数理解析研究所講究録
第 1813 巻 2012 年 89-108

ルート系のゼータ関数と多重ゼータ値

立教大学大学院理学研究科　小森 靖　(Yasushi Komori)
Department of Mathematics, Rikkyo University
名古屋大学大学院 多元数理科学研究科　松本 耕二 (Kohji Matsumoto)
Graduate School of Mathematics, Nagoya University
首都大学東京大学院 理工学研究科　津村 博文 (Hirofumi Tsumura)
Department of Mathematics and Information Sciences
Tokyo Metropolitan University

1 概要

この報告では, まずこれまでに筆者達が定義し, 研究をつづけている**ルート系のゼータ関数**の一般化である, **リー群に付随するゼータ関数**を定義し, そのさまざまな性質を考察する. それらの考察のもとで, Euler-Zagier Sum が C_r 型の部分ルート系のゼータ関数の値と見られることを示し, そのことから 多重ゼータ値 (**MZV**) の満たす Zagier 公式など, いくつかの既知の結果, およびその拡張を示す. さらに B_r 型の部分ルート系のゼータ関数の値で, MZV の類似と見られるものを定義し, Zagier 公式の B_r 型類似を示す.

尚, 詳細等に関しては, [14, 15] を参照.

2 ルート系のゼータ関数

Witten は二次元コンパクト多様体 Σ 上の連結半単純コンパクトリー群 G の作用による量子ゲージ理論の研究に際し, 対応するリー群の有限次元既約表現の次元に関するディリクレ級数が分配関数 $Z_\Sigma(\tau)$ に現れることを発見した.

Witten の結果

g を Σ の種数とするとき,

$$Z_\Sigma(\tau) = \sum_\phi \frac{e^{-\tau c_2(\phi)/2}}{(\dim\phi)^{2g-2}}$$

で与えられる. ここで ϕ は G の有限次元既約表現全体をわたり, $c_2(\phi)$ は表現 ϕ の二次 Casimir 作用素の値を表す. とくに

$$Z_\Sigma(0) = \sum_\phi \frac{1}{(\dim\phi)^{2g-2}} = \text{平坦接続のモジュライ空間の体積.}$$

この結果をもとに, Zagier によって, **Witten ゼータ関数** が定式化された.

Witten ゼータ関数　G のリー代数 $\mathfrak{g}$ にたいし,

$$\zeta_W(s;\mathfrak{g}) := \sum_\psi \frac{1}{(\dim\psi)^s},$$

ただし ψ は $\mathfrak{g}$ の有限次元既約表現全体をはしる.

注意: G が単連結の場合は

$$\mathfrak{g}\ \text{の有限次元既約表現全体} = G\ \text{の有限次元既約表現全体}$$

となる.

そこでこの考察を, ルート系の言葉を用いて表現する. r 次元ベクトル実空間 V に内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ が定義されているとき,

$\Delta(\subset V)$ が**ルート系**であるとは, 下記で定義する記号を用いて

(1) $|\Delta| < \infty$ かつ $0 \notin \Delta$.
(2) $\sigma_\alpha\Delta = \Delta$ $(\forall\alpha \in \Delta)$.
(3) $\langle\alpha^\vee, \beta\rangle \in \mathbb{Z}$ $(\forall\alpha, \beta \in \Delta)$.
(4) $\alpha, c\alpha \in \Delta \Longrightarrow c = \pm 1$.

を満たすことをいう. このとき Δ の各元を**ルート**という.

ここで関連する記号を用意する. Δ の元 α に対し

σ_α: α と直交する超平面 H_α に関する折り返し（**鏡映**）
W: **ワイル群** (generated by all σ_α.)

$\alpha^\vee$: α の**コルート** ($:= 2\alpha/\langle\alpha,\alpha\rangle$. $\alpha^{\vee\vee}=\alpha$.)
$\{\alpha_1,\ldots,\alpha_r\}$: **基本ルート**: Δ の基底で, 任意の $\alpha\in\Delta$ が
$c_1\alpha_1+\cdots+c_r\alpha_r$ (all $c_i\geq 0$ or $c_i\leq 0$) の形で書ける
Δ_+: **正ルート** (all roots $\alpha=c_1\alpha_1+\cdots+c_r\alpha_r\in\Delta$ ($\forall c_i\geq 0$))
Δ_-: **負ルート** (all roots $\alpha=c_1\alpha_1+\cdots+c_r\alpha_r\in\Delta$ ($\forall c_i\leq 0$))
Q: **ルート格子** ($:= \bigoplus_{i=1}^r \mathbb{Z}\,\alpha_i$)
P: **ウェイト格子** ($:= \bigoplus_{i=1}^r \mathbb{Z}\,\lambda_i$)
P_+: **支配的ウエイト** ($:= \bigoplus \mathbb{Z}_{\geq 0}\,\lambda_i$, $\{\lambda_1,\ldots,\lambda_r\}$ は $\{\alpha_1^\vee,\ldots,\alpha_r^\vee\}$ の双対基底)
$Q^\vee$: **コルート格子** ($:= \bigoplus_{i=1}^r \mathbb{Z}\,\alpha_i^\vee$)
$P^\vee$: **コウェイト格子** ($:= \bigoplus_{i=1}^r \mathbb{Z}\,\lambda_i^\vee$)
ρ: **ワイルベクトル** ($:= \lambda_1+\cdots+\lambda_r$)

$\mathfrak{g}$ のルート系を Δ とすると 1 対 1 対応:

$$\mathfrak{g}\text{ の有限次元既約表現 }\psi \quad\Longleftrightarrow\quad \lambda\in P_+$$

が存在する.

ワイルの次元公式

$$\dim\psi=\prod_{\alpha\in\Delta_+}\frac{\langle\alpha^\vee,\lambda+\rho\rangle}{\langle\alpha^\vee,\rho\rangle}$$

これを使うと, **Witten ゼータ関数** が次のように定式化できる：

$$\zeta_W(s;\mathfrak{g})=\sum_{\psi}\frac{1}{(\dim\psi)^s}=K_{\mathfrak{g}}^s\sum_{\lambda\in P_+}\prod_{\alpha\in\Delta_+}\frac{1}{\langle\alpha^\vee,\lambda+\rho\rangle^s}\qquad (K_{\mathfrak{g}}:\text{定数}).$$

この多変数化として, ルート系のゼータ関数が定義できる ([5]-[13] 参照).

Definition 2.1 (ルート系のゼータ関数). $\mathbf{s}=(s_\alpha)_{\alpha\in\Delta_+}\in\mathbb{C}^{|\Delta_+|}$, $\mathbf{y}\in V$ に対し,

$$\zeta_r(\mathbf{s},\mathbf{y};\Delta):=\sum_{\lambda\in P_+}e^{2\pi i\langle\mathbf{y},\lambda+\rho\rangle}\prod_{\alpha\in\Delta_+}\frac{1}{\langle\alpha^\vee,\lambda+\rho\rangle^{s_\alpha}}.$$

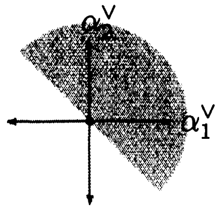
ここでランクが r のルート系 Δ は一般的に X_r 型 (ただし $X=A,B,C,D,E,F,G$) と呼ばれる 7 つの型に分類されるので ([2] 参照), それに対応して $\Delta=\Delta(X_r)$ とかく. この場合のゼータ関数を $\zeta_r(\mathbf{s},\mathbf{y};X_r)$ ともあらわす. とくに $\mathbf{y}=\mathbf{0}$ のとき, $\zeta_r(\mathbf{s},\mathbf{0};\Delta)$ を $\zeta_r(\mathbf{s};\Delta)$ とかく.

Remark 2.2. ここで「ルート系のゼータ関数」を定義しているが, これを多変数 Witten zeta と呼ばずに「ルート系のゼータ」と呼んだのは, ワイルの次元公式をもとにルートごとに違った変数を対応させるという形になったことで, もはや Lie 代数に付随する, とは言いがたいからである.

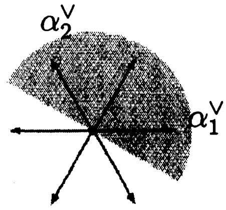
Example 2.3. ($\mathbf{y}=\mathbf{0}$ のとき) rank 1, 2 のルート系のゼータ関数：

$$\zeta(\mathbf{s};A_1)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^{s_1}}$$

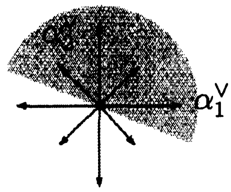
$$\zeta(\mathbf{s};A_1\times A_1)=\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{1}{m^{s_1}n^{s_2}}=\zeta(s_1;A_1)\zeta(s_2;A_1)$$



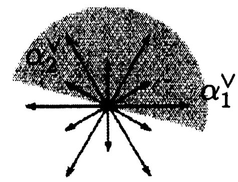
$$\zeta(\mathbf{s};A_2)=\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{1}{m^{s_1}n^{s_2}(m+n)^{s_3}}$$



$$\zeta(\mathbf{s};C_2)=\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{1}{m^{s_1}n^{s_2}(m+n)^{s_3}(m+2n)^{s_4}}$$



$$\zeta(\mathbf{s};G_2)=\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{1}{m^{s_1}n^{s_2}(m+n)^{s_3}(m+2n)^{s_4}(m+3n)^{s_5}(2m+3n)^{s_6}}$$



次に, ベルヌーイ多項式 $\{B_n(X)\}$ を一般化するために記号を準備する.

$\mathscr{V}$: 基底 $\mathbf{V}\subset\Delta_+$ からなる集合.
$\mathbf{V}^*=\{\mu_\beta^{\mathbf{V}}\}_{\beta\in\mathbf{V}}$: $\mathbf{V}^\vee=\{\beta^\vee\}_{\beta\in\mathbf{V}}$ の双対基底.
$L(\mathbf{V}^\vee)=\bigoplus_{\beta\in\mathbf{V}}\mathbb{Z}\beta^\vee$ ($\Rightarrow|Q^\vee/L(\mathbf{V}^\vee)|<\infty$).
$\phi\in V$ を固定.

$$\{\mathbf{y}\}_{\mathbf{V},\beta}=\begin{cases}\{\langle\mathbf{y},\mu_\beta^{\mathbf{V}}\rangle\} & (\langle\phi,\mu_\beta^{\mathbf{V}}\rangle>0),\\ 1-\{-\langle\mathbf{y},\mu_\beta^{\mathbf{V}}\rangle\} & (\langle\phi,\mu_\beta^{\mathbf{V}}\rangle<0)\end{cases}$$

(小数部分の高次元化).

Definition 2.4. $\mathbf{t}=(t_\alpha)_{\alpha\in\Delta_+}$ に対して

$$F(\mathbf{t},\mathbf{y};\Delta)=\sum_{\mathbf{V}\in\mathscr{V}}\left(\prod_{\gamma\in\Delta_+\setminus\mathbf{V}}\frac{t_\gamma}{t_\gamma-\sum_{\beta\in\mathbf{V}}t_\beta\langle\gamma^\vee,\mu_\beta^{\mathbf{V}}\rangle}\right)\times\frac{1}{|Q^\vee/L(\mathbf{V}^\vee)|}\sum_{q\in Q^\vee/L(\mathbf{V}^\vee)}\left(\prod_{\beta\in\mathbf{V}}\frac{t_\beta\exp(t_\beta\{\mathbf{y}+q\}_{\mathbf{V},\beta})}{e^{t_\beta}-1}\right).$$

関数 $F(\mathbf{t},\mathbf{y};\Delta)$ は $\mathbf{t}$ に関して $\mathbf{t}=\mathbf{0}$ の近傍で正則であることが示される. このテイラー展開の係数を用いて多重周期的ベルヌーイ関数を以下のように定義する.

Definition 2.5 (**多重周期的ベルヌーイ関数**).

$$F(\mathbf{t},\mathbf{y};\Delta)=\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^{|\Delta_+|}}\mathcal{P}(\mathbf{k},\mathbf{y};\Delta)\prod_{\alpha\in\Delta_+}\frac{t_\alpha^{k_\alpha}}{k_\alpha!}.$$

Remark 2.6. $\Delta=\Delta(A_1)$ のときは,

$$F(t,y;\Delta(A_1))=\frac{te^{t\{y\}}}{e^t-1}=\sum_{k=0}^{\infty}B_k(\{y\})\frac{t^k}{k!}. \tag{2.1}$$

Szenes [16, 17] は, この $\mathcal{P}(\mathbf{k},\mathbf{y};\Delta)$ を含むような一般的なベルヌーイ関数を超平面配置の観点から定義し, その一つ一つを Iterated residue という方法で計算している. 我々の定式化では母関数を構成する方法によって定義しており, すべてのベルヌーイ関数を統一的に扱え, また古典的な理論と平行的に議論できる利点がある.

Theorem 2.7. $\mathbf{s}=\mathbf{k}=(k_\alpha)_{\alpha\in\Delta_+}\in\mathbb{Z}_{\geq 2}^{|\Delta_+|}$ に対して以下が成り立つ：

$$\sum_{w\in W}\Bigg(\prod_{\alpha\in\Delta_+\cap w^{-1}\Delta_-}(-1)^{k_\alpha}\Bigg)\zeta_r(w^{-1}\mathbf{k},w^{-1}\mathbf{y};\Delta)$$
$$=(-1)^{|\Delta_+|}\mathcal{P}(\mathbf{k},\mathbf{y};\Delta)\Bigg(\prod_{\alpha\in\Delta_+}\frac{(2\pi i)^{k_\alpha}}{k_\alpha!}\Bigg).$$

Remark 2.8. $\Delta=\Delta(A_1)$ のときは, $W=\{\mathrm{id},\sigma_\alpha\}$, $\zeta_1(k,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{2\pi iky}}{n^k}$ から, よく知られた次の関係式をえる:

$$\zeta_1(k,y)+(-1)^k\zeta_1(k,-y)=\sum_{n\neq 0}\frac{e^{2\pi iky}}{n^k}=-B_k(\{y\})\frac{(2\pi i)^k}{k!}.$$

Theorem 2.9. ワイル群不変な $\mathbf{k}=(k_\alpha)_{\alpha\in\Delta_+}\in(2\mathbb{Z}_{\geq 1})^{|\Delta_+|}$ （すなわち $w^{-1}\mathbf{k}=\mathbf{k}$ $(\forall w\in W)$ となる）に対して, 以下が成り立つ：

$$\zeta_r(\mathbf{k},\mathbf{0};\Delta)=\frac{(-1)^{|\Delta_+|}}{|W|}\mathcal{P}(\mathbf{k},\mathbf{0};\Delta)\Bigg(\prod_{\alpha\in\Delta_+}\frac{(2\pi i)^{k_\alpha}}{k_\alpha!}\Bigg)\in\mathbb{Q}\pi^{\sum_{\alpha\in\Delta_+}k_\alpha}.$$

Example 2.10. $\mathbf{y}=\mathbf{0}$ のとき,

$$\zeta_2((2,4,4,2),\mathbf{0};C_2)=\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{1}{m^2n^4(m+n)^4(m+2n)^2}$$
$$=\frac{(-1)^4}{2^2 2!}\frac{53}{1513512000}\left(\frac{(2\pi i)^2}{2!}\right)^2\left(\frac{(2\pi i)^4}{4!}\right)^2=\frac{53}{6810804000}\pi^{12}.$$

3 リー群に付随するゼータ関数

Witten のもともとの考察は, コンパクト半単純連結リー群 G に対するものであった. そのため Witten ゼータ関数も, 本来はコンパクト半単純連結リー群 G に対して定義されるべきものである. そこで

$$P_+ \Longleftrightarrow \text{単連結コンパクト半単純連結リー群 } \widetilde{G} \text{ の表現}$$

という対応に注目する. 記号を用意する.

G: **単連結とは限らない**コンパクト半単純連結リー群
$\widetilde{G}$: G の普遍被覆群 $(G \simeq \widetilde{G}/\pi_1(G))$
Δ: G, および $\widetilde{G}$ のルート系.
L: G のウエイト格子. ($Q \subset L \subset P$ を満たしており, $P/L \simeq \pi_1(G)$ となっている).
このとき

$$L_+ = L \cap P_+ \Longleftrightarrow \text{コンパクト半単純連結リー群 } G \text{ の表現}$$

Definition 3.1.

$$\zeta_r(\mathbf{s},\mathbf{y};G) = \zeta_r(\mathbf{s},\mathbf{y};L;\Delta) = \sum_{\lambda\in L_+} e^{2\pi i\langle \mathbf{y},\lambda+\rho\rangle} \prod_{\alpha\in\Delta_+} \frac{1}{\langle\alpha^\vee,\lambda+\rho\rangle^{s_\alpha}}.$$

Lemma 3.2.

$$\zeta_r(\mathbf{s},\mathbf{y};G) = \zeta_r(\mathbf{s},\mathbf{y};L;\Delta) = \sum_{\mu\in P^\vee/Q^\vee} \widehat{\iota_{L+\rho}}(\mu)\zeta_r(\mathbf{s},\mathbf{y}+\mu;\Delta).$$

ただし $\widehat{\iota_{L+\rho}} : P^\vee/Q^\vee \to \mathbb{C}$ は $L+\rho$ の定義関数のフーリエ変換：

$$\widehat{\iota_{L+\rho}}(\mu) = \frac{1}{|P/Q|} \sum_{\lambda\in(L+\rho)/Q} e^{-2\pi i\langle\mu,\lambda\rangle}$$

Remark 3.3. $\Delta = \Delta(A_1)$ のとき

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{2\pi i(2m+1)y}}{(2m+1)^s} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2}\frac{e^{2\pi i(m+1)y}}{(m+1)^s} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{-1}{2}\frac{e^{2\pi i(m+1)(y+\frac{1}{2})}}{(m+1)^s}. \tag{3.1}$$

Lemma 3.4. $\mu \in P^\vee/Q^\vee$ に対して

$$\widehat{\iota_{L+\rho}}(\mu) = \frac{1}{|P/Q|} \sum_{\lambda\in(L+\rho)/Q} e^{-2\pi i\langle\mu,\lambda\rangle} = \frac{(-1)^{\langle\mu,2\rho\rangle}}{|\pi_1(G)|}\delta_{L^*/Q^\vee}(\mu) \in \frac{\{-1,0,1\}}{|\pi_1(G)|} \subset \mathbb{Q}.$$

ただし $L^* = \mathrm{Hom}(L,\mathbb{Z})$, $P/L \simeq L^*/Q^\vee \simeq \pi_1(G)$,

$$\delta_{L^*/Q^\vee}(\mu) = \begin{cases} 1 & (\mu \in L^*/Q^\vee), \\ 0 & (\mu \notin L^*/Q^\vee). \end{cases}$$

Definition 3.5 (G **に付随する多重周期的ベルヌーイ関数**). $F(\mathbf{t},\mathbf{y};\widetilde{G}) = F(\mathbf{t},\mathbf{y};\Delta)$ に対して

$$F(\mathbf{t},\mathbf{y};G) = \frac{1}{|\pi_1(G)|}\sum_{\mu\in\pi_1(G)}(-1)^{\langle\mu,2\rho\rangle}F(\mathbf{t},\mathbf{y}+\mu;\widetilde{G})$$
$$= \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^{|\Delta_+|}}\mathcal{P}(\mathbf{k},\mathbf{y};G)\prod_{\alpha\in\Delta_+}\frac{t_\alpha^{k_\alpha}}{k_\alpha!}.$$

よって

$$\mathcal{P}(\mathbf{k},\mathbf{y};G) = \frac{1}{|\pi_1(G)|}\sum_{\mu\in\pi_1(G)}(-1)^{\langle\mu,2\rho\rangle}\mathcal{P}(\mathbf{k},\mathbf{y}+\mu;\Delta). \tag{3.2}$$

Theorem 3.6. ワイル群不変な $\mathbf{k}=(k_\alpha)_{\alpha\in\Delta_+}\in(2\mathbb{Z}_{\geq 1})^{|\Delta_+|}$ (すなわち $w^{-1}\mathbf{k}=\mathbf{k}$ $(\forall w\in W)$) と $\nu\in P^\vee/Q^\vee$ に対して, 以下が成り立つ:

$$\zeta_r(\mathbf{k},\nu;G) = \frac{(-1)^{|\Delta_+|}}{|W|}\mathcal{P}(\mathbf{k},\nu;G)\left(\prod_{\alpha\in\Delta_+}\frac{(2\pi i)^{k_\alpha}}{k_\alpha!}\right)\in\mathbb{Q}\pi^{\sum_{\alpha\in\Delta_+}k_\alpha}.$$

4 例

この節では, 具体的に A_j, B_j, C_j $(j=2,3)$ の場合を考察する.

Example 4.1. $\Delta=\Delta(A_2)$ のとき, $\Psi=\{\alpha_1,\alpha_2\}$, $\Delta_+=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2\}$, $P=\mathbb{Z}\lambda_1+\mathbb{Z}\lambda_2$, $Q=\mathbb{Z}\alpha_1+\mathbb{Z}\alpha_2$, $\rho=\lambda_1+\lambda_2$ であって, $(P:Q)=3$ となる (詳細は [2, Planche] 参照). よって $P\supsetneq L\supset Q$ となる格子 L は Q のみで, $Q_+=P_+\cap Q$ となる.

$$Q_+ + \rho = \{m_1\lambda_1+m_2\lambda_2 \mid m_1,m_2\in\mathbb{N},\ m_1\equiv m_2 \pmod 3\} \tag{4.1}$$

であることが容易に示せる. 単連結な A_2 型のリー群は $SU(3)$ である. $\widetilde{Z}$ を $\widetilde{G}$ の中心とすると, 対応する Q は $\widetilde{G}/\widetilde{Z}$, これは $PU(3)$ と同型である. よって P に対応するゼータ関数は

$$\zeta_2((s_1,s_2,s_3),\mathbf{y};SU(3)) = \zeta_2((s_1,s_2,s_3),\mathbf{y};P;A_2) = \sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{e^{2\pi i\langle\mathbf{y},m\lambda_1+n\lambda_2\rangle}}{m^{s_1}n^{s_2}(m+n)^{s_3}}.$$

とくに $\mathbf{y}=\lambda_1^\vee=\frac{2}{3}\alpha_1^\vee+\frac{1}{3}\alpha_2^\vee$ のときは

$$\zeta_2((s_1,s_2,s_3),\lambda_1^\vee;SU(3)) = \sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{\varrho^{2m+n}}{m^{s_1}n^{s_2}(m+n)^{s_3}}, \tag{4.2}$$

ただし $\varrho = e^{2\pi i/3}$ とする. Q に対応するゼータ関数は

$$\zeta_2((s_1,s_2,s_3),\mathbf{y};PU(3)) = \zeta_2((s_1,s_2,s_3),\mathbf{y};Q;A_2)$$
$$= \sum_{\lambda\in Q_+ + \rho} \frac{e^{2\pi i\langle \mathbf{y},\lambda\rangle}}{\langle \alpha_1^\vee,\lambda\rangle^{s_1}\langle \alpha_2^\vee,\lambda\rangle^{s_2}\langle \alpha_1^\vee+\alpha_2^\vee,\lambda\rangle^{s_3}} = \sum_{\substack{m,n=1\\ m\equiv n \ (\mathrm{mod}\ 3)}}^{\infty} \frac{e^{2\pi i\langle \mathbf{y},m\lambda_1+n\lambda_2\rangle}}{m^{s_1}n^{s_2}(m+n)^{s_3}}. \tag{4.3}$$

つまりこれは A_2 型のルート系のゼータ関数の部分和であって, いわゆるリーマンゼータ関数に対する部分ゼータ関数にあたるものの A_2 型類似である.

ここで $\mathbf{y} = y_1\alpha_1^\vee + y_2\alpha_2^\vee$ とおくと

$$\begin{aligned} F(\mathbf{t},\mathbf{y};A_2) &= \frac{t_3}{t_3-t_1-t_2}\frac{t_1e^{t_1\{y_1\}}}{e^{t_1}-1}\frac{t_2e^{t_2\{y_2\}}}{e^{t_2}-1} \\ &\quad + \frac{t_2}{t_2+t_1-t_3}\frac{t_1e^{t_1\{y_1-y_2\}}}{e^{t_1}-1}\frac{t_3e^{t_3\{y_2\}}}{e^{t_3}-1} \\ &\quad + \frac{t_1}{t_1+t_2-t_3}\frac{t_2e^{t_2(1-\{y_1-y_2\})}}{e^{t_2}-1}\frac{t_3e^{t_3\{y_1\}}}{e^{t_3}-1}. \end{aligned}$$

よって例えば

$$\begin{aligned} \mathcal{P}((2,2,2),\mathbf{y};A_2) &= \frac{1}{3780} + \frac{1}{90}(\{y_1\}-\{y_1-y_2\}-\{y_2\}) \\ &\quad + \frac{1}{90}(-\{y_1\}^2 - 2\{y_1-y_2\}\{y_1\} + \{y_1-y_2\}^2 - \{y_2\}^2 + 2\{y_1-y_2\}\{y_2\}) \\ &\quad + \frac{1}{18}(-\{y_1\}^3 + 3\{y_1-y_2\}\{y_1\}^2 + 3\{y_2\}^3 + 3\{y_1-y_2\}\{y_2\}^2) \\ &\quad + \frac{1}{18}(\{y_1\}^4 - 2\{y_1-y_2\}\{y_1\}^3 - 3\{y_1-y_2\}^2\{y_1\}^2 \\ &\qquad\qquad - 5\{y_2\}^4 - 10\{y_1-y_2\}\{y_2\}^3 - 3\{y_1-y_2\}^2\{y_2\}^2) \\ &\quad + \frac{1}{30}(\{y_1\}^5 - 5\{y_1-y_2\}\{y_1\}^4 + 10\{y_1-y_2\}^2\{y_1\}^3 \\ &\qquad\qquad + 5\{y_2\}^5 + 15\{y_1-y_2\}\{y_2\}^4 + 10\{y_1-y_2\}^2\{y_2\}^3) \\ &\quad + \frac{1}{30}(-\{y_1\}^6 + 4\{y_1-y_2\}\{y_1\}^5 - 5\{y_1-y_2\}^2\{y_1\}^4 \\ &\qquad\qquad - \{y_2\}^6 - 4\{y_1-y_2\}\{y_2\}^5 - 5\{y_1-y_2\}^2\{y_2\}^4) \end{aligned}$$

が得られる ([9, (9.13)] 参照). これらを (3.2) に代入すると,

$$\mathcal{P}((2,2,2),\mathbf{0};PU(3)) = \frac{187}{2755620}.$$

よって Theorem 3.6 から

$$\zeta_2((2,2,2);PU(3)) = \sum_{\substack{m,n=1\\ m\equiv n \ (\mathrm{mod}\ 3)}}^{\infty} \frac{1}{m^2n^2(m+n)^2} = \frac{187}{688905}\pi^6.$$

同様にして

$$\zeta_2((4,4,4);PU(3)) = \frac{3279473}{48475988686125}\pi^{12},$$
$$\zeta_2((6,6,6);PU(3)) = \frac{53109402098}{302027554315710345622 5}\pi^{18},$$
$$\zeta_2((8,8,8);PU(3)) = \frac{178778564412743}{390978000247947877448902968 75}\pi^{24}$$

を得る. また $\mathbf{y} = \lambda_1^\vee = \frac{2}{3}\alpha_1^\vee + \frac{1}{3}\alpha_2^\vee$ (see (4.2)) のときは,

$$\zeta_2((2,2,2),\lambda_1^\vee;SU(3)) = \frac{53}{229635}\pi^{6}$$
$$\zeta_2((4,4,4),\lambda_1^\vee;SU(3)) = \frac{1078771}{16158662895375}\pi^{12}$$
$$\zeta_2((6,6,6),\lambda_1^\vee;SU(3)) = \frac{88392335894}{50337925719285057603 75}\pi^{18}$$
$$\zeta_2((8,8,8),\lambda_1^\vee;SU(3)) = \frac{1012923518531597}{221554200140503797221045015625}\pi^{24}.$$

とくに定義から

$$\begin{aligned}\zeta_2((2p,2p,2p),\lambda_1^\vee;SU(3)) &= \zeta_2((2p,2p,2p),\lambda_2^\vee;SU(3)) \qquad (p\in\mathbb{N}),\\ \zeta_2((2p,2p,2p),\lambda_1^\vee;PU(3)) &= \zeta_2((2p,2p,2p),\lambda_2^\vee;PU(3))\\ &= \zeta_2((2p,2p,2p),\mathbf{0};PU(3)) \qquad (p\in\mathbb{N}).\end{aligned}$$

さらに [10, 18] と同様の方法で, $p,q\in\mathbb{N}$, $s\in\mathbb{C}$ に対して, 関数関係式

$$\begin{aligned}&\zeta_2((p,s,q);PU(3)) + (-1)^p\zeta_2((p,q,s);PU(3)) + (-1)^{p+q}\zeta_2((q,s,p);PU(3))\\ &= -\frac{1}{3}\sum_{\nu=0}^{p}\binom{p+q-\nu-1}{q-1}(-1)^{p-\nu}\frac{(2\pi i)^\nu}{\nu!}\sum_{a=0}^{2}B_\nu\left(\frac{a}{3}\right)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\varrho^{-ma}}{m^{s+p+q-\nu}}\\ &\quad+\frac{1}{3}\sum_{\nu=0}^{q}\binom{p+q-\nu-1}{p-1}(-1)^{p-1}\frac{(2\pi i)^\nu}{\nu!}\sum_{a=0}^{2}B_\nu\left(\frac{a}{3}\right)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\varrho^{ma}}{m^{s+p+q-\nu}}\end{aligned}$$

も示せる.

Example 4.2. $\Delta = \Delta(A_3)$ のときは, $\Psi = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$, $\Delta_+ = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2+\alpha_3, \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\}$, $P = \sum_{j=1}^3 \mathbb{Z}\lambda_j$, $Q = \sum_{j=1}^3 \mathbb{Z}\alpha_j$ なので

$$\lambda_1 = \frac{3}{4}\alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2 + \frac{1}{4}\alpha_3, \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}\alpha_1 + \alpha_2 + \frac{1}{2}\alpha_3, \quad \lambda_3 = \frac{1}{4}\alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2 + \frac{3}{4}\alpha_3$$

となる. ここで $P/Q \simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ なので, $P \supsetneq L_1 \supsetneq Q$ かつ $(L_1:Q)=2$ となる中間格子 L_1 が唯一つ定まる. P, Q に対応するリー群はそれぞれ $SU(4)$, $PU(4)$ である. また $G = G(L_1)$ は $SU(4)/\{\pm1\}$, つまり $SO(6)$ である.

ここで [7] より

$$\begin{aligned}
&\zeta_3(\mathbf{s},\mathbf{y};SU(4))=\zeta_3(\mathbf{s},\mathbf{y};P;A_3)\\
&=\sum_{m_1,m_2,m_3=1}^{\infty}\frac{e^{2\pi i\langle \mathbf{y},m_1\lambda_1+m_2\lambda_2+m_3\lambda_3\rangle}}{m_1^{s_1}m_2^{s_2}m_3^{s_3}(m_1+m_2)^{s_4}(m_2+m_3)^{s_5}(m_1+m_2+m_3)^{s_6}}.
\end{aligned}$$

例えば, $\lambda_1^\vee=\frac{3}{4}\alpha_1^\vee+\frac{1}{2}\alpha_2^\vee+\frac{1}{4}\alpha_3^\vee$ について,

$$\mathcal{P}((2,2,2,2,2,2),\lambda_1^\vee;SU(4))=-\frac{19329337}{14283291230208000}$$

となるので

$$\begin{aligned}
&\zeta_3((2,2,2,2,2,2),\lambda_1^\vee;SU(4))=\zeta_3((2,2,2,2,2,2),\lambda_1^\vee;P;A_3)\\
&=\sum_{m_1,m_2,m_3=1}^{\infty}\frac{i^{3l+2m+n}}{m_1^2m_2^2m_3^2(m_1+m_2)^2(m_2+m_3)^2(m_1+m_2+m_3)^2}\\
&=-\frac{19329337}{2678117105664000}\pi^{12}.
\end{aligned}$$

同様に L_1 と Q についても

$$\begin{aligned}
(L_1)_++\rho&=\left\{\sum_{j=1}^{3}m_j\lambda_j\,\middle|\,(m_j)\in\mathbb{N}^3,\ m_1\equiv m_3\ (\mathrm{mod}\ 2)\right\},\\
Q_++\rho&=\left\{\sum_{j=1}^{3}m_j\lambda_j\,\middle|\,(m_j)\in\mathbb{N}^3,\ m_1+2m_2+3m_3\equiv 2\ (\mathrm{mod}\ 4)\right\}.
\end{aligned}$$

そこで準同型 $\eta:P\cong\mathbb{Z}^3\to\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ を

$$\eta(n_1,n_2,n_3)=n_1+2n_2+3n_3\ (\mathrm{mod}\ 4).$$

で定義すると, $Q=\mathrm{Ker}\ \eta$ である.

$$L_1^*=\{(n_1,n_2,n_3)\,|\,n_1\equiv n_3\ (\mathrm{mod}\ 2)\}$$

とすると $\{0\}\subsetneq\eta(L_1^*)\subsetneq\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, よって $Q\subsetneq L_1^*\subsetneq P$. したがって $L_1^*=L_1$ となる. そこで $\mathbf{y}=y_1\alpha_1^\vee+y_2\alpha_2^\vee+y_3\alpha_3^\vee$ について

$$\begin{aligned}
&\zeta_3(\mathbf{s},\mathbf{y};SO(6))=\zeta_3(\mathbf{s},\mathbf{y};L_1;A_3)\\
&=\sum_{\substack{m_1,m_2,m_3=1\\ m_1\equiv m_3\ (\mathrm{mod}\ 2)}}^{\infty}\frac{e^{2\pi i\langle \mathbf{y},m_1\lambda_1+m_2\lambda_2+m_3\lambda_3\rangle}}{m_1^{s_1}m_2^{s_2}m_3^{s_3}(m_1+m_2)^{s_4}(m_2+m_3)^{s_5}(m_1+m_2+m_3)^{s_6}},
\end{aligned}$$

$$\zeta_3(\mathbf{s},\mathbf{y};PU(4))=\zeta_3(\mathbf{s},\mathbf{y};Q;A_3)$$

$$= \sum_{\substack{m_1,m_2,m_3=1 \\ m_1+2m_2+3m_3\equiv 2 \pmod 4}}^{\infty} \frac{e^{2\pi i\langle \mathbf{y}, m_1\lambda_1+m_2\lambda_2+m_3\lambda_3\rangle}}{m_1^{s_1}m_2^{s_2}m_3^{s_3}(m_1+m_2)^{s_4}(m_2+m_3)^{s_5}(m_1+m_2+m_3)^{s_6}}$$

などとあらわせる. さらに, [10, 18] と同様の方法で, 例えば関数関係式

$$\begin{aligned}
&2\zeta_3((2,s,2,2,2,2);SO(6)) + 4\zeta_3((2,2,s,2,2,2);SO(6)) \\
&+ 4\zeta_3((2,2,2,s,2,2);SO(6)) + 2\zeta_3((2,2,2,2,2,s);SO(6)) \\
&= \left(93\cdot 2^{-s-8}+306\right)\zeta(s+10) + \left(3\cdot 2^{-s-4}-260\right)\zeta(2)\zeta(s+8) \\
&- \left(67\cdot 2^{-s-6}-110\right)\zeta(4)\zeta(s+6) - \frac{1}{8}\left(5\cdot 2^{-s-3}-21\right)\zeta(6)\zeta(s+4)
\end{aligned}$$

が示せて, $s=2$ とすると

$$\zeta_3((2,2,2,2,2,2);SO(6)) = \frac{10411}{1307674368000}\pi^{12}$$

が得られる.

Example 4.3. 次に $\Delta=\Delta(B_r)$, $\Delta=\Delta(C_r)$ を考える.

B_r 型の単連結リー群は spinor 群 $Spin(2r+1)$, $\widetilde{G}/\widetilde{Z}=SO(2r+1)$, C_r 型の単連結リー群は $\widetilde{G}=Sp(r)$ と $\widetilde{G}/\widetilde{Z}=PSp(r)$ である. [7, 10, 12] より

$$\begin{aligned}
&\zeta_2(\mathbf{s},\mathbf{y};Spin(5)) = \zeta_2(\mathbf{s},\mathbf{y};P;B_2) \\
&\quad = \sum_{m_1,m_2=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi i\langle \mathbf{y}, m_1\lambda_1+m_2\lambda_2\rangle}}{m_1^{s_1}m_2^{s_2}(m_1+m_2)^{s_3}(2m_1+m_2)^{s_4}}, \\
&\zeta_2(\mathbf{s},\mathbf{y};Sp(2)) = \zeta_2(\mathbf{s},\mathbf{y};P;C_2) \\
&\quad = \sum_{m_1,m_2=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi i\langle \mathbf{y}, m\lambda_1+n\lambda_2\rangle}}{m_1^{s_1}m_2^{s_2}(m_1+m_2)^{s_3}(m_1+2m_2)^{s_4}}, \\
&\zeta_3(\mathbf{s},\mathbf{y};Spin(7)) = \zeta_3(\mathbf{s},\mathbf{y};P;B_3) \\
&\quad = \sum_{m_1,m_2,m_3=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi i\langle \mathbf{y}, m_1\lambda_1+m_2\lambda_2+m_3\lambda_3\rangle}}{m_1^{s_1}m_2^{s_2}m_3^{s_3}(m_1+m_2)^{s_4}(m_2+m_3)^{s_5}(2m_2+m_3)^{s_6}} \\
&\quad\quad \times \frac{1}{(m_1+m_2+m_3)^{s_7}(m_1+2m_2+m_3)^{s_8}(2m_1+2m_2+m_3)^{s_9}}, \\
&\zeta_3(\mathbf{s},\mathbf{y};Sp(3)) = \zeta_3(\mathbf{s},\mathbf{y};P;C_3) \\
&\quad = \sum_{m_1,m_2,m_3=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi i\langle \mathbf{y}, m_1\lambda_1+m_2\lambda_2+m_3\lambda_3\rangle}}{m_1^{s_1}m_2^{s_2}m_3^{s_3}(m_1+m_2)^{s_4}(m_2+m_3)^{s_5}(m_2+2m_3)^{s_6}} \\
&\quad\quad \times \frac{1}{(m_1+m_2+m_3)^{s_7}(m_1+m_2+2m_3)^{s_8}(m_1+2m_2+2m_3)^{s_9}}
\end{aligned}$$

である. ここで B_r, C_r 型では $(P:Q)=2$ であるので, $P \supset L \supset Q$ となる中間格子 L は P または Q である. とくに

$$Q_+(B_2)+\rho=\left\{\sum_{j=1}^{2} m_j\lambda_j \,\middle|\, (m_j)\in\mathbb{N}^2,\ m_2\equiv 1 \pmod 2\right\},$$

$$Q_+(C_2)+\rho=\left\{\sum_{j=1}^{2} m_j\lambda_j \,\middle|\, (m_j)\in\mathbb{N}^2,\ m_1\equiv 1 \pmod 2\right\},$$

$$Q_+(B_3)+\rho=\left\{\sum_{j=1}^{3} m_j\lambda_j \,\middle|\, (m_j)\in\mathbb{N}^3,\ m_3\equiv 1 \pmod 2\right\},$$

$$Q_+(C_3)+\rho=\left\{\sum_{j=1}^{3} m_j\lambda_j \,\middle|\, (m_j)\in\mathbb{N}^3,\ m_1\equiv m_3 \pmod 2\right\}$$

なので

$$\begin{aligned}\zeta_2(\mathbf{s},\mathbf{y};SO(5)) &= \zeta_2(\mathbf{s},\mathbf{y};Q;B_2) \\ &= \sum_{\substack{m_1,m_2=1 \\ m_2\equiv 1 \pmod 2}}^{\infty} \frac{e^{2\pi i\langle \mathbf{y}, m_1\lambda_1+m_2\lambda_2\rangle}}{m_1^{s_1}m_2^{s_2}(m_1+m_2)^{s_3}(2m_1+m_2)^{s_4}},\end{aligned} \tag{4.4}$$

$$\begin{aligned}\zeta_2(\mathbf{s},\mathbf{y};PSp(2)) &= \zeta_2(\mathbf{s},\mathbf{y};Q;C_2) \\ &= \sum_{\substack{m_1,m_2=1 \\ m_1\equiv 1 \pmod 2}}^{\infty} \frac{e^{2\pi i\langle \mathbf{y}, m\lambda_1+n\lambda_2\rangle}}{m_1^{s_1}m_2^{s_2}(m_1+m_2)^{s_3}(m_1+2m_2)^{s_4}},\end{aligned} \tag{4.5}$$

$$\begin{aligned}\zeta_3(\mathbf{s},\mathbf{y};SO(7)) &= \zeta_3(\mathbf{s},\mathbf{y};Q;B_3) \\ &= \sum_{\substack{m_1,m_2,m_3=1 \\ m_3\equiv 1 \pmod 2}}^{\infty} \frac{e^{2\pi i\langle \mathbf{y}, m_1\lambda_1+m_2\lambda_2+m_3\lambda_3\rangle}}{m_1^{s_1}m_2^{s_2}m_3^{s_3}(m_1+m_2)^{s_4}(m_2+m_3)^{s_5}(2m_2+m_3)^{s_6}} \\ &\quad\times \frac{1}{(m_1+m_2+m_3)^{s_7}(m_1+2m_2+m_3)^{s_8}(2m_1+2m_2+m_3)^{s_9}},\end{aligned} \tag{4.6}$$

$$\begin{aligned}\zeta_3(\mathbf{s},\mathbf{y};PSp(3)) &= \zeta_3(\mathbf{s},\mathbf{y};Q;C_3) \\ &= \sum_{\substack{m_1,m_2,m_3=1 \\ m_1\equiv m_3 \pmod 2}}^{\infty} \frac{e^{2\pi i\langle \mathbf{y}, m_1\lambda_1+m_2\lambda_2+m_3\lambda_3\rangle}}{m_1^{s_1}m_2^{s_2}m_3^{s_3}(m_1+m_2)^{s_4}(m_2+m_3)^{s_5}(m_2+2m_3)^{s_6}} \\ &\quad\times \frac{1}{(m_1+m_2+m_3)^{s_7}(m_1+m_2+2m_3)^{s_8}(m_1+2m_2+2m_3)^{s_9}}\end{aligned} \tag{4.7}$$

となる.

5 Euler-Zagier Sum との関係

この節では **Euler-Zagier Sum** ([3, 4, 21] 参照):

$$\zeta_r(s_1, s_2, \ldots, s_r) = \sum_{0<m_1<m_2<\cdots<m_r} \frac{1}{m_1^{s_1} m_2^{s_2} \cdots m_r^{s_r}}$$

を C_r 型のルート系のゼータ関数の特別な場合とみて, 考察を深める.

例えば, C_2, C_3 型のゼータ関数は

$$\zeta_2(\mathbf{s}; C_2) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{m^{s_1} n^{s_2} (m+n)^{s_3} (m+2n)^{s_4}},$$

$$\zeta_3(\mathbf{s}; C_3) = \sum_{l,m,n=1}^{\infty} \frac{1}{l^{s_1} m^{s_2} n^{s_3} (l+m)^{s_4} (m+n)^{s_5} (m+2n)^{s_6}}$$
$$\times \frac{1}{(l+m+n)^{s_7} (l+m+2n)^{s_8} (l+2m+2n)^{s_9}}$$

であったので, C_r 型ゼータの変数のうち, Euler-Zagier Sum からはみ出す変数 s_α を 0 とおいたものをうまく考察したい.

ここで $\Delta(C_r)^\vee$ において, **ベクトルとしての長さの短い方のコルートの全体** $\Delta(C_r)^{short}$ はルート系となり, 正ルートは r 個で $\Delta_+(C_r)^{short} = \{\beta_i^\vee\}_{i=1}^r$ とかくと,

$$\beta_i = \sum_{j=i}^{r} \alpha_j^\vee \qquad (1 \le i \le r)$$

$$\Delta_+(C_r)^{short} = \left\{ \sum_{j=1}^{r} \alpha_j^\vee,\ \sum_{j=2}^{r} \alpha_j^\vee,\ \ldots,\ \alpha_{r-1}^\vee + \alpha_r^\vee,\ \alpha_r^\vee \right\}$$

そこで $\zeta_r(\mathbf{s}; C_r)$ において, $\mathbf{k} = (k_\alpha)$ で

$$k_\alpha = k_i \ (\text{if } \alpha^\vee = \beta_i^\vee), \quad k_\alpha = 0 \ (\text{otherwise})$$

とおくと

$$\zeta_r((k_\alpha); C_r) = \sum_{m_1,\ldots,m_r=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{r} \frac{1}{\langle \beta_i^\vee, \sum_{j=1}^r m_j \lambda_j \rangle^{k_i}}$$
$$= \sum_{m_1,\ldots,m_r=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{r} \frac{1}{\left(\sum_{j=i}^r m_j\right)^{k_i}} = \zeta(k_1, k_2, \cdots, k_r).$$

一般に $\Delta(B_n)^\vee$, $\Delta(C_n)^\vee$ では, ベクトルとしての長さの長いコルート、短いコルートの全体がルート系をなしている. とくに $\Delta(C_n)^\vee$ の短いコルート全体, $\Delta(B_n)^\vee$ の長いコルートの全体が $A_1 \times \cdots \times A_1$ 型のルート系となり, 正ルートの個数はそれぞれ

ちょうど r 個である. Euler-Zagier Sum は様々なルート系のゼータ関数の特殊な場合として実現できるが, とくに C_r 型ルート系のゼータ関数とみると, Euler-Zagier Sum に対応する短いコルート全体がルート系になっているため, **ワイル群 W の作用で閉じている.** これにより, Euler-Zagier Sum のルート系の見地からの考察が可能となる.

そこで C_r 型ルート系で長いコルートに対応する変数に対して $k_\alpha = 0$ としたいが, 0 があるとそのままでは Theorem 2.7 が適用できない.

そこで $\mathbf{y} = \sum_{i=1}^r y_i\alpha_i^\vee$, $\alpha \in \Delta_+$ に対して

$$\partial_{\mathbf{v}} = \sum_{i=1}^r v_i \frac{\partial}{\partial y_i}, \qquad \mathfrak{D}_\alpha = \frac{\partial}{\partial t_\alpha}\bigg|_{t_\alpha=0} \partial_{\alpha^\vee}$$

とおく.

Definition 5.1. $A \subset \Delta_+$ に対して $\mathbf{t}_A = \{t_\alpha\}_{\alpha\in\Delta\setminus A}$ とおく.

$$\begin{aligned} F_A(\mathbf{t}_A, \mathbf{y}; \Delta) &= \Big(\Big(\prod_{\alpha\in A}\mathfrak{D}_\alpha\Big)F\Big)(\mathbf{t}, \mathbf{y}; \Delta) \\ &= \sum_{\mathbf{k}_A\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^{|\Delta_+\setminus A|}} \mathcal{P}_A(\mathbf{k}_A, \mathbf{y}; \Delta) \prod_{\alpha\in\Delta_+\setminus A} \frac{t_\alpha^{k_\alpha}}{k_\alpha!}. \end{aligned}$$

Theorem 5.2. $\mathbf{s} = \mathbf{k} = (k_\alpha)_{\alpha\in\Delta_+}$, $k_\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ $(\alpha \in \Delta_+ \setminus A)$, $k_\alpha = 0$ $(\alpha \in A)$ に対して (左辺が収束する限り) 以下が成り立つ :

$$\begin{aligned} \sum_{w\in W}\Big(\prod_{\alpha\in\Delta_+\cap w^{-1}\Delta_-}(-1)^{k_\alpha}\Big)\zeta_r(w^{-1}\mathbf{k}, w^{-1}\mathbf{y}; \Delta) \\ = (-1)^{|\Delta_+|}\mathcal{P}_A(\mathbf{k}_A, \mathbf{y}; \Delta)\Big(\prod_{\alpha\in\Delta_+}\frac{(2\pi i)^{k_\alpha}}{k_\alpha!}\Big). \end{aligned} \tag{5.1}$$

ここで $\Delta_+(C_r)^{short} = \{\beta_i^\vee\}_{i=1}^r$ なので, $p \in \mathbb{N}$ に対し, $k_\alpha = 2p$ $(\alpha = \beta_j;\ 1 \leq j \leq r$ のとき$)$, $k_\alpha = 0$ (otherwise) とすると, このような $\mathbf{k} = (k_\alpha)$ は, Theorem 5.2 の条件 $w^{-1}\mathbf{k} = \mathbf{k}$ $(\forall w \in W)$ を満たすので, $A^* := \{\alpha \in \Delta_+(C_r) \mid \alpha^\vee \notin \Delta_+(C_r)^{short}\}$ とおくと, r 重ゼータ値に関する Zagier 公式の $\mathcal{P}_{A^*}(\mathbf{k}, \mathbf{0}; C_r)$ を使った表示が得られる.

Theorem 5.3. $p \in \mathbb{N}$ について,

$$\zeta_r(2p, 2p, \ldots, 2p) = \frac{(-1)^r}{2^r r!}\mathcal{P}_{A^*}(\{2p\}, \mathbf{0}; C_r)\frac{(2\pi i)^{2pr}}{\{(2p)!\}^r} \in \mathbb{Q}\cdot\pi^{2pr}.$$

つまり MZV の **Zagier 公式** は **Witten's Volume Formula** の特別な場合であって, Euler の公式 : $\zeta(2p) = -\frac{1}{2}B_{2p}\frac{(2\pi i)^{2p}}{(2p)!}$ の多重化の形であることが鮮明になる.

$\Delta(B_r)^\vee$ において, **長い正コルートの全体**を $\Delta_+(B_r)^{long} = \{\gamma_i^\vee\}_{i=1}^r$ とかくと

$$\gamma_i^\vee = 2\sum_{j=i}^{r-1}\alpha_j^\vee + \alpha_r^\vee \qquad (1 \le i \le r)$$

$$\Delta_+(B_r)^{long} = \left\{2\sum_{j=1}^{r-1}\alpha_j^\vee + \alpha_r^\vee, 2\sum_{j=2}^{r-1}\alpha_j^\vee + \alpha_r^\vee, \ldots, 2\alpha_{r-1}^\vee + \alpha_r^\vee, \alpha_r^\vee\right\}$$

そこで $\zeta_r(\mathbf{s}; B_r)$ において, $\mathbf{k} = (k_\alpha)$ で $k_\alpha = k_i$ (if $\alpha^\vee = \gamma_i^\vee$), $k_\alpha = 0$ (otherwise) とおくと

$$\begin{aligned}\zeta_r((k_\alpha); B_r) &= \sum_{m_1,\ldots,m_r=1}^{\infty}\prod_{i=1}^{r}\frac{1}{\langle\gamma_i^\vee, \sum_{j=1}^r m_j\lambda_j\rangle^{k_i}} \\ &= \sum_{m_1,\ldots,m_r=1}^{\infty}\prod_{i=1}^{r}\frac{1}{(2\sum_{j=i}^{r-1} m_j + m_r)^{k_i}}\end{aligned}$$

となる. 例えば $r = 2, 3$ のときは

$$\zeta_2((0, k_2, k_1, 0); B_2) = \sum_{l,m}^{\infty}\frac{1}{m^{k_2}(2l+m)^{k_1}}$$

$$\zeta_3((0, 0, k_3, 0, 0, k_2, 0, 0, k_1); B_3) = \sum_{l,m,n}^{\infty}\frac{1}{n^{k_3}(2m+n)^{k_2}(2l+2m+n)^{k_1}}.$$

このとき Thoerem 5.3 と同様にして, 次の結果が示せる.

Theorem 5.4. $p \in \mathbb{N}$ について,

$$\sum_{m_1,\ldots,m_r=1}^{\infty}\prod_{i=1}^{r}\frac{1}{(2\sum_{j=i}^{r-1} m_j + m_r)^{2p}} \in \mathbb{Q}\cdot\pi^{2pr}$$

ここで C_r 型ルート系的な側面から定理 5.3 の一般化として, 偶数値を一般の自然数値に拡げてみる. 実際 Theorem 5.2 の (5.1) の左辺で, ワイル群全体で和をとるのではなく, 適当な部分和をとることで Theorem 5.2 が一般化できる.

例えば二重ゼータの場合は, 次の結果をえる. ただしこれは, A_2 型ゼータの既知の結果 [18, Theorem 4.5] の特別な場合である.

Proposition 5.5. $p, q \in \mathbb{N}$, $p, q \ge 2$,

$$\begin{aligned}&(1+(-1)^p)\zeta(q,p) + (1+(-1)^q)\zeta(p,q) \\ &\quad = 2\sum_{j=0}^{[p/2]}\binom{p+q-2j-1}{q-1}\zeta(2j)\zeta(p+q-2j) \\ &\quad\quad + 2\sum_{j=0}^{[q/2]}\binom{p+q-2j-1}{p-1}\zeta(2j)\zeta(p+q-2j) - \zeta(p+q).\end{aligned}$$

Remark 5.6. p,q がともに偶数の場合は, 本質的に調和積関係式になり, p,q がともに奇数の場合は, 左辺が 0 になる. p,q の偶奇は異なる場合, 例えば $(p,q)=(3,2)$ とすると,

$$\zeta(3,2)=3\zeta(2)\zeta(3)-\frac{11}{2}\zeta(5)$$

これは有限複シャッフル関係式から出る関係式, つまり**上記の関係式は本質的に調和積関係式と (有限) 複シャッフル関係式を同時に含んでいる!**

同様に三重ゼータの場合も次を得るが, これは A_3 型の既知の結果からは導けない.

Theorem 5.7. $p,q,r\in\mathbb{N}$, $p,q,r\geq 2$ について, 次の関係式が成り立つ：

$$\begin{aligned}&(1+(-1)^p)(1+(-1)^r)\{\zeta(r,q,p)+\zeta(q,r,p)+\zeta(q,p,r)\}\\&\quad+(1+(-1)^q)(1+(-1)^r)\{\zeta(p,q,r)+\zeta(p,r,q)+\zeta(r,p,q)\}\\&\qquad\in\mathbb{Q}[\{\zeta(j+1)\,|\,j\in\mathbb{N}\}].\end{aligned}$$

とくに p のみが odd, q,r が even の場合は

$$\underline{\zeta(p,q,r)+\zeta(r,p,q)+\zeta(p,r,q)}\ \text{が}\ \zeta(s)\ \text{達であらわされる.}$$

調和積関係式とあわせると, この条件化で

$$\underline{\zeta(p,q,r)-\zeta(r,q,p)}\ \text{が}\ \zeta(s)\ \text{達であらわせる}$$

ということがわかるが, これは Borwein, Bradley, Broadhurst and Lisonek [1, Theorem 3.1] の結果：

“$\zeta(k_1,\ldots,k_r)+(-1)^r\zeta(k_r,\ldots,k_1)$ **は, より低い depth の MZV 達の多項式であらわせる**”

ということの三重ゼータの場合の, ある種の精密化になっている. 実際 $(p,q,r)=(5,4,2)$ のとき,

$$\begin{aligned}\zeta(5,4,2)=&-15\zeta(8,2,1)+\frac{871}{10}\zeta(2)^2\zeta(7)-\frac{18913}{24}\zeta(11)-5\zeta(5)\zeta(3)^2\\&+\frac{1686}{175}\zeta(2)^4\zeta(3)+210\zeta(2)\zeta(9)+\frac{580}{21}\zeta(5)\zeta(2)^3-5\zeta(3)\zeta(2,6)\\\zeta(2,4,5)=&-15\zeta(8,2,1)+\frac{629}{10}\zeta(2)^2\zeta(7)-\frac{25117}{24}\zeta(11)-6\zeta(5)\zeta(3)^2\\&+\frac{1734}{175}\zeta(2)^4\zeta(3)+\frac{815}{2}\zeta(2)\zeta(9)+\frac{572}{21}\zeta(5)\zeta(2)^3-5\zeta(3)\zeta(2,6)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\zeta(5,4,2)-\zeta(2,4,5)=&\frac{121}{5}\zeta(2)^2\zeta(7)+\frac{517}{2}\zeta(11)+\zeta(5)\zeta(3)^2\\&-\frac{48}{175}\zeta(2)^4\zeta(3)-\frac{395}{2}\zeta(2)\zeta(9)+\frac{8}{21}\zeta(5)\zeta(2)^3\end{aligned}$$

$\zeta(3,5,2)-\zeta(2,5,3)$ などは, 書き表すと $\zeta(2)\zeta(2,6)$ などがあらわれてしまうので, 常に

$$\zeta(r,q,p)-\zeta(p,q,r)$$

が $\zeta(s)$ でかけるわけではない.

Remark 5.8. Yamasaki [20] によって, r **重** L **値に関する Zagier 公式の類似** が得られている:

$$L^*(\{2k\};\{\chi\}) \in \mathbb{Q}(\chi)\cdot\pi^{2kr} \quad (\chi(-1)=1)$$
$$L^*(\{2k+1\};\{\chi\}) \in \mathbb{Q}(\chi)\cdot\pi^{(2k+1)r} \quad (\chi(-1)=-1)$$

これらに関しても, **ルート系の** L **関数** が既に筆者達によって定義されているので ([8] 参照), $L^*(\{2k\};\{\chi\})$ を C_r 型ルート系の L 関数の値とみれば, 同様の方法で証明できる. 同様に B_r 型を考えると **部分** r **重** L **値に関する Zagier 公式の類似**を得る.

Example 5.9. Theorem 3.6 も, Theorem 5.2 と同様に一般化ができて, いくつかの変数を 0 にすることができ, 例えば

$$\sum_{\substack{m,n=1\\ m\equiv 1 \pmod 2}}^{\infty} \frac{1}{n^6(m+n)^6} = \frac{1}{58060800}\pi^{12},$$
$$\sum_{\substack{m,n=1\\ m\equiv 1 \pmod 2}}^{\infty} \frac{1}{n^8(m+n)^8} = \frac{17}{390168576000}\pi^{16}$$

などが示せる.

付記. 津村の講演では, 多重ゼータ値を A_r 型のルート系のゼータ関数の特別な場合と見て, それらの部分分数分解として, MZV のシャッフル積の手順に関する明示的な解釈を与えたが, この小文では割愛する. 実際, その詳細に関しては [11] に記されているので, そちらを参照いただきたい.

参考文献

[1] J. M. Borwein, D. M. Bradley, D. J. Broadhurst, and P. Lisonek, Special values of multidimensional polylogarithms, Trans. Amer. Math. Soc. **353** (2001), 907-941.

[2] N. Bourbaki, *Groupes et Algèbres de Lie, Chapitres 4, 5 et 6*, Hermann, Paris, 1968.

[3] M. E. Hoffman, Multiple harmonic series, Pacific J. Math. **152** (1992), 275-290.

[4] M. Kaneko, Multiple zeta values, Sugaku Expositions, **18** (2005), 221-232 (translation of Sugaku **54** (2002), 404-415).

[5] Y. Komori, K. Matsumoto and H. Tsumura, Zeta-functions of root systems, in *The Conference on L-functions*, L. Weng and M. Kaneko (eds.), World Scientific, 2007, pp. 115–140.

[6] Y. Komori, K. Matsumoto and H. Tsumura, Zeta and L-functions and Bernoulli polynomials of root systems, Proc. Japan Acad., Series A, **84** (2008), 57–62.

[7] Y. Komori, K. Matsumoto and H. Tsumura, On Witten multiple zeta-functions associated with semisimple Lie algebras II, J. Math. Soc. Japan **62** (2010), 355–394.

[8] Y. Komori, K. Matsumoto and H. Tsumura, On multiple Bernoulli polynomials and multiple L-functions of root systems, Proc. London Math. Soc. **100** (2010), 303–347.

[9] Y. Komori, K. Matsumoto and H. Tsumura, An introduction to the theory of zeta-functions of root systems, in *Algebraic and Analytic Aspects of Zeta Functions and L-functions*, G. Bhowmik, K. Matsumoto and H. Tsumura (eds.), MSJ Memoirs, Vol. 21, Mathematical Society of Japan, 2010, pp. 115–140.

[10] Y. Komori, K. Matsumoto and H. Tsumura, Functional relations for zeta-functions of root systems, in *Number Theory: Dreaming in Dreams - Proceedings of the 5th China-Japan Seminar*, T. Aoki, S. Kanemitsu and J. -Y. Liu (eds.), World Sci. Publ, 2010, pp. 135-183.

[11] Y. Komori, K. Matsumoto and H. Tsumura, Shuffle products for multiple zeta values and partial fraction decompositions of zeta-functions of root systems, to appear in Math. Zeitschrift, arXiv:0908.0670.

[12] Y. Komori, K. Matsumoto and H. Tsumura, On Witten multiple zeta-functions associated with semisimple Lie algebras III, to appear in *The Proceedings of the Conference on Multiple Dirichlet Series and Applications to Automorphic Forms (Edinburgh, 2008)*, D. Bump et al. (eds.), arXiv:0907.0955.

[13] Y. Komori, K. Matsumoto and H. Tsumura, On Witten multiple zeta-functions associated with semisimple Lie algebras IV, to appear in Glasgow Math. J., arXiv:0907.0972.

[14] Y. Komori, K. Matsumoto and H. Tsumura, Zeta-functions of weight lattices of compact semisimple connected Lie groups, preprint, submitted, arXiv:1011.0323.

[15] Y. Komori, K. Matsumoto and H. Tsumura, Multiple zeta values and zeta-functions of root systems, preprint.

[16] A. Szenes, Iterated residues and multiple Bernoulli polynomials, Internat. Math. Res. Notices, **18** (1998), 937–958.

[17] A. Szenes, Residue formula for rational trigonometric sums, Duke Math. J. **118** (2003), 189–228.

[18] H. Tsumura, On functional relations between the Mordell-Tornheim double zeta functions and the Riemann zeta function, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **142** (2007), 395-405.

[19] E. Witten, On quantum gauge theories in two dimensions, Comm. Math. Phys. **141** (1991), 153-209.

[20] Y. Yamasaki, Evaluations of multiple Dirichlet L-values via symmetric functions, J. Number Theory **129** (2009), 2369–2386.

[21] D. Zagier, Values of zeta functions and their applications, in 'First European Congress of Mathematics' Vol. II, A. Joseph et al. (eds.), Progr. Math. **120**, Birkhäuser, 1994, pp. 497-512.

Y. Komori
Department of Mathematics, Rikkyo University, Nishi-Ikebukuro, Toshima-ku, Tokyo 171-8501, Japan. Email: `komori@rikkyo.ac.jp`

K. Matsumoto
Graduate School of Mathematics, Nagoya University, Chikusa-ku, Nagoya 464-8602 Japan.
Email: kohjimat@math.nagoya-u.ac.jp

H. Tsumura
Department of Mathematics and Information Sciences, Tokyo Metropolitan University,
1-1, Minami-Ohsawa, Hachioji, Tokyo 192-0397, Japan. Email: tsumura@tmu.ac.jp