

ラムダ計算と組み合わせ論理の体系 $C\lambda I_\lambda$

千葉大学 理学研究科 基盤理学専攻*

山川 郁加, 古森 雄一

Fumika Yamakawa, Yuichi Komori

Division of Fundamental Sciences, Graduate School of Science,
Chiba University

1 はじめに

ラムダ計算において, 与えられたラムダ項に対しその β 正規形を求める際, β 変形のみを用いる通常の方法の他に, 組み合わせ論理を利用して求めることもできる. そのような手段はいくつか存在するが, もっとも簡単なものとして "ラムダ項を単純に CL 項に変換して weak 変形を行い, 最後に残った定数をまたラムダ項に変換して β 変形を行う" という手段が挙げられる. しかしこの場合, β 正規形を求めることはできても, β 変形を模倣してはいない.

これに対し, ここで述べる体系 $C\lambda I_\lambda$ は, 変換が工夫されており, β 変形を模倣することで正規形を求めることができる. 用いた変換 (*) は, ラムダ項全体の集合 (ただし, α 同値な項は同一視する) Λ から $\{M^* \mid M \in \Lambda\}$ への単射であり, ラムダ項と変換後の項が 1 対 1 に対応している.

また, ラムダ項の β 正規形を通常の方法で計算することは, 手動で行うには少々煩雑である. 計算機を使用しても, 代入を行う際の α 変換などに時間を要するため, 効率を上げることは難しい.

しかしこの変換と変形を用いると, 束縛変数という概念を持たない組み合わせ論理を利用して計算を行うため, β 正規形を早く求めることができる.

2 体系 $C\lambda I_\lambda$ と変換 *

ラムダ計算と組み合わせ論理の体系 $C\lambda I_\lambda$ を定義する.

体系 $C\lambda I_\lambda$ は可算個の変数と定数 S, K, I_λ を含むものとする.

Def 1 ($C\lambda$ 項).

1. 変数と定数は $C\lambda$ 項 (atom).
2. M, N が $C\lambda$ 項のとき, MN は $C\lambda$ 項 (application).
3. x が変数かつ M が $C\lambda$ 項のとき, $\lambda x.M$ は $C\lambda$ 項 (abstraction).

* 〒263-8522 千葉市稲毛区弥生町 1-33

このうち、定数を含まないものをラムダ項、abstraction の形を含まないものを CL 項と呼ぶ。

Cλ 項 M に対して、 M 中に含まれる自由変数の集合 $FV(M)$ を、ラムダ項の場合と同様に定義する。

Def 2 (体系 $C\lambda I_\lambda$). 一般の Cλ 項に対し I_λ 変形の体系 $C\lambda I_\lambda$ を以下で定義する:

$$\begin{aligned} (I_\lambda\beta) \quad I_\lambda MN &\rightarrow_1 MN \\ (I_\lambda 1) \quad I_\lambda M &\rightarrow_1 \lambda x.Mx \quad (x \notin FV(M)) \\ (S) \quad SMNR &\rightarrow_1 MR(NR) \\ (K) \quad KMN &\rightarrow_1 M \\ (\rho) \quad M &\rightarrow M \end{aligned}$$

$$\frac{N \rightarrow_1 R}{MN \rightarrow_1 MR} (\mu), \quad \frac{M \rightarrow_1 N}{MR \rightarrow_1 NR} (\nu), \quad \frac{M \rightarrow_1 N}{\lambda x.M \rightarrow_1 \lambda x.N} (\xi), \quad \frac{M \rightarrow_1 N \quad N \rightarrow R}{M \rightarrow R} (\tau).$$

\rightarrow は \rightarrow_1 を 0 回以上有限回用いることを表している。

Def 3 (変換 $*$). Cλ 項 M から CL 項 M^* への変換 $*$ を以下で定義する: ^{*1}

1. $a^* \equiv a$ (a は変数または定数),
2. $(MN)^* \equiv M^*N^*$,
3. $(\lambda x.M)^* \equiv I_\lambda(\lambda^*x.M^*)$.

ただし、CL 項の抽象 λ^* としては以下のものを採用する:

1. $\lambda^*x.x \equiv I$ (ただし $I \equiv SKK$),
2. $\lambda^*x.M \equiv (KM)$ ($x \notin FV(M)$ のとき),
3. $\lambda^*x.Ux \equiv U$ ($x \notin FV(U)$ のとき),
4. $\lambda^*x.UV \equiv S(\lambda^*x.U)(\lambda^*x.V)$.

3 諸定理

Th 4 (抽象 λ^* の性質). λ^* について、CL 項 M, N と変数 $x, y (\neq)$ に対し、以下が成り立つ:

1. $y \notin FV(N)$ ならば $[N/x](\lambda^*y.M) \equiv \lambda^*y.[N/x]M$.
2. $y \notin FV(M)$ ならば $\lambda^*y.[y/x]M \equiv \lambda^*x.M$.

Proof. いずれも λ^* の定義による帰納法を用いる。 □

Th 5 (変換 $*$ の性質). $*$ について、以下が成り立つ:

1. 任意のラムダ項 M に対し、 M^* は SK 正規形である。

^{*1}このような再帰的な定義において、適用できる定義が 2 つ以上ある場合は、より上にあるもの (番号の若いもの) を採用することとする。

2. 任意の $\text{C}\lambda$ 項 M に対し, $FV(M) = FV(M^*)$.
3. M, N がラムダ項のとき, 任意の変数 x について $([N/x]M)^* \equiv [N^*/x]M^*$.

Proof.

1. $*$ の定義 (及び λ^* の定義) による.
2. $FV(M)$ の定義による帰納法を用いる. $M \equiv \lambda x.N$ のときは $FV(\lambda^*x.N) = FV(N) - \{x\}$ による.
3. ラムダ項の代入の定義による帰納法を用いる.

$M \equiv \lambda y.Q$ のとき, 代入の定義より (左辺) $\equiv I_\lambda(\lambda^*z.([N/x][z/y]Q)^*)$ (ただし z は新しい変数).

これに帰納法の仮定, Th 4. の 1, 2 を順に用いると

$$I_\lambda(\lambda^*z.([N/x][z/y]Q)^*) \equiv I_\lambda(\lambda^*z.[N^*/x][z/y]Q^*) \equiv I_\lambda[N^*/x](\lambda^*z.[z/y]Q^*) \equiv I_\lambda[N^*/x](\lambda^*y.Q^*).$$

一方で, (右辺) $\equiv [N^*/x](I_\lambda(\lambda^*y.Q^*)) \equiv I_\lambda[N^*/x](\lambda^*y.Q^*)$. よって (左辺) \equiv (右辺) である. \square

Th 6 (変換 $*$ の単射性). 任意のラムダ項 M に対し $(M^*)^\circ \equiv M$ を満たす, $*$ の逆変換 $^\circ$ が存在する.

Def 7 (逆変換 $^\circ$). $\text{C}\lambda$ 項 M からラムダ項 M° への変換 $^\circ$ を以下で定義する:

1. $a^\circ \equiv a$ (a は変数または定数),
2. $(\lambda x.M)^\circ \equiv \lambda x.M^\circ$,
3. $(I_\lambda M)^\circ \equiv \lambda x.N^\circ$ (x を新しい変数として, N は Mx の SK 正規形^{*2}),
4. $(MN)^\circ \equiv M^\circ N^\circ$.

Proof of Th6. $\text{C}\lambda$ 項 M^* に対し, $(M^*)^\circ$ が定義され, かつ $(M^*)^\circ \equiv M$ となることを示す.
 $*$ の定義による帰納法を用いる.

$M \equiv \lambda x.Q$ のとき, $M^* \equiv I_\lambda(\lambda^*x.Q^*)$. ここで $(\lambda^*x.Q^*)x$ の SK 正規形は Q^* である (λ^* の定義と Th5. の 1 による). また帰納法の仮定より $(Q^*)^\circ \equiv Q$ であるので $(M^*)^\circ \equiv (I_\lambda(\lambda^*x.Q^*))^\circ \equiv \lambda x.(Q^*)^\circ \equiv \lambda x.Q \equiv M$ となり, 成り立つ. \square

Th 8 (変形 \rightarrow の性質). \rightarrow について, 以下が成り立つ:

1. M, N が $\text{C}\lambda$ 項のとき, $(\lambda^*x.M)N \rightarrow [N/x]M$.
2. 任意の $\text{C}\lambda$ 項 M に対し, $M^* \rightarrow M$.

Proof.

1. λ^* の定義による帰納法を用いる.

$M \equiv x$ のとき, (左辺) $\equiv IN \rightarrow N \equiv$ (右辺).

$x \notin FV(M)$ のとき, (左辺) $\equiv KMN \rightarrow_1 M \equiv$ (右辺).

$M \equiv Ux, x \notin FV(U)$ のとき, (左辺) $\equiv UN \equiv$ (右辺).

$M \equiv UV$ のとき, (左辺) $\equiv S(\lambda^*x.U)(\lambda^*x.V)N \rightarrow_1 (\lambda^*x.U)N((\lambda^*x.V)N) \stackrel{IH}{\equiv}$

^{*2} このような N が存在しない場合, $(I_\lambda M)^\circ$ は *undefined* とする.

$[N/x]U[N/x]V \equiv [N/x](UV) \equiv$ (右辺).

2. * の定義による帰納法を用いる. Th 6. の証明とほぼ同様に証明できる. \square

4 体系 $C\lambda I_\lambda$ についての予想

Conj 9. ラムダ項 M とその β 正規形 N に対し, $M^* \rightarrow N$ が成り立つ.

5 体系 $C\lambda I_\lambda^+$

Def 10 (体系 $C\lambda I_\lambda^+$). 体系 $C\lambda I_\lambda^+$ とは, 体系 $C\lambda I_\lambda$ に次の公理型を加えたものである:

$$(\lambda\beta) \quad (\lambda x.M)N \rightarrow_1 [N/x]M$$

6 体系 $C\lambda I_\lambda^+$ についての定理

Th 11. 体系 $C\lambda I_\lambda^+$ では, 変形 \rightarrow について Church-Rosser の定理が成り立つ.

以上.