作戦, そしてその結果も, 我々が思ったとおりだったのであるが, それでも少なくとも一つの, ささやかな新しい経験 (発見) があった. それは, 実は上記でも述べたヤンコー第 4 の群 J_4 での論文での疑問 [3, Question 6.14] とも大いに関係している. 詳しく言うと, いわゆる Fong-Reynolds (Fong の第一還元) 定理 [7, V 定理 5.10] はもちろん非常に役に立つ素晴らしい定理で筆者も今まで数え切れないほど使ってきた. だが告白すると普通は不変部分群の方でのうまい (森田同値になっている) ブロックの存在, だ

けで満足してしまって, それで事足りてきた (と思っていた). だが, 今回の経験は, この下の方のブロックは幾つか2個以上可能性があるのだが, 「あるブロックを選ぶと最終的に上の群のレベルで Puig 同値 が得られ, 他のブロックを選ぶと, 上の方で欲しかった Puig 同値 は失われ, 単に森田同値のみが得られる」ということを今回の実例 2.HS ではっきり見て取れた, ということである. そして, 今回の場合で言うと, 2.HS は, $\mathfrak{A}_8$ と同型の群を部分群として含んでいるのであるが, その含ませ方 (埋め込みのさせ方) に大いに注意しないとダメである, ということである. 私以外の 2 名の今回の共同研究者たちは数式処理ソフト GAP の本家 アーヘン工科大学出身で, GAP の大変な達人たちである. 彼らにとっては, 「コンピュータ上できちんと具体的に2.HS を構成して, その中で $\mathfrak{A}_8$ を構成する」ということは非常に大事であって, それが出来て初めて, いわゆるグリーン対応 Green correspondent がきっちり計算出来ることになるのである.

§4. 謝辞および付け足し

小田 文仁さんに, 多大な御世話をして頂いた. 心より感謝の意を表したいと思う. 最後に, 自分の宣伝になり恐縮であるが, 以下に今回の話の共同講演者等の写真がある.

http://mathsoc.jp/videos/2010nenkai.html

References

[1] M. Broué, Isométries parfaites, types de blocs, catégories dérivées, Astérisque **181–182** (1990), 61–92.

[2] J. Chuang, J. Rickard, Representations of finite groups and tilting, in: Handbook of Tilting Theory, L.A.Hügel, D. Happel, H. Krause (eds.), London Math. Soc. Lecture Note Series **Vol.332**, pp.359–391.

[3] S. Koshitani, N. Kunugi, K. Waki, Broué's abelian defect group conjecture holds for the Janko simple group J_4, J. Pure Appl. Algebra **212** (2008), 1438–1456.

[4] S. Koshitani, J. Müller, Broué's abelian defect group conjecture holds for the Harada-Norton sporadic simple group HN, J. Algebra **324** (2010), 394–429.

[5] S. Koshitani, J. Müller, F. Noeske, Broué's abelian defect group conjecture holds for the Conway's third group Co_3, Journal of Algebra **348** (2011), 354–380.

[6] S. Koshitani, J. Müller, F. Noeske, Broué's abelian defect group conjecture holds for the double cover of the Higman-Sims sporadic simple group, preprint, 2012.

[7] 永尾 汎-津島 行男, 有限群の表現, 裳華房, 1987.

[8] F. Noeske, ADGC for Sporadic Groups,
http://www.math.rwth-aachen.de/~Felix.Noeske/tabular.pdf

[9] T. Okuyama, Some examples of derived equivalent blocks of finite groups, preprint (1997).

[10] T. Okuyama, Remarks on splendid tilting complexes, in: Representation theory of finite groups and related topics, edited by 越谷重夫, RIMS Kokyuroku **1149**, Proc. Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University, 2000, 53–59.