数理解析研究所講究録
第 1825 巻 2013 年 1-25

$\mathfrak{sl}_2$ の三項定理とその応用

Trinomial theorem for $\mathfrak{sl}_2$ and certain of its applications

梅田 亨 (京都大学 大学院理学研究科)

Tôru Umeda (Kyoto University)

0: 序 — タイトル及び動機の説明 —

0.1. 二項定理 (binomial theorem) と聞けば，数学者なら，Newton の一般二項定理

$$(1+t)^x = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{x}{n} t^n \tag{0.1}$$

をまず思うだろう．但し，二項係数は

$$\binom{x}{n} = \frac{x(x-1)\cdots(x-n+1)}{n\,!}$$

と定義される．この有用な公式自体はもちろん，今回も後に活躍する．しかし，タイトルに関わる二項定理，三項定理は，むしろ高校生の思い浮かべるものと言ってよい：

$$(x+y)^n = \sum_{p+q=n} \frac{n\,!}{p\,!\,q\,!}\, x^p y^q,$$

$$(x+y+z)^n = \sum_{p+q+r=n} \frac{n\,!}{p\,!\,q\,!\,r\,!}\, x^p y^q z^r.$$

ここで x, y, z は可換な変数だが，これを非可換にしたらどうなるか．もちろん交換関係がなければ何ともできないし，そもそも「可換でできることを非可換に移行する」などという発想は愚かで不毛である．とは言うものの，具体的な問題は身近にいくらでもある．例えば，Lie 環 $\mathfrak{g}$ とその普遍包絡環 $U(\mathfrak{g})$ に於いては，Poincaré-Birkhoff-Witt の定理 (の易しい部分) によって整列整頓された形に書ける．これは一般論だが，具体的に計算する機会は余りなく，おそらくは教科書にも例は殆ど載っていないのではないか．しかしまた，だからと言って，定理があるのだったら具体例でやってみよう，ともならない．理由は，まず動機がないし，更に，少しやってみてもすぐには予測ができない，という程度の問題であるからだろう [1]．

実は，このような「一般的定理とその具体的適用」という関係とは別の文脈で，本当の動機が現われる．つまり，直交 Lie 環 $\mathfrak{o}_{2M}$ の普遍包絡環 $U(\mathfrak{o}_{2M})$ の中心元の関係式が，或る意

[1] しかし，今や以下に具体的できれいな例が与えられるので，そのうち教科書の演習問題に載るかもしれない．

味双対的な $\mathfrak{sl}_2$ の三項定理によって支配されるのである．一種の dual pair (好一対) の現われで，Capelli 型恒等式に典型的に関わる普遍包絡環の中心元の問題である [2].

0.2. 直交 Lie 環の一つの実現は交代行列で，これは直交群を定義する対称行列が単位行列の場合である．ところで，可換変数の場合，偶数次交代行列の行列式が Pfaffian の自乗になる，という古典的によく知られた関係式がある (Jacobi の定理と呼ばれることもあるが，ここでは採らない)．実は，この非可換対応物として，直交 Lie 環の普遍包絡環における関係式があり，しかも，普遍包絡環の中心の表示としての重要な意味がある．その証明の過程で $\mathfrak{sl}_2$ の三項定理が出現したのである (Itoh-Umeda [2001]).

直交 Lie 環を交代行列として実現し，$\mathfrak{gl}_N$ の標準基底 (行列単位に対応) E_{ij} から $A_{ij} = E_{ij} - E_{ji}$ を作る．これを $N \times N$ 正方形に並べて $A = (A_{ij})_{i,j=1}^N$ とする．行列 A の成分は非可換環 $U(\mathfrak{o}_N)$ に属し，それ自体，交代的である．ところで，驚くべきことに，この A の列行列式 (column determinant) は，Capelli 恒等式と同じく対角補正の下，普遍包絡環 $U(\mathfrak{o}_N)$ の中心元を与える (Howe-Umeda [1991] Appendix)．他方，$N = 2M$ という偶数次の場合には，古典的と同様 Pfaffian という不変元があり，その関係

$$\det(A + \operatorname{diag}(M-1, M-2, \cdots, -M)) = (\operatorname{Pf} A)^2 \tag{0.2}$$

が，dual pair に付随する Capelli 恒等式の文脈から予想された (落合吾一修士論文 1996)．ここに非可換成分をもつ行列 $\Phi = (\Phi_{ij})_{1 \le i,j \le N}$ の行列式 (列行列式) と Pfaffian はそれぞれ次の式で定義される (Pfaffian の場合は $N = 2M$).

$$\det \Phi = \sum_{\sigma \in S_N} \operatorname{sgn}(\sigma)\, \Phi_{\sigma(1)1} \Phi_{\sigma(2)2} \cdots \Phi_{\sigma(N)N}; \tag{0.3}$$

$$\operatorname{Pf} \Phi = \frac{1}{2^M\, M!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{2M}} \operatorname{sgn}(\sigma)\, \Phi_{\sigma(1)\sigma(2)} \Phi_{\sigma(3)\sigma(4)} \cdots \Phi_{\sigma(2M-1)\sigma(2M)}. \tag{0.4}$$

ついでに，列行列式を対称化した行列式 Det も上の Pfaffian (0.4) と類似に

$$\operatorname{Det} \Phi = \frac{1}{N!} \sum_{\sigma, \sigma' \in \mathfrak{S}_N} \operatorname{sgn}(\sigma) \operatorname{sgn}(\sigma')\, \Phi_{\sigma(1)\sigma'(1)} \Phi_{\sigma(2)\sigma'(2)} \cdots \Phi_{\sigma(N)\sigma'(N)} \tag{0.5}$$

と定義されるが，$\mathfrak{gl}_N$ や交代行列に実現した $\mathfrak{o}_N$ の場合，よい対角補正の下で，Det は det に reduce される (もちろん，これは特別な交換関係に依存するもので，一般的な現象ではない).

0.3. さて，Itoh-Umeda による (0.2) の証明は，$2N$ 箇の形式変数 $e_1, \cdots, e_N, e_1', \cdots e_N'$ をもつ外積代数 Λ_{2N} を利用し，それよって拡大した環 $\Lambda_{2N} \otimes U(\mathfrak{o}_N)$ の中で

$$\Theta = \sum_{i,j=1}^N e_i e_j\, A_{ij}, \qquad \Theta' = \sum_{i,j=1}^N e_i' e_j'\, A_{ij}, \qquad \Xi = \sum_{i,j=1}^N e_i e_j'\, A_{ij} \tag{0.6}$$

[2]「好一対」は dual pair の訳語として日本数学会編『数学辞典』第五版に採用された．

を考えると，Θ と Θ' の M 乗の，それぞれ $e_1\cdots e_N$ または $e'_1\cdots e'_N$ の係数が $2^M M!\,\mathrm{Pf}\,A$ を与え，Ξ の N 乗の $e_1e'_1\cdots e_Ne'_N$ の係数が $N!\,\mathrm{Det}\,A$ を与えることに基づく．より正確には

$$\tau = \sum_{i=1}^{N} e_i e'_i \tag{0.7}$$

を導入して，対角補正をこめて

$$\frac{1}{2^{2M}(M!)^2}\,\Theta'^{M}\,\Theta^{M} = \frac{(-)^{\frac{N(N-1)}{2}}}{N!}\,(\Xi+(M-1)\tau)\,(\Xi+(M-2)\tau)\cdots(\Xi-M\tau) \tag{0.8}$$

を示す．符号 $(-)^{\frac{N(N-1)}{2}}$ は基底 e_i, e'_j の入れ替えから来るが，$N=2M$ なので $(-)^M$ に等しい．ここに現われる Θ,Θ',Ξ の間の交換関係は

$$[\,\Theta,\Theta'\,] = 4\tau\Xi, \qquad [\,\Theta,\Xi\,] = 2\tau\Theta, \qquad [\,\Theta',\Xi\,] = -2\tau\Theta' \tag{0.9}$$

であり，中心に属する係数 τ を除けば，本質的に $\mathfrak{sl}_2$ である．

0.4.　こう見れば (0.2) は普遍包絡環 $U(\mathfrak{sl}_2)$ での計算に帰着されることが想像できるだろう．実際，証明で本質的に使われる等式が $U(\mathfrak{sl}_2)$ での三項定理だったのである．今，$\mathfrak{sl}_2$ の標準的な基底を X,Y,H として，つまり，2×2 行列に実現されたとき，それぞれ

$$X \longleftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad Y \longleftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad H \longleftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{0.10}$$

となるものであり，これらの満たす基本交換関係が

$$[H,X] = 2X, \qquad [H,Y] = -2Y, \qquad [X,Y] = H \tag{0.11}$$

という所謂 $\mathfrak{sl}_2$-triplet をとるわけだが，(0.2) を導く三項定理とは

$$(aX+bY+cH)^n = \sum_{p+q+r=n} \frac{n\,!}{p\,!\,q\,!\,r\,!}\,a^p b^q c^r\;X^p\,(H+p+q)_r\,Y^q \tag{0.12}$$

である．但し，

$$(s)_r = s(s+1)\cdots(s+r-1) \tag{0.13}$$

は上昇階乗冪 (時に Pochhammer symbol とも呼ばれる) で，係数 a,b,c は，

$$ab + c^2 = 0 \tag{0.14}$$

という条件が置かれる．この限定の意味は，2×2 の行列に実現したとき

$$V = aX + bY + cH \longleftrightarrow \begin{bmatrix} c & a \\ b & -c \end{bmatrix} \tag{0.15}$$

が冪零，つまり $-\det V = ab + c^2 = 0$ ということである．Itoh-Umeda の応用のためには，この冪零元に対する三項定理で充分であった．半単純元に対する三項定理はより複雑な形をしているが，それについては後で述べる．

冪零 $\mathfrak{sl}_2$ 三項定理は，そのままの形で別の応用 — 橋本氏の論文 [2008] — もある．この指摘は 2005 年の数理研短期共同の成果であった．三項定理は単なる一般化の等式ではなくて，応用の必然をもった等式として存在価値があると，自ら主張しているようにも見える．

Itoh-Umeda は，上記の三項定理を，なかなか巧妙な計算によって示したが，本稿では定理とその周辺を，見通しのよい計算によって明快化する様子をお目にかけたい．応用として，所期の目的 (0.2) の証明も詳述する．実は，Itoh-Umeda でも，三項定理から (0.2) に至る最終段階で，やや不透明な計算を経由するが，その部分も含めて見晴らしがよくなるのである．基本的な考えは，形式的な指数函数により「群」という母函数の世界に持ち上げ，計算に際しては「一粒で二度美味しい」技法によって統一感を与える．

一般論なら，指数函数に乗せる際， Campbell-Hausdorff(-Dynkin) formula を思い浮かべるかもしれない．しかし，一般性があっても導くのに手間のかかる公式は，一般性の尊さという神棚に祭り，我々は我々で手軽な道具での「有酸素計算」を楽しむことにしたい．

1: 一粒で何度も美味しい計算技法

1.1 (一粒で二度美味しい $ax+b$)． まず 2 次元の Lie 環での二項定理を肩ならしとしてやってみる．と言っても，その計算は三項定理の基礎となる．非可換な 2 次元の Lie 環は，一つしかない．それは，群レベルでは $ax+b$，つまり 1 次元のアフィン変換群であり，その Lie 環も $ax+b$ と呼ばれる：考えるのは，二つの元 A, B が交換関係

$$[A, B] = B \tag{1.1}$$

を満たすものである．これは 2×2 の行列で

$$A \longleftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B \longleftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

と実現される．以下，形式的な群に移るが，それは s, t などを不定文字として，普遍包絡環 $U(\mathfrak{g})$ を形式的冪級数で係数拡大した環 $U(\mathfrak{g}) \otimes \mathbb{C}[[s,t]]$ などで計算するのである．交換関係 (1.1) を 二度 味わって群での必要な交換関係を得るというのが，ここでの 見どころ である．

1.2 $\boxed{\bullet\ 一度目}$ ： (1.1) を素直に見て，

$$(\mathrm{ad}\, A)\, B = B \tag{1.3}$$

とする．ここでカゲの声が囁くのに $\mathrm{ad}\, A$ は半単純なのでベキ函数に乗せる (固有値の差にも注意したいが，詳しいことは措く．その意味については，後の実例で見ることができる)：

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\mathrm{ad}\, A}{n} t^n B = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1}{n} t^n B \tag{1.4}$$

となる．つまり $\mathrm{ad}\, A$ が固有値 1 で B に作用しているのをそのままベキ函数に移したのである．この両辺を計算すると，古典的な Newton の二項定理 (0.1) から

$$(1+t)^{\mathrm{ad}\, A} B = (1+t)\, B \tag{1.5}$$

をとなるが，左辺は更に

$$(1+t)^A B\, (1+t)^{-A} \tag{1.6}$$

と書ける．実際，左右の掛け算作用素を L_A, R_A と書く時，$\mathrm{ad}\, A = L_A - R_A$ であり，L_A と R_A は可換 (結合法則 !) だから，普通の数のように指数法則 $(1+t)^{L_A - R_A} = (1+t)^{L_A}\,(1+t)^{-R_A}$ が適用できる．従って

$$(1+t)^A B\, (1+t)^{-A} = (1+t)\, B \tag{1.9}$$

を得る．更に左辺の共軛変換が「自己同型」であることに注意すると，もっと一般に，“任意の”函数 f に対して，

$$(1+t)^A f(B)\, (1+t)^{-A} = f((1+t)\, B) \tag{1.10}$$

が得られる．自己同型の逆を考えれば次も判る：

$$(1+t)^{-A} f(B)\, (1+t)^{A} = f((1+t)^{-1} B). \tag{1.11}$$

1.3 $\boxed{\bullet\bullet\ 二度目}$ ： 今度は同じ (1.1) で作用する側とされる側の立場を入れ替えて，

$$(-\,\mathrm{ad}\, B)\, A = B \tag{1.12}$$

と見る．もう一度作用させると

$$(-\,\mathrm{ad}\, B)^2 A = 0 \tag{1.13}$$

と，$\mathrm{ad}\,B$ は冪零に作用する．カゲの声は，この場合は普通に指数函数に乗せるように囁く：

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\,\mathrm{ad}\,B)^n}{n!}\, s^n\, A = A + sB. \tag{1.14}$$

これから (先ほどの一度目と同様の手順によって)，

$$e^{-sB}\, A\, e^{sB} = A + sB \tag{1.15}$$

を得る.「任意の」函数に移ったり，自己同型の逆の式も同様である．

1.4 ◎◎◎ $\boxed{\text{二度の美味しさを併せて味わう}}$ ◎◎◎ 以上の二つの交換関係 —— そもそも一つの式から出発したのに，違う交換関係が得られたというだけでも欺されたような「お得感」があるが —— それらを併せて，更に美味しさを倍にすることができるという一石何鳥だか判らないほど豪華な仕組みがここに現われる．うますぎる (too good to be true) のか．いや，何も後ろめたく思う必要はない．まず，(1.15) から

$$e^{-sB}\,(1+t)^A\, e^{sB} = (1+t)^{A+sB} \tag{1.16}$$

を得るが，この左辺は (1.10) を用いて

$$\begin{aligned} e^{-sB}\,(1+t)^A\, e^{sB} &= e^{-sB}\,(1+t)^A\, e^{sB}\,(1+t)^{-A}\,(1+t)^A \\ &= e^{-sB}\, e^{s(1+t)B}\,(1+t)^A \\ &= e^{stB}\,(1+t)^A \end{aligned} \tag{1.17}$$

と変形できるから，結局，

$$e^{stB}\,(1+t)^A = (1+t)^{A+sB} \tag{1.18}$$

が判る．この両辺を展開して

$$\left(\sum_{p=0}^{\infty} \frac{s^p\, B^p}{p!}\, t^p\right)\left(\sum_{q=0}^{\infty} \binom{A}{q}\, t^q\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{A+sB}{n}\, t^n \tag{1.19}$$

の t^n の係数を比較することで

$$\sum_{p+q+n} \frac{s^p}{p!\,q!}\, B^p\, A^{(q)} = \frac{(A+sB)^{(n)}}{n!} \tag{1.20}$$

が得られる．但し，$z^{(r)} = z(z-1)\cdots(z-r+1)$ は下降階乗冪 (Boole の記号) である．注意としては，(1.20) の両辺は s の多項式だから $s=1$ と置いてもよく，その時，

$$(A+B)^{(n)} = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r}\, B^r\, A^{(n-r)} \tag{1.21}$$

を得る．これが $ax+b$ Lie 環に関する二項定理である．

1.5 (Remarks) [I]: ここで注意として，(1.21) から逆にたどれば，(1.18) で $s=1$ とした

$$e^{tB}\,(1+t)^A = (1+t)^{A+B} \tag{1.22}$$

が成立する．実はそのようにしなくても (1.18) で $s=1$ を正当化する方法はあるが，細かいことは気にしないで，特殊化できるときには特殊化しておいて間違うことはないだろう．

[II]: また，(1.21) の右辺で，A を左に B を右に持ってきた式を得たいとするなら，(1.22) の右辺で

$$e^{tB}\,(1+t)^A = (1+t)^A\,(1+t)^{-A}\,e^{tB}\,(1+t)^A = (1+t)^A\,e^{\frac{t}{1+t}B} \tag{1.23}$$

と変形して

$$(1+t)^A\,e^{\frac{t}{1+t}B} = (1+t)^{A+B} \tag{1.24}$$

として展開するか，または指数に持ち上げないでも，(1.1) を $U(\mathfrak{g})$ の中で

$$AB-BA=B \implies BA=(A-1)B \tag{1.25}$$

として，(1.21) の右辺で B を右に移し

$$(A+B)^{(n)} = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r}\,(A-r)^{(n-r)}\,B^r \tag{1.26}$$

としてもよい．

[III]: ここでは，カゲの声として，半単純の場合は冪函数，冪零の場合は指数函数と使い分けた．その方が或る意味で一番簡約化された計算を導くが，もちろん指数函数に統一することもできる．二項定理 (1.21) や (1.26) の階乗冪を普通の冪で統一したいとするなら Stirling 数を使えばよいが，それよりは，(1.21) などの方がどう見ても自然であろう．

2: Heisenberg に寄り道する

2.1. 簡単な交換関係をもつ環で二項定理を試すなら，$ax+b$ よりむしろ Heisenberg の交換関係が自然かもしれない：P, Q と中心 z によって張られる 3 次元の Lie 環で，交換関係は

$$[P,Q]=z, \qquad [P,z]=0=[Q,z] \tag{2.1}$$

である．実際，それは本質的に微分と掛け算の交換関係

$$[\,\partial, x\,]=1, \qquad \partial=\frac{d}{dx} \tag{2.2}$$

であり，中心をスカラー扱いするなら，3 次元というより，本質的には 2 次元の Lie 環である．それでも具体例での実験と予測を帰納法で証明しようとすると，思った以上に手間が要る．

この Heisenberg Lie 環は，二重の意味で $\mathfrak{sl}_2$ と関係がある．一つはこれが $\mathfrak{sl}_2$ の contraction，つまり或る種の極限形，であること．もう一つは，$\mathfrak{sl}_2$ が (3 次元)Heisenberg の対称性をつかさどること，である．

効率の面から言えば二度手間となるが，実用上の認識としては若干意味が異なるかもしれないから，Heisenberg Lie 環に関する三項 (二項) 定理を重複を厭わず導いてみよう．この場合の三項定理も応用があって，橋本隆司氏の論文 [2010] で用いられている．また，直接の関係は私にとって不明だが，岡本清郷氏ら (橋本氏も共著者になっている) の経路積分法による表現の構成 (幾何学的量子化) の計算と関係がありそうなので，その意味でも「一粒で二度美味しい」技法の観点から触れておく必要があると思われる．

2.2.　既に注意したように Heisenberg Lie 環の場合，3 次元ではあるが，一つが中心元で，その部分は古典的 (高校生的) な展開で済むので実質 2 次元である．しかしまた，中心が入る分，そのままでは，一粒で二度までは味わえない．先ほどのまねをして $[P,Q]=z$ から

(2.3)
$$(\operatorname{ad} P)\,Q = z$$

を指数に乗せて

(2.4)
$$e^{sP}\,Q\,e^{-sP} = Q + sz$$

として，Q の方を指数に乗せても

(2.5)
$$e^{sP}\,e^{tQ}\,e^{-sP} = e^{t(Q+sz)}$$

つまり，

(2.6)
$$e^{sP}\,e^{tQ}\,e^{-sP}e^{-tQ} = e^{stz}$$

という Weyl の交換関係は出るが，$e^{u(P+Q)}$ には到達しない．Heisenberg の中にとどまっては，中心 z の方向にしか動かないので，これは仕方がないのである．

2.3.　例えば，この場合の二項定理は，微分作用素 $\partial + x$ の n 乗を計算して正規な形 (掛け算 x を左に，微分 ∂ を右にする) ということに相当するが，それを導出する一粒は

(2.7)
$$[\,\partial, x^2\,] = [\,\partial, x]x + x[\,\partial, x\,] = 2x$$

或いは

(2.8)
$$\left[\partial, \frac{x^2}{2}\right] = x$$

である．これから一味目

$$\left(-\operatorname{ad}\frac{x^2}{2}\right)\partial = x \implies e^{-s\frac{x^2}{2}}\,\partial\,e^{s\frac{x^2}{2}} = \partial + sx \tag{2.9}$$

と二味目

$$\left\{\begin{aligned} (\operatorname{ad}\partial)\,x^2 &= 2x \\ (\operatorname{ad}\partial)^2\,x^2 &= 2 \\ (\operatorname{ad}\partial)^3\,x^2 &= 0 \end{aligned}\right\} \implies e^{t\partial}\,x^2\,e^{-t\partial} = x^2 + 2xt + t^2 \tag{2.10}$$

が出る．尤も，二味目 (2.10) については $e^{t\partial}$ が t だけの平行移動だという意味を考えたら，計算しなくても右辺が $(x+t)^2$ となるのは判る．さて，この二度の味わいから

$$\begin{aligned} e^{t(\partial+sx)} &= e^{-s\frac{x^2}{2}}\,e^{t\partial}\,e^{s\frac{x^2}{2}} = e^{-s\frac{x^2}{2}}\,e^{s\frac{(x+t)^2}{2}}\,e^{t\partial} \\ &= e^{stx+\frac{st^2}{2}}\,e^{t\partial} = e^{stx}\,e^{t\partial}\,e^{\frac{st^2}{2}} \end{aligned} \tag{2.11}$$

と計算し，展開することで

$$(\partial + sx)^n = \sum_{p+q+2r=n} \frac{n!}{p!\,q!\,r!}\,\frac{1}{2^r}\,s^{p+r}\,x^p\,\partial^q \tag{2.12}$$

が得られる．

特に，$s=-2$ として，定数 1 に作用させれば

$$(\partial - 2x)^n\,.\,1 = \sum_{p+2r=n} \frac{n!}{p!\,r!}\,(-)^{p+r}\,2^p\,x^p \tag{2.13}$$

と n 次の Hermite 多項式の表式 (の $(-)^n$ 倍) が得られる．

2.4.　上のようにすると，少し慣れれば歩きながらでも計算できる，まさしく有酸素計算になる．同様にして Heisenberg Lie 環において $(P+Q+z)^n$ を計算することもできないわけではない．しかし，形式的には正当化できるものの，中心 z での割り算などが入り込んできて，ちょっとイヤである．よりスッキリした計算は $\mathfrak{sl}_2$ によって拡大した Lie 環の中で行うとよい．Heisenberg の (中心 z を動かさない) 自己同型群は SL_2 であり，その Lie 環 $\mathfrak{sl}_2$ は Heisenberg Lie 環に derivation として働くから，その作用で半直積を作るのである．

具体的には 0.4 節で導入した X, Y, H と P, Q の間に

$$\begin{aligned} [X,P] &= Q, & [X,Q] &= 0; \\ [Y,P] &= 0, & [Y,Q] &= P; \\ [H,P] &= P, & [H,Q] &= -Q; \end{aligned} \tag{2.14}$$

という交換関係 (z はどれとも可換) を入れることになる．

一粒で二度美味しい計算のタネは $[X,P]=Q$ で一度目は

$$(\mathrm{ad}\,X)\,P=Q\,;\qquad (\mathrm{ad}\,X)^2\,P=0 \tag{2.15}$$

から出発して

$$e^{sX}\,P\,e^{-sX}=P+sQ \tag{2.16}$$

を得て，二度目には

$$(\mathrm{ad}\,P)\,X=-Q,\qquad (\mathrm{ad}\,P)^2\,X=-z,\qquad (\mathrm{ad}\,P)^3\,X=0 \tag{2.17}$$

から出発して

$$e^{tP}\,X\,e^{-tP}=X-tQ-\frac{1}{2}\,t^2z \tag{2.18}$$

を得る．これらを併せて

$$\begin{aligned} e^{t(P+sQ)} &= e^{sX}\,e^{tP}\,e^{-sX}=e^{sX}\,e^{tP}\,e^{-sX}\,e^{-tP}\,e^{tP}\\ &= e^{sX}\,e^{-s\left(X-tQ-\frac{1}{2}t^2z\right)}\,e^{tP}\\ &= e^{stQ}\,e^{\frac{1}{2}st^2z}\,e^{tP}\end{aligned} \tag{2.19}$$

である．最初にいた X は触媒の役割だけ果たして消えてしまった．これらと前の微分作用素での計算の対応は明らかであろう．ここで $s=1$ と置き，さらに P と Q の入れ替えは $z\mapsto -z$ をもたらすことに注意し，ついでに z に係数も入れておくと

$$e^{t(P+Q+uz)}=e^{tP}\,e^{\left(ut-\frac{1}{2}t^2\right)z}\,e^{tQ} \tag{2.20}$$

を得る．

2.5 (Remarks) [I]: 微分作用素の計算と $\mathfrak{sl}_2$ を用いて拡大するものの関係とは，つまり前者が $\mathfrak{sl}_2$ の oscillator 表現として現われているということである．即ち，

$$X\longmapsto\frac{x^2}{2},\qquad Y\longmapsto-\frac{\partial^2}{2},\qquad H\longmapsto x\partial+\frac{1}{2} \tag{2.21}$$

が $\mathfrak{sl}_2$ の表現を与え，さらに

$$P\longmapsto\partial,\qquad Q\longmapsto x \tag{2.22}$$

と整合的ということである．三項 (二項) 定理のためには，$\mathfrak{sl}_2$ 全てを考える必要はないが，考えを明瞭にするにはこの方がよいだろう．

[II]: Hermite 多項式 $H_n(x)$, Hermite 函数 $\mathcal{H}_n(x)$ との関係をこの文脈で注意しておく. 定義として

$$H_n(x) = e^{x^2}\,(-\partial)^n \,.\, e^{-x^2} \tag{2.23}$$

を採用する. 下付きのドット . は左の作用素が右の函数への作用を示し, 函数は, 掛け算作用素を意味する. このとき, 微分作用素としては

$$e^{x^2}\,\partial\, e^{-x^2} = \partial - 2x \tag{2.24}$$

だから $H_n(x) = (-)^n\,(\partial - 2x)^n \,.\, 1$ と Hermite 多項式とは定数 1 に, この微分作用素の n 乗を作用させたもの, つまりその n 乗の定数項にほかならず, それが (2.13) である.

また, (2.23) を足し合せて指数的母函数を作ると

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)\,\frac{t^n}{n!} = e^{x^2}\,e^{-t\partial}\,e^{-x^2} \,.\, 1 \tag{2.25}$$

だが, 右辺の作用素の部分を交換関係 (2.10) (もしくは平行移動の意味をつかって) 変形してやれば

$$e^{x^2}\,e^{-t\partial}\,e^{-x^2} = e^{2tx-t^2}\,e^{-t\partial} \tag{2.26}$$

なので, これを定数 1 に作用させれば

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)\,\frac{t^n}{n!} = e^{2tx-t^2} \tag{2.27}$$

という表示が得られる. だから Heisenberg の二項定理とは Hermite 多項式の計算と実質殆ど並行なものである.

ついでに Hermite 函数は $\mathcal{H}_n(x) = H_n(x)\,e^{-\frac{x^2}{2}}$ と定義すると,

$$e^{\frac{x^2}{2}}\,(-\partial)^n\,e^{-\frac{x^2}{2}} = (-\partial + x)^n \tag{2.28}$$

を $e^{-\frac{x^2}{2}}$ に作用させたものとなる. Lie 理論的に話を展開してこれらの函数の基本的性質を導くことはできる. しかし, 知られていることだろうし, 本筋から外れるのでここでは措く.

[III]: 橋本氏の論文 [2010] では skew Capelli element の表現の母函数表示を扱っている. 計算の実質的な部分は上の (2.20) である. 本稿の最初の部分の動機の説明をした (0.6) などと同様な外積代数での定式化・計算を扱うことになる (が, 交換関係が $\mathfrak{sl}_2$ ではなくて Heisenberg なのである).

元の設定ではない (なので少し記号を変える) が，本質的に同じことを示す：$N=2M$ として N 次交代行列の全体 Alt_N の座標 $t_{ij}=-t_{ji}$ と対応する偏微分 $\partial_{ij}=-\partial_{ji}$ をとる．ここでの目標は

$$\Psi(u)=\begin{bmatrix} T & u\,1_N \\ -u\,1_N & D \end{bmatrix} \tag{2.29}$$

という $2N\times 2N$ 交代行列の Pfaffian の計算である．ここで，$T=(t_{ij})_{i,j=1}^N$ 及び $D=(\partial_{ij})_{i,j=1}^N$ は座標と偏微分作用素を並べた $N\times N$ の交代行列であり，u は可換なパラメータ (文字) である．そこで $2N$ 箇の交代的な形式変数 $e_1,\cdots,e_N$, $e'_1,\cdots,e'_N$ を用意して，$\Lambda_{2N}\otimes\mathcal{PD}(\mathrm{Alt}_N)$ の中で

$$\theta_+=\sum_{1\le i,j\le N} e_ie_j\,t_{ij},\qquad \theta_-=\sum_{1\le i,j\le N} e'_ie'_j\,\partial_{ij},\qquad \tau=\sum_{1=i}^{N} e_ie'_i \tag{2.30}$$

を考える．この時，交換関係は

$$[\theta_+,\theta_-]=2\tau^2 \tag{2.31}$$

となる．従って，τ はもちろん central なので，これらは本質的に Heisenberg である．Pfaffian は $\Omega=\theta_++\theta_-+2u\tau$ に対し，その N 乗から得られる．或いは，その代わりに e^Ω を計算することにして，(2.20) を用いる．

本来 τ は冪零だから，それでの割り算は許されないが，形式的に $P=\theta_+/\tau$, $Q=\theta_-/\tau$ とすると，$[P,Q]=2$ で $z=2$ として，上の設定にあてる．すると $\Omega=\tau(P+Q+u\tau z)$ なので $t=\tau$ として (2.20) を適用して

$$e^\Omega=e^{\theta_+}\,e^{2u\tau-\tau^2}\,e^{\theta_-} \tag{2.32}$$

が得られる．両辺の外積代数の最高次 $e_1\cdots e_N\,e'_1\cdots e'_N$ の係数を比べると，左辺からは $2^N\,\mathrm{Pf}\,\Psi(u)$ がでる．また，右辺の真ん中の因子は (2.27) から

$$e^{2u\tau-\tau^2}=\sum_{m=0}^{N} H_m(u)\,\frac{\tau^m}{m!} \tag{2.33}$$

となる．右辺では外積代数での形式変数の入り方の勘定から，最高次の項に寄与するのは

$$\sum_{2r+m=N}\frac{\theta_+^r}{r!}\,\frac{\tau^m}{m!}\,\frac{\theta_-^r}{r!}\,H_m(u) \tag{2.34}$$

となる．両辺を比較すると (計算の詳細は省略するが)

$$(-)^{\frac{N(N-1)}{2}}\,\mathrm{Pf}\,\Psi(u)=\sum_{r=0}^{M}(-)^r\,\Gamma_r\,2^{-N+2r}\,H_{N-2r}(u) \tag{2.35}$$

となる．但し，

$$\Gamma_r = \sum_{|I|=2r} \mathrm{Pf}\, T_I \cdot \mathrm{Pf}\, D_I \tag{2.35}$$

は r 次 skew Capelli element の表現で，T_I，D_I は添え字の部分集合 I に対応する小行列．

3: $\mathfrak{sl}_2$ の三項定理 — nilpotent case —

3.1. 一粒で二度美味しい $ax+b$ 公式 ((1.22)，(1.24)) を思い出しておく：$[A, B] = B$ の時

$$(1+t)^{A+B} = e^{tB}\,(1+t)^A = (1+t)^A\, e^{\frac{t}{1+t}B}. \tag{3.0}$$

これ一つを何度も使うことで，目的に達するのである．

Lie 環 $\mathfrak{sl}_2 = \mathbb{C}X + \mathbb{C}Y + \mathbb{C}H$ の中に，いくつも $ax+b$ 部分 Lie 環が入っている．証明の要となるのは次のものである (これは Itoh-Umeda で用いられたもの)．

$$\xi = X + \frac{H}{2}, \qquad \eta = Y - \frac{H}{2} \tag{3.1}$$

と置く．この時，交換関係は

$$[\xi, \eta] = \xi - \eta \tag{3.2}$$

である．つまり ξ と η は 2 次元の Lie 環，即ち $ax+b$ の Lie 環をなす．これを含めて，いくつか $ax+b$ を書き出してみよう：

(3.3)

	A	B	$A+B$
(1)	$\frac{H}{2}$	X	ξ
(2)	$-\frac{H}{2}$	Y	η
(3)	$-\xi$	$\xi-\eta$	$-\eta$
(4)	$-\eta$	$\eta-\xi$	$-\xi$

ここで，見易さのため $\nu = \xi - \eta$ と置いて，(4) に (3.0) を適用すると，

$$(1+t)^{-\xi} = e^{-t\nu}\,(1+t)^{-\eta} \tag{3.4}$$

つまり，

$$e^{-t\nu} = (1+t)^{-\xi}\,(1+t)^{\eta} \tag{3.5}$$

であるが，この右辺に (1)，(2) を各々用いると

$$(1+t)^{-\xi}\,(1+t)^{\eta} = e^{\frac{t}{1+t}X}\,(1+t)^{-\frac{H}{2}}\cdot(1+t)^{-\frac{H}{2}}\,e^{\frac{t}{1+t}Y} \tag{3.6}$$

となって

$$e^{-t\nu} = e^{-\frac{t}{1+t}X}\;(1+t)^{-H}\;e^{\frac{t}{1+t}Y} \tag{3.7}$$

を得る．ここで $t\mapsto -t$ とパラメータを反転すると

$$e^{t\nu} = e^{\frac{t}{1-t}X}\;(1-t)^{-H}\;e^{-\frac{t}{1-t}Y} \tag{3.8}$$

となる．左辺の $\nu=\xi-\eta$ を X,Y,H で書くと

$$\nu = X - Y + H \tag{3.9}$$

で，これは冪零である．

一般の冪零元 $V=aX+bY+cH$，但し $ab+c^2=0$，に対して同様の公式はすぐに出る．まず，$c=0$ なら $a=0$ または $b=0$ であって，既に出ている (3.0) 以上に何もすることはない．そこで $c\neq 0$ の下

$$\left[\frac{a}{c}X,\ -\frac{b}{c}Y\right] = H \tag{3.10}$$

だから，X,Y を置き換えて (3.8) を適用すると

$$e^{t\left(\frac{a}{c}X+\frac{b}{c}Y+H\right)} = e^{\frac{t}{1-t}\frac{a}{c}X}\;(1-t)^{-H}\;e^{\frac{t}{1-t}\frac{b}{c}Y} \tag{3.11}$$

であり，更に t を ct で置き換えれば

$$e^{tV} = e^{\frac{t}{1-ct}aX}\;(1-ct)^{-H}\;e^{\frac{t}{1-ct}bY} \tag{3.12}$$

が得られる．群論的には Gauss 分解であるが，今の場合は特にこれは冪零元に対する三項定理の群対応物であり，両辺を展開すると，普通の意味の三項定理 (0.12) がでる．

3.2. 上の Gauss 分解 (3.12) の応用として，e^{uX} と e^{vY} の交換関係が導ける (u,v は文字)．

まず，

$$(\operatorname{ad}Y)\,X=-H,\qquad (\operatorname{ad}Y)^2\,X=-2Y,\qquad (\operatorname{ad}Y)^3\,X=0 \tag{3.13}$$

だから，

$$e^{v\,\operatorname{ad}Y}X = X - vH - v^2Y \tag{3.14}$$

であり，この右辺は冪零である (冪零な X の共軛だから当然). 従って，それを指数に乗せたものの Gauss 分解は (3.12) から判る．具体的に書けば

(3.15)
$$e^{vY}\,e^{uX}\,e^{-vY} = e^{\frac{u}{1+uv}X}\,(1+uv)^{-H}\,e^{\frac{-uv^2}{1+uv}Y}$$

であり，左辺の e^{-vY} を右辺に移せば,

(3.16)
$$e^{vY}\,e^{uX} = e^{\frac{u}{1+uv}X}\,(1+uv)^{-H}\,e^{\frac{v}{1+uv}Y}$$

これを展開すれば Y の冪と X の冪の積の順序を正規の順に並べる公式が得られる：

(3.17)
$$Y^n\,X^m = \sum_{\substack{p+r=m\\ q+r=n}} (-)^r\,\frac{m!\,n!}{p!\,q!\,r!}\,X^p\,(H+p+q)_r\,Y^q.$$

3.3. Remark: 表 (3.3) の (3) や (4) で B の方は定数倍を変えても $[A,B]=B$ は変わらないわけだから，例えば κ をパラメータとして $A=\eta$, $B=\kappa(\xi-\eta)$ とすると，$A+B=\kappa\xi+(1-\kappa)\eta$ で，これは半単純である $(-\det(A+B)=1/4)$. これに (3.0), (3.8) その他の公式を適用すると，半単純な場合にも Gauss 分解が計算できる．ただし，パラメータは κ 一つしか入っていない．一般には det を決めても半単純元は二つパラメータをもつので，充分一般ではない．後にはこの一般な場合に Gauss 分解を与えるので，この特殊な場合の具体形は省略するが，今の手持ちの状態でも semi-simple case が入ってきていることだけ注意しておきたい．

4: Gauss 分解とその応用

4.0 (今までのまとめ)：

- [I] 冪零の場合の Gauss 分解： $V=aX+bY+cH$ で $ab+c^2=0$ の場合

(3.12 bis)
$$e^{tV} = e^{\frac{t}{1-ct}aX}\,(1-ct)^{-H}\,e^{\frac{t}{1-ct}bY}$$

- [II] 交換関係：

(3.16 bis)
$$e^{vY}\,e^{uX} = e^{\frac{u}{1+uv}X}\,(1+uv)^{-H}\,e^{\frac{v}{1+uv}Y}$$

- [III] より明らかな交換関係：

(4.1)
$$\gamma^H\,X\,\gamma^{-H} = \gamma^2\,X$$

(4.2)
$$\gamma^H\,Y\,\gamma^{-H} = \gamma^{-2}\,Y$$

これは，例えば (1.6) の適用で，γ は意味のある形式的な量とする．

4.1 (Gauss 分解の乗法則)：以上の計算規則 (交換関係) [II]，[III] があると Gauss 分解に設定した (形式的) 群の乗法則が得られる：$\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ $(i = 1, 2, 3)$ を形式的な量として

$$g_i = e^{\frac{\alpha_i}{\gamma_i} X} \, \gamma_i^{-H} \, e^{\frac{\beta_i}{\gamma_i} Y} \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{4.3}$$

を考える．これに対し，$g_3 = g_1 g_2$ のとき，$(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$ を $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ と $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ で書くのは，まず，

$$\gamma_3 = \gamma_1 \gamma_2 + \beta_1 \alpha_2 \tag{4.4.1}$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{\gamma_1} (\alpha_1 \gamma_3 + \alpha_2) \tag{4.4.2}$$

$$\beta_3 = \frac{1}{\gamma_2} (\beta_1 + \beta_2 \gamma_3) \tag{4.4.3}$$

と計算される．後ろの (4.4.2)，(4.4.3) の中の γ_3 は (4.4.1) を用いて書き換えられるが，形を整えるため，

$$\gamma_1' = \frac{1}{\gamma_1} (1 + \alpha_1 \beta_1) \tag{4.5.1}$$

$$\gamma_2' = \frac{1}{\gamma_2} (1 + \alpha_2 \beta_2) \tag{4.5.2}$$

と置くと，

$$\alpha_3 = \alpha_1 \gamma_3 + \gamma_1' \alpha_2 \tag{4.6.1}$$

$$\beta_3 = \beta_1 \gamma_2' + \gamma_1 \beta_2 \tag{4.6.2}$$

となる．

4.2 (Gauss 分解の乗法則の応用)：ここでは Itoh-Umeda の (0.2) または (0.8) を導く．しかし，それは直接，指数型の三項定理 (=Gauss 分解) を適用できる形になっていないので，その下準備をする．外積代数での定式化では，$U(\mathfrak{sl}_2)$ での共軛は形式変数へ移せる．従って，例えば最高次の元の場合は，共軛で定数倍しか変わらない．そこで，基本的な X, Y を共軛で移し，どの程度に変形できるか見るという工夫をする．

普通のスカラーを成分に持つ 2×2 可逆行列

$$h = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \tag{4.7}$$

をとり，$\Delta = \det h = ad - bc$ と置くと，

$$h^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \tag{4.8}$$

であるが，X, Y をそれぞれ 2×2 だと思って共軛 $X^* = hXh^{-1}$，$Y^* = hYh^{-1}$ を考え，分母を除いて，その Δ 倍の冪零元を，それぞれ V_1, V_2 と置く：念のため，行列計算をしてみると

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -ac & a^2 \\ -c^2 & ac \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} bd & -b^2 \\ d^2 & -bd \end{bmatrix}$$

なので

$$\begin{aligned} V_1 &= a^2X - c^2Y - acH \\ V_2 &= -b^2X + d^2Y + bdH \end{aligned} \tag{4.9}$$

と置く．もちろん二つとも冪零である．これらを指数化して

$$\begin{aligned} g_1 &= e^{sV_1} = e^{\frac{\alpha_1}{\gamma_1}X}\ \gamma_1^{-H}\ e^{\frac{\beta_1}{\gamma_1}Y} \\ g_2 &= e^{tV_2} = e^{\frac{\alpha_2}{\gamma_2}X}\ \gamma_2^{-H}\ e^{\frac{\beta_2}{\gamma_2}Y} \end{aligned} \tag{4.10}$$

とすると，(3.12) より

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= 1 - ac\,s, \qquad & \alpha_1 &= a^2\,s, \qquad & \beta_1 &= -c^2\,s \\ \gamma_2 &= 1 + bd\,t, \qquad & \alpha_2 &= -b^2\,t, \qquad & \beta_2 &= d^2\,t \end{aligned} \tag{4.11}$$

であり，定義 (4.5.1)，(4.5.2) から

$$\gamma_1' = 1 + ac\,s, \qquad \gamma_2' = 1 - bd\,t \tag{4.12}$$

となる．この g_1 と g_2 の積を g_3 として，その Gauss 分解を考えると (4.4.1) – (4.6.2) から

$$\begin{aligned} \gamma_3 &= 1 - ac\,s + bd\,t - bc\,\Delta st \\ \alpha_3 &= a^2\,s - b^2\,t + ab\,\Delta\,st \\ \beta_3 &= -c^2\,s + d^2\,t - cd\,\Delta\,st \end{aligned} \tag{4.13}$$

となる．

4.3 (特定の constraint)：　前節の状況で $\beta_3 = 0$ という制約を加えて，パラメータ s と t の間の関係を見る．まず，$\beta_3 = 0$ は (4.4.3) から $\gamma_3 = -\beta_2/\beta_1$ を導くが，(4.11) を用いて

$$\gamma_3 = \frac{c^2}{d^2}\,\frac{s}{t} \tag{4.14}$$

となる．一方，(4.13) を用いると，$\beta_3 = 0$ から

$$t = \frac{c^2\, s}{d\,(d - c\,\Delta\, s)} \tag{4.15}$$

を得る．これと (4.14) を併せれば

$$\gamma_3 = 1 - \frac{c}{d}\,\Delta\, s \tag{4.16}$$

である．またこのとき，(4.13) から

$$\frac{\alpha_3}{\gamma_3} = \frac{s\,\Delta\,(\Pi - ac\,\Delta\, s)}{(d - c\Delta\, s)^2}, \tag{4.17}$$

但し

$$\Delta = ad - bc, \qquad \Pi = ad + bc \tag{4.18}$$

となる．

同じことだが，パラメータを少し変えて

$$u = \Delta s, \qquad v = \Delta t \tag{4.19}$$

と置くと，

$$g_1 = e^{u\,X^*}, \qquad g_2 = e^{v\,Y^*} \tag{4.20}$$

であり，パラメータの関係

$$v = \frac{c^2\, u}{d\,(d - c\,u)} \tag{4.21}$$

及び $g_3 = g_1\, g_2$ の Gauss 分解に現われる量は

$$\gamma_3 = 1 - \frac{c}{d}\,u, \qquad \frac{\alpha_3}{\gamma_3} = \frac{u\,(\Pi - ac\,u)}{(d - c\,u)^2} \tag{4.22}$$

と書ける．

例えば，具体的に

$$h = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \Delta = 2, \qquad \Pi = 0 \tag{4.23}$$

なら

$$v = \frac{u}{1 - u} \tag{4.24}$$

及び

$$\gamma_3 = 1 - u, \qquad \frac{\alpha_3}{\gamma_3} = -\frac{u^2}{(1-u)^2} \tag{4.25}$$

となる．従って，この場合，

$$e^{uX^*} e^{\frac{u}{1-u} Y^*} = e^{-\frac{u^2}{(1-u)^2} X} (1-u)^{-H} \tag{4.26}$$

が得られた．但し

$$X^* = hXh^{-1} = \frac{1}{2}(X - Y + H), \qquad Y^* = hYh^{-1} = \frac{1}{2}(-X + Y + H) \tag{4.27}$$

である．

4.4 (非可換版 $\mathrm{Pf}^2 = \det$ の証明)： (0.2) 節のように外積代数を用いて係数拡大した中で，交換関係 (0.9) を見ると Θ, Θ', Ξ が本質的に $\mathfrak{sl}_2$ だと判っているが，より精確な対応を述べる．既に 2 節で Heisenberg に寄り道したときに，若干の illegal な記法を用いたが (実際は形式的には許されない分母も，最終的な形では分母が払われてでてくるので問題はない)，それと同様に次の対応

$$X = -\frac{\Theta'}{2\tau}, \qquad Y = \frac{\Theta}{2\tau}, \qquad H = \frac{\Xi}{\tau} \tag{4.28}$$

を考える．前節の特定の h によって，共軛をとると

$$\begin{aligned} X^* &= \frac{1}{2}(X - Y + H) = -\frac{1}{4\tau}(\Theta^* + \Theta - 2\Xi) \\ Y^* &= \frac{1}{2}(-X + Y + H) = \frac{1}{4\tau}(\Theta^* + \Theta + 2\Xi) \end{aligned} \tag{4.29}$$

と対応する．このように $\mathfrak{sl}_2$ が直交 Lie 環 $\mathfrak{o}_N$ から (0.6) のようにして得られる場合は，共軛変換が，形式変数の線型変換から得られることが判る．一般的な定式化は Itoh-Umeda の第 1 節にあるが，ここでは上の特殊な変換に対して見ておけば充分である．

つまり h に対応して

$$\begin{aligned} f_i &= e_i + e'_i \qquad (i = 1, \cdots, N) \\ f'_i &= -e_i + e'_i \qquad (i = 1, \cdots, N) \end{aligned} \tag{4.30}$$

として

$$\Theta^* = \sum_{i,j=1}^{N} f_i f_j A_{ij}, \qquad \Theta^{*\prime} = \sum_{i,j=1}^{N} f'_i f'_j A_{ij} \tag{4.31}$$

と置くと,

$$\Theta^* = \Theta + \Theta' + 2\Xi, \qquad \Theta^{*\prime} = \Theta + \Theta' - 2\Xi \tag{4.32}$$

なので

$$X^* = -\frac{\Theta^{*\prime}}{4\tau}, \qquad Y^* = \frac{\Theta^*}{4\tau} \tag{4.33}$$

となっている.

注意： 上の (4.33) は

$$X^* = -\frac{\Theta^{*\prime}}{2\tau^*}, \qquad Y^* = \frac{\Theta^*}{2\tau^*} \tag{4.34}$$

但し,

$$\tau^* = \sum_{i=1}^{N} f_i f_i' = 2\tau \tag{4.35}$$

と書くと, 対応 (4.28) との整合性がはっきりする.

以上の対応で (4.26) を $u = \tau$ として書くと

$$e^{-\frac{\Theta^{*\prime}}{4}} e^{\frac{1}{1-\tau}\frac{\Theta^*}{4}} = e^{-\frac{\tau}{(1-\tau)^2}\frac{\Theta}{2}} (1-\tau)^{-\frac{\Xi}{\tau}} \tag{4.36}$$

が得られる. 両辺の指数函数を展開し, $(1-\tau)^M$ を掛けると, 左辺は

$$\sum_{m,n=1}^{M} \frac{(-)^m}{2^{2m}\,2^{2n}} \frac{\Theta^{*\prime\,m}}{m!} \frac{\Theta^{*\,n}}{n!} (1-\tau)^{M-n} \tag{4.37}$$

であり, 右辺は

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{(-\tau)^k}{2^k} \frac{\Theta^k}{k!} (1-\tau)^{-\frac{\Xi}{\tau}-2k+M} \tag{4.38}$$

である. 両辺で, 外積の最高次の項を取り出す時, 形式変数の勘定から, 左辺では $m = n = M$ のものが, 右辺では $k = 0$ のもののみが寄与することが判る. つまり, 左辺では

$$\frac{(-)^M}{2^{4M}} \frac{\Theta^{*\prime\,M}}{M!} \frac{\Theta^{*\,M}}{M!} \tag{4.39}$$

だが, これの $f_1 \cdots f_N \cdot f_1' \cdots f_N'$ の係数を見ると

$$(-)^M \frac{1}{2^{2M}} (\mathrm{Pf}\, A)^2 \tag{4.40}$$

であり，$e_1 \cdots e_N \cdot e'_1 \cdots e'_N$ に直すと，$(\det h)^N = 2^N$ 倍が掛る．一方の右辺については $k=0$ の項である

$$(4.41) \qquad (1-\tau)^{-\frac{\Xi}{\tau}+M} = \sum_{r=0}^{N} \binom{-\frac{\Xi}{\tau}+M}{r} (-\tau)^r = \sum_{r=0}^{N} \left(\frac{\Xi}{\tau} - M\right)_r \frac{\tau^r}{r!}$$

に外積の最高次があるが，それは $r=N$ の

$$(4.42) \qquad \frac{1}{N!}\,(\,\Xi - M\tau\,)\,(\,\Xi - (M-1)\tau\,) \cdots (\,\Xi + (M-1)\tau\,)$$

で，$e_1 \cdots e_N \cdot e'_1 \cdots e'_N$ の係数は

$$(4.43) \qquad (-)^{\frac{N(N-1)}{2}}\ \mathrm{Det}(A + \mathrm{diag}(M-1, M-2, \cdots, -M))$$

だから所期の目的である Pfaffian と行列式の関係を示す (0.2) が得られた：

$$(0.2\ \mathrm{bis}) \qquad (\mathrm{Pf}\,A)^2 = \mathrm{Det}(A + \mathrm{diag}(M-1, M-2, \cdots, -M))$$

5: $\mathfrak{sl}_2$ の三項定理 — semi-simple case —

5.0 (半単純元に対する Gauss 分解 (0))：「群」レベルでは既に 3.3 節で注意したように，三項定理対応物である Gauss 分解の特別な場合は得られる．類似の考え方で，まず Gauss 分解を導こう．

半単純元の代表として $H/2$ をとる．2 で割っているのは，固有値の差を 1 とするためである．これを共軛で移して一般の半単純元にすることができる．但し，もちろん，det は 1/4 と固定したものである．

簡単な計算で

$$(5.0) \qquad e^{\lambda\ \mathrm{ad}\,X}\, e^{\mu\ \mathrm{ad}\,Y}\, \frac{H}{2} = \mu Y + (1+2\lambda\mu)\,H - \lambda(1+\lambda\mu)\,X$$

と判るので，逆に一般の半単純元を

$$(5.1) \qquad L = aX + bY + cH, \qquad \delta = \sqrt{ab + c^2}$$

と置いて，$L/2\delta$ が $H/2$ の共軛になるようにパラメータ λ, μ を逆に求めると

$$(5.2) \qquad \lambda = \frac{c-\delta}{b}, \qquad \mu = \frac{b}{2\delta}$$

となる (半単純なので $\delta \neq 0$)．これから，

$$(5.3) \qquad e^{\lambda X}\, e^{\mu Y}\, (1-t)^{-\frac{H}{2}}\, e^{-\mu Y}\, e^{-\lambda X} = (1-t)^{-\frac{L}{2\delta}}$$

となる．4 節最初にまとめた交換関係を用いて左辺を Gausu 分解の形に変形すると

$$(5.4)\qquad (1-t)^{-\frac{L}{2\delta}} = e^{\frac{t}{1-Jt}\frac{a}{2\delta}X}\,(1-Jt)^{-H}\,(1-t)^{\frac{H}{2}}\,e^{\frac{t}{1-Jt}\frac{b}{2\delta}Y}$$

となる．但し

$$(5.5)\qquad J = \frac{c+\delta}{2\delta}$$

である．これを展開すると，一つの三項定理が得られる．

5.1 (半単純元に対する Gauss 分解 (1))：最初の段階として冪函数と指数函数の使い分けは，見通しのよい計算の仕方を与えるが，一旦それが得られれば，指数函数として統一する別の形にするのも悪くはない．

例えば，$t = 1 - e^{-2\delta x}$ とパラメータ t を x に変えると (5.4) は，

$$(5.6)\qquad e^{xL} = e^{\frac{v}{u-cv}\,aX}\ (u-cv)^{-H}\ e^{\frac{v}{u-cv}\,bY}$$

但し

$$(5.7)\qquad u = u(x) = \cosh(\delta x), \qquad v = v(x) = \frac{\sinh(\delta x)}{\delta}$$

と書き換えられるが，$\delta \to 0$ の時には $u(x) \to 1$, $v(x) \to x$ と冪零の場合 (3.12) への極限移行が見易い形になる：(比較のため t を x に変えて並べて書いてみる)

$$(3.12\ \mathrm{bis})\qquad e^{xV} = e^{\frac{x}{1-cx}\,aX}\ (1-cx)^{-H}\ e^{\frac{x}{1-cx}\,bY}$$

5.2 (半単純元に対する Gauss 分解 (2))：　さらに

$$(5.8)\qquad y = \delta\coth(\delta x) = \frac{\delta\cosh(\delta x)}{\sinh(\delta x)} = \frac{u}{v}$$

と置いて $z^{-1} = y - c = (u-cv)/v$ とする．つまり，

$$(5.9)\qquad e^{2\delta x} = \frac{y+\delta}{y-\delta} = \frac{z^{-1}+c+\delta}{z^{-1}+c-\delta} = \frac{1+(c+\delta)z}{1+(c-\delta)z}$$

とする．残りは v を z で表わせばよいが，

$$(5.10)\qquad v = \frac{e^{2\delta x}-1}{2\delta\, e^{\delta x}} = \frac{\dfrac{y+\delta}{y-\delta}-1}{2\delta\left(\dfrac{y+\delta}{y-\delta}\right)^{1/2}} = \frac{1}{((y-\delta)(y+\delta))^{1/2}} = \frac{1}{(y^2-\delta^2)^{1/2}}$$

よって,

$$(5.11)\qquad \begin{aligned}(u-cv)^{-1} &= zv^{-1} = z\left((z^{-1}+c)^2-\delta^2\right)^{1/2}\\ &= (1+2cz+(c^2-\delta^2)z^2)^{1/2}\\ &= (1+2cz-abz^2)^{1/2}\end{aligned}$$

を用いれば

$$(5.12)\qquad \left(\frac{1+(c+\delta)z}{1+(c-\delta)z}\right)^{\frac{L}{2\delta}} = e^{azX}\,(1+2cz-abz^2)^{\frac{H}{2}}\,e^{bzY}$$

が得られる. 左辺の L に対して二つの 1 次式 $1+(c+\delta)z$ と $1+(c-\delta)z$ の比が現われているのに対し, 右辺の H に対しては, その 1 次式の積が現われている. (5.12) のような形で, より複雑な式も, おそらく無数に作れるのではないかと思うが, 今のところ, 積極的な意義が見いだせないので, その可能性に言及するにとどめる.

5.3 (半単純元に対する三項定理) : 上で見た群レベルの三項定理, つまり Gauss 分解の各々を展開すると, 見かけ上異なった三項定理が得られる. その場合どこかには Gauss の超幾何級数 ${}_2F_1$ が現われる. その理由は, 一次分数式や二次式の冪を含む

$$(5.13)\qquad (1-\alpha t)^{-Z}\,(1-\beta t)^{-W}$$

という式で, t^n の係数が

$$(5.14)\qquad \alpha^n\,\frac{(Z)_n}{n!}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}-n,\,W\\-Z-n+1\end{matrix};\alpha^{-1}\beta\right)$$

と表わされ, 特に

$$\left(\frac{1+\alpha t}{1+\beta t}\right)^{Z}$$

の展開で t^n の係数は

$$\alpha^n\binom{Z}{n}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}Z,\,-n\\Z-n+1\end{matrix};\alpha^{-1}\beta\right)$$

と書けること, 及び

$$(1-pt-qt^2)^{-Z}$$

での t^n の係数は

$$p^n\,\frac{(Z)_n}{n!}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}-\frac{n}{2},\,-\frac{n-1}{2}\\-Z-n+1\end{matrix};2^2p^{-2}q\right)$$

と書けることにある. これらを用いれば展開の具体的な形が得られる.

例えば最初の (5.4) からは

$$
L(L+2\delta)\cdots(L+2\delta(n-1)) =
$$

(5.15)
$$
\sum_{p+q+r=n} \frac{n!}{p!q!r!} (aX)^p \left(-\frac{H}{2}\right)_r (2\delta)^r {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -r, -H-p-q \\ -\frac{H}{2}-r+1 \end{matrix} ; \frac{c+\delta}{2\delta} \right) (bY)^q
$$

が得られる．もちろん (5.12) からも類似だがもう少し複雑な式が得られる．このような三項定理では左辺の L の多項式と右辺の H の多項式が，それぞれ変化する．三番目の (5.12) からは，右辺の L 左辺の H とも超幾何で二項型の多項式の形となる．これが一番バランスがとれた形かもしれない．二番目の (5.6) では左辺は普通の冪だが，右辺により複雑なものが現われる (それは $ax+b$ ですら Stirling 数が関係したものになるから，その類似と言える)．他にもよりよいものがあるのかもしれないが，今のところは決定版と思えるものがないので，このような各種の可能性の並記にとどめておく．

6: $\mathfrak{sl}_2$ の contraction

6.1. 群或いは Lie 環の交換関係にパラメータを入れて，その極限形が別の群乃至は Lie 環の交換関係を与えるとき，その変形を contaction という．この言葉は修士のころ見た Robert Hermann の本で読んだが，誰の提唱したものかはよく調べていない．

ここでは具体的に $\mathfrak{sl}_2$ が 3 次元の Heisenberg Lie 環に変形されるさまを見て，それが三項定理に於いても変形 (極限) を与えることを確認する．一種の合流操作であるが，母函数レベルで見るので易しい．

標準的な X, Y, H に対し，パラメータ ε を以って

$$
P_\varepsilon = \varepsilon X, \qquad Q_\varepsilon = \varepsilon Y, \qquad z_\varepsilon = \varepsilon^2 H
$$

と置くと，交換関係は

$$
[P_\varepsilon, Q_\varepsilon] = z_\varepsilon, \qquad [z_\varepsilon, P_\varepsilon] = 2\varepsilon^2 P_\varepsilon, \qquad [z_\varepsilon, Q_\varepsilon] = -2\varepsilon^2 Q_\varepsilon
$$

となる．これから，$\varepsilon \to 0$ の極限で z_ε は中心に移行し，P_0, Q_0, z_0 は恰度 Heisenberg Lie 環になると考えられる．そこで簡単のため $L_\varepsilon = P_\varepsilon + Q_\varepsilon$ と置いて，e^{tL_ε} の Gauss 分解を (5.6) を用いて計算する：

$$
\begin{aligned}
e^{tL_\varepsilon} = e^{t\varepsilon(X+Y)} &= e^{\tanh(t\varepsilon)X} \cosh(t\varepsilon)^{-H} e^{\tanh(t\varepsilon)Y} \\
&= e^{\frac{\tanh(t\varepsilon)}{\varepsilon}P_\varepsilon} \cosh(t\varepsilon)^{-\frac{z_\varepsilon}{\varepsilon^2}} e^{\frac{\tanh(t\varepsilon)}{\varepsilon}Q_\varepsilon}.
\end{aligned}
$$

ここで $\varepsilon \to 0$ のとき $\frac{\tanh(t\varepsilon)}{\varepsilon} \to t$ であり，$\cosh(t\varepsilon) = 1 + (t\varepsilon)^2/2 + O(\varepsilon^4)$ に注意すると

$$
\cosh(t\varepsilon)^{-\frac{z_\varepsilon}{\varepsilon^2}} \to e^{-\frac{t^2}{2}z_0}
$$

なので

$$e^{tL_\varepsilon} \to e^{tP_0}\, e^{-\frac{t^2}{2}z_0}\, e^{tQ_0} \qquad (\varepsilon \to 0)$$

と (2.20) の $u = 0$ の場合を再現する．もちろん u を入れて計算することもできる．いずれにしろ，計算は $\mathfrak{sl}_2$ の方が複雑だから，この極限移行は，Gauss 分解との整合性を確かめるのが主眼である．

文献

[1991] R. Howe and T. Umeda, The Capelli identity, the double commutant theorem, and multiplicity-free actions, Math. Ann. **290** (1991), 565–619

[2001] M. Itoh and T. Umeda, On centaral elements in the universal enveloping algebras of the orthonal Le algebras, Comps. Math. **127** (2001), 333–359

[2008] T. Hashimoto, A central element in the universal enveloping algebra of type D_n via minor summation formulas of Pfaffians, J. Lie Theory **18** (2008), 581–594

[2010] T. Hashimoto, Generating function for GL_n-invariant differential operators in the skew Capelli identity, Lett. Math. Phys. **93** (2010),157–168