数理解析研究所講究録
第 1832 巻 2013 年 19-32

弱い 2 階算術におけるリーマンの写像定理

堀畑 佳宏*
Horihata Yoshihiro
米子工業高等専門学校
Yonago National College of Technology

概要

本サーベイでは，弱い形のリーマンの写像定理に関する逆数学的結果を報告する．一般のリーマンの写像定理は ACA_0 と同値になることが知られているが，本稿では，境界が線分と円弧からなる領域に対するリーマンの写像定理が RCA_0 で証明できることを概説する．またこの応用として，2 階算術における，より一般のリーマンの写像定理およびピカールの小定理について概説する．

キーワード：逆数学，2 階算術，リーマンの写像定理，ピカールの小定理

1 導入

逆数学は集合論を全面的には用いない古典的数学の世界にある種の抽象度を基準とする等高線を引くことを目的とした，Logic における一プログラムである．数学の分野にとらわれない，先達の果敢な逆数学研究により，数学には多種多様な定理が存在するにもかかわらずその多くが線形に並ぶ 5 つほどのカテゴリーに分類されることが分かってきた．この線形に乗りはするもののこの 5 つのカテゴリーには属さない定理や，そもそもこの線形に乗らない定理も少なくなく存在することは注意に値する．本サーベイでは Yokoyama[10] においてはじめられた複素解析学の逆数学的分析を推し進めることを主眼とし，ピカールの小定理の逆数学的分析を目的とする研究の経過報告を行う．ピカールの小定理の証明は複数知られているが，ここで着目するのはリーマンの写像定理を用いるものである．しかしその証明において実際に必要な双正則関数は，その定義域が線

* horihata@yonago-k.ac.jp

分と円弧からなる具体的な境界の内部上のものであることから，リーマンの写像定理の非常に特殊な場合のみで十分である（この形のリーマンの写像定理を弱リーマンの写像定理と呼ぶことにする.）．しかしながら定義域の境界に円弧が本質的に含まれることから，多角形とその内部から閉単位円への双正則関数を具体的に与えるシュワルツ・クリストッフェルの定理を直接応用することはできない．したがって弱リーマンの写像定理の証明は自明ではない．しかしこの定理は，通常の逆数学において最も弱い体系，そして計算可能数学におおよそ対応する体系 RCA_0 で証明できる．弱リーマンの写像定理は，Yokoyama[13] によって導入された WKL_0 と ACA_0 の保存的拡大である超準版 ns-WKL_0 および ns-ACA_0 を梯子とし，境界がジョルダン閉曲線である領域に対するリーマンの写像定理および一般のリーマンの写像定理がそれぞれ WKL_0 および ACA_0 と同値になることの証明において止揚される．このように弱リーマンの写像定理は各所で花を咲かせているも，元来の目的であったピカールの小定理の証明を担うには境界拡張という非常に困難な壁に突き当たっている状況である．これについて前進した結果を将来お伝えできる時が来ることを願いたい．

2 節において，代表的な公理体系 RCA_0, WKL_0, ACA_0（5 つのカテゴリーのうち弱い 3 つ）を定義し，複素関数の可積分性について概説する．3.1 節において弱リーマンの写像定理の証明の概略を述べる．3.2 節では弱リーマンの写像定理の，より一般的なリーマンの写像定理の証明への応用について，3.3 節では弱リーマンの写像定理のピカールの小定理の証明への応用について述べる．なお，3.1 節と 3.2 節は Horihata and Yokoyama[2] の後半の結果のサーベイ，3.3 節は Horihata[1] のピカールの小定理に関する結果のサーベイである．

2　準備

ここでは，2 階算術の諸体系と複素関数の可積分性について概説する．

2.1　2 階算術の諸体系

2 階算術の言語 $\mathcal{L}_2$ は以下からなる．(i) 定数記号：$0, 1$，(ii) 数変数記号：$x, y, z, \cdots$，(iii) 集合変数記号：$X, Y, Z, \cdots$，(iv) 関数記号：$+, \cdot$，(v) 関係記号：$=, <, \in$．数項は，定数記号，数変数記号，関数記号を適切に組み合わせて得られる．数項 t, s，および集合変数 X に対し，$t = s$, $t < s$, $t \in X$ を原子論理式と呼ぶ．原子論理式から，命題結合子 $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, および数に関する量化記号 $\forall x$, $\exists x$，集合に関する量化記号 $\forall X$, $\exists X$ を適切

に組み合わせて得られるものを $\mathcal{L}_2$ 論理式と呼ぶ．$\mathcal{L}_2$ 論理式 φ, ψ に対し，これらが記号列として同じ場合，$\varphi \equiv \psi$ とかく．

定義（公理体系 Z_2）

2 階算術 Z_2 は以下の公理からなる．

1. 基本公理:

$$
\begin{array}{ll}
x+1 \neq 0 & x+1=y+1 \rightarrow x=y \\
x+0=x & x+(y+1)=(x+y)+1 \\
x \cdot 0=0 & x \cdot(y+1)=(x \cdot y)+x \\
\neg(x<0) & x<y+1 \leftrightarrow(x<y \vee x=y)
\end{array}
$$

2. 帰納法公理: $\mathcal{L}_2$ 論理式 $\varphi(x)$ に対し

$$\varphi(0) \wedge \forall x(\varphi(x) \rightarrow \varphi(x+1)) \rightarrow \forall x\, \varphi(x)$$

3. 内包公理: X を自由変数にもたない $\mathcal{L}_2$ 論理式 $\varphi(x)$ に対し

$$\exists X\, \forall x\,(x \in X \leftrightarrow \varphi(x))$$

Z_2 の内包公理を制限することにより，種々の部分体系が得られる．そこで，$\mathcal{L}_2$ 論理式に階層を入れる．(i) 現れる量化記号が全て数に関する有界量化記号（数項 t に対し $\forall x<t, \exists x<t$）のみからなる論理式を Σ_0^0 論理式あるいは Π_0^0 論理式という．(ii) k を自然数とする．Σ_k^0 論理式 θ に対し，$\forall x\, \theta$ を Π_{k+1}^0 論理式という．また，Π_k^0 論理式 θ に対し，$\exists x\, \theta$ を Σ_{k+1}^0 論理式という．(iii) 集合に関する量化記号を含まない論理式を Σ_0^1 論理式，Π_0^1 論理式，あるいは算術的論理式という．(iv) k を自然数とする．Σ_k^1 論理式 θ に対し，$\forall X\, \theta$ を Π_{k+1}^1 論理式という．また Π_k^1 論理式 θ に対し，$\exists X\, \theta$ を Σ_{k+1}^1 論理式という．

$i=0,1$, 自然数 k に対し，Σ_k^i 論理式全体の集合および Π_k^i 論理式全体の集合をそれぞれ Σ_k^i，Π_k^i で表す．本稿での，また標準的な逆数学における基本体系 RCA_0 は以下である．

定義（公理体系 RCA_0）

2 階算術 RCA_0 は以下の公理からなる.

1. 基本公理
2. Σ^0_1 帰納法公理: Σ^0_1 論理式 $\varphi(x)$ に対し
$$\varphi(0) \land \forall x\,(\varphi(x) \to \varphi(x+1)) \to \forall x\,\varphi(x)$$
3. Δ^0_1 内包公理: X を自由変数にもたない Σ^0_1 論理式 $\varphi(x), \psi(x)$ に対し
$$\forall x\,(\varphi(x) \leftrightarrow \neg\psi(x)) \to \exists X\,\forall x\,(x \in X \leftrightarrow \varphi(x))$$

RCA_0 において有限列のコーディングや，実数，完備可分距離空間，連続関数が定義できることについては，シンプソンの教科書 [6] を参照．RCA_0 において区間縮小法，中間値の定理，平均値の定理など基本的な解析の定理は証明できる．一方，中間値の定理で次元を上げたものであるブラウアーの不動点定理は RCA_0 で証明できないことが知られている [5]．実際，その証明には次の弱ケーニッヒの補題が必要である．その主張を述べるために，RCA_0 において木とその道を定義する．0, 1 の有限列全体の集合を $2^{<\mathbb{N}}$ とかく．$\tau \in 2^{<\mathbb{N}}$ の長さを $\mathrm{lh}(\tau)$ で表し，τ の n 番目の値を $\tau(n)$ で表す．$\tau, \sigma \in 2^{<\mathbb{N}}$ の連接を $\tau^\frown\sigma$ で表す．つまり $\tau^\frown\sigma = \langle \tau(0), \cdots, \tau(\mathrm{lh}(\tau)-1), \sigma(0), \cdots, \sigma(\mathrm{lh}(\sigma)-1)\rangle$ である．$\tau \in 2^{<\mathbb{N}}$ が $\sigma \in 2^{<\mathbb{N}}$ の始切片であるとは，$\mathrm{lh}(\tau) \leq \mathrm{lh}(\sigma)$ かつ任意の $n < \mathrm{lh}(\tau)$ に対し $\tau(n) = \sigma(n)$ となるときをいい，$\tau \subseteq \sigma$ とかく．$T \subseteq 2^{<\mathbb{N}}$ が 2 分木であるとは，任意の $\tau \in T$ に対しその任意の始切片もまた T に属すときをいう．また，2 分木 T が任意の長さの要素をもつとき，つまり $\forall n\,\exists \tau \in T\,(\mathrm{lh}(\tau) = n)$ をみたすとき，T は無限であるという．関数 $f : \mathbb{N} \to \{0,1\}$ が 2 分木 T の道（path）であるとは，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $f[n] \in T$ となるときをいう．ただし $f[n] = \langle f(0), \cdots, f(n-1)\rangle$ とする．

定義（公理体系 WKL_0）

2 階算術 WKL_0 は RCA_0 に次の公理を加えた体系である.

- 弱ケーニッヒの補題：2 分木 T に対し，もし T が無限ならば T は道をもつ.

WKL_0 は RCA_0 よりも真に強く，多くの重要な定理が WKL_0 と同値になる．例えば，ハイネ・ボレルの被覆定理，連続関数の可積分性，最大値の原理，閉区間上の連続関数の一様連続性，コーシーの積分定理（Yokoyama[10]），ブラウアーの不動点定理（Shioji and Tanaka[5]），ジョルダンの閉曲線定理（Sakamoto and Yokoyama[4]）などが代表的である．一方，ボルツァノ・ワイエルシュトラスの定理など極限の概念を直接に扱うよう

な定理は $\mathsf{WKL_0}$ で証明できない場合が多い．実際，その証明には次の算術的内包公理が必要である．

定義（公理体系 $\mathsf{ACA_0}$）

2 階算術 $\mathsf{ACA_0}$ は $\mathsf{RCA_0}$ に次の公理を加えた体系である．

- 算術的内包公理：X を自由変数にもたない算術的論理式 $\varphi(x)$ に対し

$$\exists X\, \forall x\, (x \in X \leftrightarrow \varphi(x))$$

$\mathsf{ACA_0}$ は $\mathsf{WKL_0}$ よりも真に強い．$\mathsf{ACA_0}$ と同値になる代表的な定理として例えば，ボルツァノ・ワイエルシュトラスの定理，コーシー列の収束性，微分可能な実数値連続関数の導関数の存在（Yokoyama[12]），アスコリ・アルツェラの補題，リーマンの写像定理（Yokoyama[11]）などが代表的である．次の 3 節前半では，リーマンの写像定理の弱い形は $\mathsf{RCA_0}$ で証明できることをみる．また後半では，この弱い形のリーマンの写像定理の応用について 2 点述べる．

2.2 複素関数と可積分性

ここでは複素関数と可積分性の諸定義を述べる．詳細は Yokoyama[10] や Horihata and Yokoyama[2] を参照．$\mathsf{RCA_0}$ において以下の諸概念が定義できる．複素数は実数のペアで考え，演算や絶対値は通常と同じように定義する．開集合上の連続関数 $f, f' : D \to \mathbb{C}$ が次をみたすとき，これらの組 (f, f') は正則であるという[*1]．

$$\forall z \in D\ \lim_{w \to z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} = f'(z).$$

以下で単に正則関数 f というときはその導関数 f' の存在を仮定している．連続関数 $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ が $\forall t \in [0,1]\, \gamma(t) = \gamma(0) + t(\gamma(1) - \gamma(0))$ をみたすとき，この γ を線分と呼ぶ．また，連続関数 $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ が，ある $z \in \mathbb{C}$，$r > 0$，$a \in \mathbb{R}$ に対し $\forall z \in [0,1]\, \gamma(t) = z + \exp(iat)$ と表されるとき，この γ を円弧と呼ぶ．

$D \subseteq \mathbb{C}$ を開集合または閉集合，$f : D \to \mathbb{C}$ を連続関数とする．$\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ を連続関数とする．f の γ に沿った線積分 $\int_\gamma f(z)\, dz$ を，（右辺の極限値が存在する

[*1] 2 節の最後に述べたように，微分可能な実数値連続関数の導関数の存在を示すには一般に $\mathsf{ACA_0}$ を必要とする．従って最初から導関数を与えて正則関数を考える．一方，微分可能な複素数値連続関数の導関数の存在は $\mathsf{WKL_0}$ よりも弱い体系 $\mathsf{WWKL_0}$ で示せる（Yokoyama[10]）．これを示すのに $\mathsf{WWKL_0}$ が必要かどうかは未解決である．

とき) $\int_\gamma f(z)\,dz = \lim_{|\Delta|\to 0} S(f,\gamma,\Delta)$ と定義する．ただし $[0,1]$ の分割 $\Delta = \{0 = x_0 \le \xi_1 \le x_1 \le \cdots \le \xi_n \le x_n = 1\}$ に対し $|\Delta| = \max\{x_k - x_{k-1} \mid 1 \le k \le n\}$, $S(f,\gamma,\Delta) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(\gamma(x_k) - \gamma(x_{k-1}))$ とする．また関数 $h_\gamma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ が次をみたすとき，この h_γ を f の γ に沿った可積分性のモジュラス（modulus of integrability）と呼ぶ：$[0,1]$ の任意の分割 Δ_1, Δ_2 および自然数 n に対し，$|\Delta_1| < 2^{-h_\gamma(n)}$ かつ $|\Delta_1| < 2^{-h_\gamma(n)}$ ならば $|S(f,\gamma,\Delta_1) - S(f,\gamma,\Delta_2)| < 2^{-n}$ となる．そして，連続関数 $f : D \to \mathbb{C}$ が，D 内の任意の線分または円弧 $\gamma : [0,1] \to D$ に対し，f の γ に沿った可積分性のモジュラス $h_\gamma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ をもつとき，この f を**実効的積分可能である**（effectively integrable）という．基本的な事実を確認しておく．

命題 1. RCA_0 において以下は同値である．

1. WKL_0
2. 開集合上の連続関数 $f : D \to \mathbb{C}$ は実効的積分可能である
3. コーシーの積分定理（Yokoyama[10]）

命題 2 ([2] Theorem 3.6)**.** WKL_0 において以下が証明可能である．

1. $f : \Delta(r) \to \mathbb{C}$ が正則ならば，複素数列 $\langle \alpha_k \mid k \in \mathbb{N} \rangle$ が存在して $\Delta(r)$ 上 $f(z) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \alpha_k z^k$ となる．ここで $\Delta(r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r\}$ である．
2. （最大値の原理）$f : D \to \mathbb{C}$ を開集合上の正則関数とし，$\overline{B(a;r)} \subseteq D$ とする．このとき，$\sup\{|f(z)| \mid z \in \overline{B(a;r)}\} = \sup\{|f(z)| \mid |z-a| = r\}$ となる．
3. （シュワルツの補題）$f : \Delta(1) \to \Delta(1)$ を $f(0) = 0$ となる正則関数とする．このとき，$|f(z)| \le |z|$ かつ $|f'(0)| \le 1$ となる．

この証明で WKL_0 を使うのは正則関数の可積分性を示すところのみなので，それぞれにおいて正則関数 f の実行的可積分性を仮定した主張は RCA_0 で証明できる．

3 弱リーマンの写像定理とその応用

本節では弱リーマンの写像定理の証明の概略と，弱リーマンの写像定理の応用を紹介する．

3.1 弱リーマンの写像定理

ここではリーマンの写像定理について考える．一般のリーマンの写像定理の主張は次である：「単連結開集合 $D \subsetneq \mathbb{C}$ に対し双正則関数 $f : D \to \Delta(1)$ が存在する」．ここで $\Delta(1)$ は単位開円盤 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ を表す．Yokoyama[11] においてリーマンの写像定理は WKL_0 上 ACA_0 と同値になることが示されている[*2]．本節では次の定理を紹介する．

定理 1 ([2] Theorem 3.10)．RCA_0 において次が証明できる．
弱リーマンの写像定理：任意の単純半多角形の内部 $D \subsetneq \mathbb{C}$ に対し，半実効的一様連続[*3]な双正則関数 $f : D \to \Delta(1)$ が存在する．

ここで**半多角形** (semi-polygon) とは，関数の有限列 $\gamma = \langle \gamma_1, \cdots, \gamma_l \rangle$ で次 3 条件をみたすものをいう：(i) 各 k $(1 \le k \le l)$ に対し $\gamma_k : [(k-1)/l, k/l] \to \mathbb{C}$ は線分か円弧である；(ii) 各 k $(1 \le k < l)$ に対し $\gamma_k(k/l) = \gamma_{k+1}(k/l)$；(iii) $\gamma_1(0) = \gamma_l(1)$．また，$t \in [0,1]$ に対し $\gamma(t)$ の値は，$t \in [(k-1)/l, k/l]$ のとき $\gamma(t) := \gamma_k(t)$ と定める．半多角形 γ が任意の t, s $(0 \le t < s < 1)$ に対し $\gamma(t) \neq \gamma(s)$ となるとき，この γ は**単純**であるという．

定理 1 の証明を概説するためにいくつか準備をする．まず，ジョルダンの閉曲線定理が WKL_0 を必要とする一方，単純半多角形に対しては以下が成り立つ．

補題 1 ([2] Lemma 3.4)．RCA_0 において次が証明できる．γ を $\mathbb{C}$ における単純半多角形とするとき，γ の像 ($\mathrm{Im}(\gamma)$)，および共通部分をもたない有界領域 D と非有界領域 E が存在して $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Im}(\gamma) = D \cup E$ となる．この D を γ の内部といい $\mathrm{Int}(\gamma)$ で表す．E を γ の外部という．

リーマンの写像定理の一般的な証明にはアスコリ・アルツェラの補題を用いるが，残念ながらこれは RCA_0 で証明できない．そこで，弱リーマンの写像定理は単純半多角形の内部に対する主張であることから，欲しい双正則関数を，原点における微係数を指標としながら再帰的に構成していく．この構成において，関数列の収束を保証するための性質を定義しておく．連続関数 $f : D \to \mathbb{C}$ および $D_0 \subseteq D$ に対し，f の D_0 における一様

[*2] リーマンの写像定理から ACA_0 を導く方向を RCA_0 で証明できるかどうかは未解決である．
[*3] この定義については下の補題 1 の下で述べる．

連続性のモジュラス（modulus of uniform continuity）とは，関数 $h:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ で，任意の $n\in\mathbb{N}$ に対し，もし $|z-w|<2^{-h(n)}$ ならば $|f(z)-f(w)|<2^{-n}$ となるものをいう．f の D_0 における一様連続性のモジュラスが存在するとき，f は**実効的一様連続である**（effectively uniformly continuous）という．また $\overline{\mathrm{Int}(\gamma)}\subseteq D$ である任意の半多角形 $\gamma:[0,1]\to D$ に対し，f が $\overline{\mathrm{Int}(\gamma)}$ において実効的一様連続であるとき，f は**半実効的一様連続である**（semi-effectively uniformly continuous）という．RCA_0 において f が半実効的一様連続ならば実効的可積分であることは簡単に示せる．

関数を構成する際に用いる，原点における微係数の上からの評価と下からの評価を与えておく．次はシュワルツの補題（命題 2.3）の実効的可積分性を仮定したもの（これは RCA_0 で証明できる）から従う．

補題 2. RCA_0 において次が証明できる．$f:D\to D'\subseteq\Delta(1)$ を，$f(0)=0$ となる半実効的一様連続な正則関数とする．任意の $r>0$ に対し，もし $D\supseteq\Delta(r)$ ならば $|f'(0)|<1/r$ となる．

補題 3. RCA_0 において次が証明できる．$D\subseteq\mathbb{C}$ を単連結開集合，$f:D\to D'\subsetneq\Delta(1)$ を $f(0)=0$ となる半実効的一様連続な双正則関数とする．$\alpha\in\Delta(1)\setminus D'$ を固定し，$\eta_\alpha^0:D\to\Delta(1)$, $\eta_\alpha^1:\Delta(1)\to\Delta(1)$ を次で定義する[*4]．

$$\eta_\alpha^0(z)=\sqrt{(z-\alpha)/(1-\bar{\alpha}z)}\;;$$
$$\eta_\alpha^1(z)=(z-\beta)/(1-\bar{\beta}z).\ \text{ただし}\ \beta=\sqrt{-\alpha}$$

双正則関数 $h:D\to h(D)\subseteq\Delta(1)$ を $h(z)=\eta_\alpha^1(\eta_\alpha^0(f(z)))$ で定める．このとき，$h(0)=0$ で $|h'(0)|>(1+d^2/2)|g'(0)|$ となる．ここで $d=1-|\beta|$ である．

定理 1 の証明のスケッチ： 単純半多角形 $\gamma=\langle\gamma_1,\cdots,\gamma_l\rangle$ をとり，D をその内部とする．各 $k\in\mathbb{N}$ に対し $r_k=1-2^{-2k}$ とおく．次をみたすように，$\Delta(1)$ 内の領域の列 $\langle D_k\mid k\in\mathbb{N}\rangle$，ただし $D_0=D$，および双正則関数列 $\langle\tilde{f}_k:D_k\to\tilde{f}(D_k)\mid k\in\mathbb{N}\rangle$ を構成する．

- $\tilde{f}_k:D_k\to\tilde{f}_k(D_k)=:D_{k+1}\supseteq\Delta(r_{k+1})$ は半実効的一様連続かつ双正則

つまり値域が徐々に大きくなるように $\langle\tilde{f}_k\mid k\in\mathbb{N}\rangle$ を構成する．もし $\langle\tilde{f}_k\mid k\in\mathbb{N}\rangle$ が上の条件をみたすなら，各 k に対し $f_k:=\tilde{f}_{k-1}\circ\cdots\circ\tilde{f}_0:D_0\to D_k$ とおくと，少し長い

[*4] 0 をとらない連続関数の平方根の存在は RCA_0 で示せる．また f が半実効的一様連続ならその平方根もまた半実効的一様連続になる．

計算によって正則関数列 $\langle f_k \mid k \in \mathbb{N} \rangle$ が局所一様収束することがわかり[*5]，その収束先が求めたい半実効的一様連続な双正則関数になっている．

以下で，$\langle \tilde{f}_k \mid k \in \mathbb{N} \rangle$ を再帰的に構成する．まず，$f_{00} = \mathrm{id}_{D_0}$ とおき，各 $\alpha \in \Delta(1)$ に対し η^0_α, η^1_α を補題 3 のように定め $\psi_\alpha := \eta^1_\alpha \circ \eta^0_\alpha$ とする．D_0 上の関数 f および $r > 0$ に対し $\Omega(f, r) \equiv f(D_0) \supseteq \overline{\Delta(r)}$ とするとき，$\Omega(f_{00}, r_1)$ が成り立つかどうかを判定する．もし $\Omega(f_{00}, r_1)$ が成り立つなら，$\tilde{f}_0 := f_{00}$ とおく．$\Omega(f_{00}, r_1)$ が成り立たない場合，$\alpha_{01} \in \Delta(1) \setminus f_{00}(D_0)$ をエフェクティブにとってこれるので，$f_{01} := \psi_{\alpha_{01}} \circ f_{00}$ とおき，ふたたび $\Omega(f_{01}, r_1)$ を判定する．これを繰り返し，$\Omega(f_{0j}, r_1)$ となる j がみつかったら $\tilde{f}_0 := f_{0j}$ とおき，$f_{10} := \tilde{f}_0$ と r_2 に対し $\Omega(f_{10}, r_2)$ かどうかを判定する．これを繰り返せば欲しい関数列 $\langle \tilde{f}_k \mid k \in \mathbb{N} \rangle$ を得る．ここで問題になるのは，(i) 正則関数 $f : D_0 \to \Delta(1)$ と $r > 0$ に対し，$\Omega(f, r)$ が成り立つかどうかを再帰的に判定できるかどうか，および (ii) 各 $k \in \mathbb{N}$ に対し $\Omega(f_{kj} \circ \tilde{f}_{k-1}, r_{k+1})$ となる j （$k = 0$ のときは $\Omega(f_{0j}, r_1)$ となる j ）が存在するかどうか，である．まず (i) に関しては $f : D_0 \to f(D_0)$ が半実効的一様連続な双正則関数ならば $\Omega(f, r)$ および $\Omega(f, r)$ の否定がともに Σ^0_1 でかけることから可能である．実際，$\Omega(f, r)$ については，f が半実効的一様連続であることから，$f(D_0)$ の境界 $f \circ \gamma([0, 1])$ [*6]を半径がいくらでも小さい有限個の開円盤で被覆できる．したがって十分小さい半径 $r' > 0$ の上記のような有限個の開円盤がとれて，原点と各開円盤の中心の距離の最小値が $r + r'$ より大きければ，$\Omega(f, r)$ が成り立つ．したがって $\Omega(f, r)$ は Σ^0_1 でかける．一方，$f : D_0 \to f(D_0)$ が双正則なら閉写像なので $\neg\Omega(f, r)$ も Σ^0_1 でかける．したがって $\Omega(f, r)$ は Δ^0_1 論理式，つまり再帰的関係となる．次に (ii) に関しては，補題 2 と補題 3 を使って存在がいえる．実際，各 k および j に対し双正則関数 $f_{kj} : D_k \to f_{kj}(D_k)$ が定義されたとする．このとき，$D_k \supseteq \overline{\Delta(r_{k+1})}$ なので，補題 2 より任意の j に対し $|f'_{kj}(0)| < 1/r_{k+1}$ となる．一方，補題 3 より $|f'_{kj}(0)| > (1 + 2^{-k})^j$ となる．したがって十分大きな J に対し $(1 + 2^{-k})^J > 1/r_{k+1}$，したがって $|f'_{kJ}(0)| > 1/r_{k+1}$ となるので，$\Omega(f_{kj}, r_{k+1})$ となる k が存在する．

したがって双正則関数列 $\langle \tilde{f}_k \mid k \in \mathbb{N} \rangle$ が得られる．また，半実効的一様連続関数やその平方根，およびこれらを一次変換と合成した関数もまた半実効的一様連続になることが分かることから，$f_k := \tilde{f}_{k-1} \circ \cdots \circ \tilde{f}_0 : D_0 \to D_k$ もまた半実効的一様連続になる．また，この関数列 $\langle f_k \mid k \in \mathbb{N} \rangle$ が局所一様収束することから，半実効的一様連続関数

[*5] 詳細は [2] を参照.

[*6] これを扱うためには f の定義域を D_0 の境界を含む領域にまで広げる必要があるが，それは f が D_0 において実効的一様連続であることから簡単である.

$f = \lim_{k\to\infty} f_k : D \to \Delta(1)$ が存在し，定理 1 の証明が完結する．■

3.2 応用 1：より一般のリーマンの写像定理

まず，超準的手法の逆数学への導入の流れを簡単に振り返る．Tanaka[8] において WKL_0 に対する自己埋め込み定理を証明し，逆数学に超準的手法がモデル論的に導入された．その後超準的手法を用い，以下の各定理が WKL_0 と同値になることが証明された：(i) 常微分方程式のコーシー・ペアノの定理（Tanaka[7]），(ii) 可分コンパクト群上のハール測度の存在定理（Tanaka and Yamazaki[9]），(iii) ジョルダンの閉曲線定理（Yokoyama and Sakamoto[4]）．さらに Yokoyama[11] では ACA_0 に対しより強力な超準的手法を導入し，一般のリーマンの写像定理が ACA_0 と同値になることを証明している．これらにおいてはモデル論的に超準的手法を導入していた一方，Yokoyama[13] は超準的手法を直接扱える体系 ns-WKL_0 および ns-ACA_0 を導入し，それぞれ WKL_0, ACA_0 の保存的拡大になっていることを証明した．さらに，超準的証明を標準的証明に翻訳する機械的方法も与えている．

次に，これらの超準的手法を用いて得られるリーマンの写像定理に関する結果を紹介する*7．まずジョルダン閉曲線の内部に対するリーマンの写像定理についてである．ジョルダン閉曲線とは，連続関数 $J:[0,1]\to\mathbb{C}$ で $\forall s\forall t\,(J(s)=J(t)\leftrightarrow(|s-t|=0\vee|s-t|=1))$ をみたすものをいう．ジョルダン閉曲線 $J:[0,1]\to\mathbb{C}$ の像 $\mathrm{Im}(J)$，内部 $\mathrm{Int}(J)$，外部 $\mathrm{Ext}(J)$ をそれぞれ次のように定義する．$\mathrm{Im}(J):=\{z\in\mathbb{C}\mid\exists s\in[0,1]\,z=J(s)\}$; $\mathrm{Int}(J):=\{z\in\mathbb{C}\setminus\mathrm{Im}(J)\mid g(0)=z$ である任意の連続関数 $g:[0,\infty)\to\mathbb{C}\setminus\mathrm{Im}(\gamma)$ は有界である $\}$; $\mathrm{Im}(J):=\{z\in\mathbb{C}\setminus\mathrm{Im}(J)\mid g(0)=z$ である連続関数 $g:[0,\infty)\to\mathbb{C}\setminus\mathrm{Im}(\gamma)$ で $\lim_{w\to\infty}|g(w)|=\infty$ となるものが存在する $\}$.

ns-WKL_0 において，与えられたジョルダン閉曲線 J を（超有限）折れ線近似しておき，その折れ線の内部に対し弱リーマンの写像定理を適用する．そこで得られた双正則関数の標準部分を取り出せば求めたい双正則関数が得られる．この逆については，この形のリーマンの写像定理がジョルダンの閉曲線定理を含むことから明らかである．

定理 2 ([2]Theorem 4.4). RCA_0 において以下は同値である．

1. WKL_0
2. ジョルダン閉曲線の内部に対するリーマンの写像定理：ジョルダン閉曲線 J :

*7 ここで紹介する結果は Horihata and Yokoyama[2] のものであるが，横山氏が主である．

$[0,1] \to \mathbb{C}$ に対し，双正則関数 $f : \mathrm{Int}(J) \to \Delta(1)$ が存在する．

一般のリーマンの写像定理は ACA_0 と同値になることが既に示されているが，[2] では，ns-ACA_0 において単連結開集合の境界を（超有限）折れ線で近似し弱リーマンの写像定理を応用することによって，簡潔な証明を与えている．

定理 3 ([2]Theorem 4.6)．RCA_0 において以下は同値である．

1. ACA_0
2. 任意の単連結開集合 $D \subsetneq \mathbb{C}$ に対し，双正則関数 $f : D \to \Delta(1)$ が存在する．

ここで開集合 $D \subseteq \mathbb{C}$ が単連結であるとは，D 内の任意の単純半多角形の内部（この存在は RCA_0 で示せる）もまた D に含まれるときをいう．

3.3 応用 2：ピカールの小定理

ここでは弱リーマンの写像定理のピカールの小定理の証明への応用可能性について紹介する．Horihata and Yokoyama [3] にその概略が，Horihata [1] にその詳細およびショットキーの定理を用いたピカールの小定理（および大定理）の証明との複雑さの比較研究がある．ピカールの小定理の主張は次である：「整関数は，定数関数でなければ高々 1 点を除き他の全ての有限な値をとる」．ここで値としてとられない点のことを除外値という．この定理はリュービルの定理「有界な整関数は定数関数に限る」やカソラティ・ワイエルシュトラスの定理「$\Delta(r) \setminus \{0\}$ 上正則な関数 f が 0 を孤立真性特異点としてもつならば，$f(\Delta(r) \setminus \{0\})$ は $\mathbb{C}$ において稠密である」を強めたものと捉えることができるが，これらは共に WWKL_0 で証明できる*8．ピカールの小定理の証明の主なものとして，リーマンの写像定理を用いるものと，より構成的な証明として知られているランダウの定理とショットキーの定理を用いるものがある．後者によるピカールの小定理の証明は WKL_0 で展開できることが知られている [1]．ここでは，弱リーマンの写像定理の応用，およびいくつか他の逆数学的結果を紹介するために，前者によるピカールの小定理の証明を 2 階算術で考える．WKL_0 の上で考える．ピカールの小定理は次の

---

*8 体系 WWKL_0 は WKL_0 よりも真に弱く RCA_0 よりは真に強い．この体系については Yu and Simpson[14] を参照．WWKL_0 では，連続関数の可積分性は一般に示すことはできないが，有界な連続関数に対してはその可積分性が示せる．このことが効いて，本文で述べた 2 つの定理に加え，リーマンの除去可能特異点定理やシュワルツの鏡像原理など複素解析学の基本的な諸定理を多く導く．しかしながらこれらの逆，つまりこれらの定理から WWKL_0 を導けるかどうか，は分かっていない．この周辺の話題については [1] を参照．

2 つから証明される：(i) $\mathbb{C}\setminus\{-1,1\}$ の被覆空間として単位開円盤 $\Delta(1)$ がとれること；(ii) 連続関数の持ち上げ補題 (lifting lemma)．WKL_0 を本質的に用いるのは (ii) を示すときである．(i) について　被覆空間を通常と同じように次で定義する．D, X を折れ線連結な完備可分距離空間[*9]，$\pi : X \to D$ を連続な全射，$\langle U_{kl} \mid k,l \in \mathbb{N}\rangle$, $\langle V_k \mid k \in \mathbb{N}\rangle$ をそれぞれ X, D 内の開集合列，$\pi_{kl} : U_{kl} \to V_k$ を同相写像とする．次の条件をみたす 6 つ組 $(X, D, \pi, U_{kl}, V_k, \pi_{kl})$ を D の**被覆空間**という：(1) 各 U_{kl}, V_k は折れ線連結; (2) $D = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} V_k$; (3) $X = \bigcup_{k,l\in\mathbb{N}} U_{kl}$; (4) 各 $k \in \mathbb{N}$ に対し $\pi^{-1}(V_k) = \bigcup_l U_{kl}$; (5) 各 $k,l \in \mathbb{N}$ に対し $\pi|_{U_{kl}} = \pi_{kl}$．またこのときの π を**被覆写像**という．(i) を証明する際の本質は次を示すことにある：領域 $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0 \wedge \mathrm{Re}(z) < 1 \wedge |z| > 1\}$ および上半平面 $H = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ に対し，$\overline{\Omega}$ から $\overline{H}$ への同相写像が存在する．そのためにはまず，弱リーマンの写像定理（定理 1）を用いて，Ω から H への双正則関数 λ を（一意的に）得る．さらにこの双正則関数を Ω への境界にまで連続的に拡張したいのだが（カラテオドリーの定理)，このことが RCA_0 あるいは WKL_0 で可能であるかどうかはわかっていない[*10]．そこでこのことを仮定して（WCT と呼ぶ)，(i) を導く．WCT によって得られた $\bar{\lambda}(-1) = -1$, $\bar{\lambda}(1) = 1$ なる同相写像 $\bar{\lambda} : \overline{\Omega} \to \overline{H}$ を，Ω の境界を構成する 2 半直線および円弧のそれぞれを越えて解析接続し（シュワルツの鏡像原理を用いて．WWKL_0 で示せる.)，新たにできた領域に対しても同様に解析接続を繰り返すことにより，H から $\mathbb{C}\setminus\{-1,1\}$ への正則関数が得られ，これは被覆写像になっている．また上半平面と単位開円盤は正則同型なので，正則な被覆写像 $\pi : \Delta(1) \to \mathbb{C}\setminus\{-1,1\}$ を得る．(ii) について　次の結果が示されている．

定理 4 ([3]Theorem 11)．RCA_0 において以下は同値である．

1. WKL_0
2. 持ち上げ補題：D_0, D を完備可分距離空間，$f : D_0 \to D$ を連続関数，$(X, D, \pi, U_{kl}, V_k, \pi_{kl})$ を被覆空間とする．もし D_0 が単連結ならば f の連続な持ち上げ $\hat{f} : D_0 \to X$ が存在して $\pi \circ \hat{f} = f$ となる．さらに，f および各 π_{kl}^{-1} が正則なら $\hat{f}$ も正則となる．

1 から 2 はコンパクト性を用いて示せる．2 から 1 は WKL の否定から $\mathbb{C}$ の相対位相による部分空間 $[0,1]^2 \subseteq \mathbb{C}$ を $[0,1]^2$ の境界に写す連続関数で，境界上不変なもの

[*9] RCA_0 で素直に扱える抽象的な空間は完備可分距離空間である

[*10] ACA_0 では可能である

(retraction) が存在する*11. この関数は持ち上げを持ちえないことが簡単にわかることから，$2 \to 1$ が従う.

最後に (i), (ii) を用いてピカールの小定理を，WKL_0+WCT において証明する．整関数 $f\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ で除外値が 2 点以上存在するとする．一次変換により除外値の 2 点が -1, 1 であるとしてよい．つまり $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{-1,1\}$ であるとする．(i) より，正則な被覆写像 $\pi : \Delta(1) \to \mathbb{C} \setminus \{-1,1\}$ が存在する．今 $\mathbb{C}$ は単連結なので，(ii)（定理 4）より $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{-1,1\}$ の正則な持ち上げ $\hat{f} : \mathbb{C} \to \Delta(1)$ が存在して，$\pi \circ \hat{f} = f$ となる．このとき $\hat{f}$ は有界で $\mathbb{C}$ 上正則なので，リュービルの定理（WWKL_0 で証明可能）より $\hat{f}$ は定数関数となる．したがって f も定数関数となり，ピカールの小定理が従う．

今後の課題としては，まず WCT がどの体系で証明できるかを考える必要がある．筆者は RCA_0 で証明できると考えている．また，ピカールの小定理における整関数が解析的関数である場合，弱リーマンの写像定理および WCT の証明をより詳細に分析することにより，持ち上げの存在を示すには (ii) の持ち上げ補題の弱い形で十分となり，この場合のピカールの小定理は WWKL_0 で証明できると予想している．

参考文献

[1] Y. Horihata. *Subsystems of first and second order arithmetic.* Doctoral thesis, Tohoku University, August 2011.

[2] Y. Horihata and K. Yokoyama. Nonstandard second-order arithmetic and Riemann's mapping theorem. submitted.

[3] Y. Horihata and K. Yokoyama. Singularities of holomorphic functions in subsystems of second order arithmetic. In A. Beckmann, C. Dimitracopoulos, and B. Lowe, editors, *Local Proceedings of Logic and Theory of Algorithms, Fourth Conference on Computability in Europe, CiE 2008*, pages 157–164. 2008.

[4] N. Sakamoto and K. Yokoyama. The Jordan curve theorem and the Schönflies theorem in weak second-order arithmetic. *Archive for Mathematical Logic*, 46:465–480, July 2007.

*11 詳細は Shioji and Tanaka[5] を参照．この論文ではブラウアーの不動点定理が WKL_0 と同値になることを証明しているが，WKL_0 の否定から不動点定理の反例を導く際にこの retraction を構成している．実際，この retraction と $\pi/4$ 回転する関数を合成して得られる関数は不動点をもたない．

[5] N. Shioji and K. Tanaka. Fixed point theory in weak second-order arithmetic. *Annals of Pure and Applied Logic*, 47:167–188, 1990.

[6] S. G. Simpson. *Subsystems of Second Order Arithmetic.* Perspectives in Mathematical Logic. Springer-Verlag, 1999. XIV+445 pages; Second Edition, Perspectives in Logic, Association for Symbolic Logic, Cambridge University Press, 2009, XVI+444 pages.

[7] K. Tanaka. Non-standard analysis in WKL_0. *Mathematical Logic Quarterly*, 43(3):396–400, 1997.

[8] K. Tanaka. The self-embedding theorem of WKL_0 and a non-standard method. *Annals of Pure and Applied Logic*, 84:41–49, 1997.

[9] K. Tanaka and T. Yamazaki. A non-standard construction of Haar measure and weak König's lemma. *The Journal of Symbolic Logic*, 65(1):173–186, 2000.

[10] K. Yokoyama. Complex analysis in subsystems of second order arithmetic. *Archive for Mathematical Logic*, 46:15–35, 2007.

[11] K. Yokoyama. Non-standard analysis in ACA_0 and Riemann mapping theorem. *Mathematical Logic Quarterly*, 53(2):132–146, April 2007.

[12] K. Yokoyama. *Standard and Non-standard Analysis in Second Order Arithmetic.* thesis for doctor of science, Tohoku University, December 2007.

[13] K. Yokoyama. Formalizing non-standard arguments in second-order arithmetic. *J. Symbolic Logic*, 75(4):1199–1210, 2010.

[14] X. Yu and S. G. Simpson. Measure theory and weak König's lemma. *Archive for Mathematical Logic*, 30:171–180, 1990.