

量子フィードバック制御のための推定論とその応用

慶應義塾大学・理工学部・物理情報工学科* 山本 直樹

Naoki Yamamoto

Department of Applied Physics and Physico-Informatics
Keio University

1 はじめに

量子系における制御とくにフィードバック制御は特別に新しいことではなく、例えば光学系の周波数安定化問題など、至る場面で古くから用いられてきた。それは、伝達関数、状態空間表現、ボード線図解析、PID 制御、など適当な用語の羅列ではあるが、これらの概念の総体であるいわゆる「制御理論」を、「従来の枠組みで」量子制御に用いたものである。つまり、量子効果を実際に発現させるためにはその実現デバイスを精緻に制御する必要があり、そこで、そのようなデバイスを古典系とみなした上で従来の古典制御理論を用いている。(ここでは「量子ではない」という意味で「古典」という用語を用いている。) 従ってこの段階では制御はあくまで裏方であり、特段「量子制御」と銘打たれた研究分野は存在しなかった。

他方、90 年代中ごろから、量子情報との関わりの中で量子論の原理そのものに立脚した制御理論が本格的に研究され始めた。そのような「量子制御理論」とは、物理量の非可換性、それが導く不確定性関係、射影測定・POVM などを包含するいわゆる量子測定理論などの概念をフルに取り込み、その上で古典制御の方法論を量子系に適用できるよう拡張した新しい理論体系である。そこでは、後で詳しく述べるが図 1 で示すように、(i) 対象量子系(原子集団)の時間連続測定(ホモダイン測定)、(ii) 得られた古典信号 $(y(t))$ に基づく対象系の振る舞いの推定、(iii) 推定値を用いたフィードバック制御信号 $(u(t))$ の生成、の 3 段階がまとめて取り扱われる。いかなる測定を行えば良いか、推定のためにいかなる情報

処理を行えば良いか、対象系が望ましい振舞いを示すためにいかなる制御則をとれば良いか、それぞれの段階で「設計」ひいてはその「最適化」が求められる。この意味で、量子制御理論は、自然の原理を解き明かすという物理の基本的思想と趣をやや異にするものであり、強く工学の色合いを有する。量子制御理論は、現在、一つの到達点に達しており、レビュー論文 [1, 2] やテキスト [3] なども発表され始めている。日本語の解説論文としては、拙著 [4] がある。今後は、理論のさらなる体系化とともに、実験的実現も含めた応用研究が主な研究ステージになると考えられる。

本稿では、とくに上述の「推定」の部分に焦点を当て、その解説を行う。また、簡単に、量子制御によって何ができるのかを紹介する。

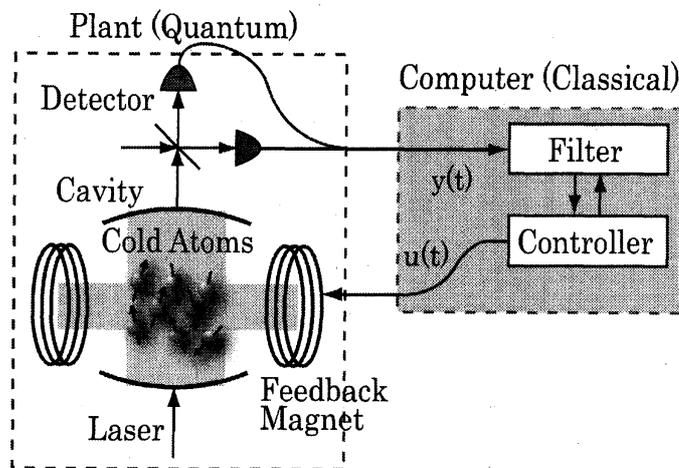


図1 Feedback control for atomic ensemble

2 古典系のシステム制御理論

2.1 フィードバック制御の基本的な考え方

制御理論は、基本的にダイナミカルシステムを対象とする。そして、システムが望ましい振舞いをするよう、得られる情報をフルに活用(すなわちフィードバック)して制御することを目的とする。例えば、制御対象のシステムが線形微分方程式

$$\dot{x}_t = Ax_t + Bu_t, \quad y_t = Cx_t$$

でモデル化されているとする ($\dot{x}_t = dx_t/dt$). ここで x_t は何らかの状態を表す変数, u_t は制御入力, y_t は測定出力, A, B, C は適当なサイズの行列である. もし行列 A の固有値で実部が正のものがあれば, 制御を行わない (つまり $u_t = 0$) とき, 一般に状態は発散する: $x_t \rightarrow \infty$. («一般に» というのは, 初期状態 x_0 によっては発散しないことがある, という意味である.) そこで, y_t を用いて, $u_t = Ky_t$ なるフィードバック制御を施すと, 状態変数 x_t は $\dot{x}_t = (A + BKC)x_t$ に従うようになる. もし, ゲイン行列 K を適当に選ぶことで $A + BKC$ の固有値がすべて実部負とできるのであれば, すべての初期状態に対して $x_t \rightarrow 0$ が満たされる. つまり, システムを安定化できる. このようなことが可能であるための (A, B, C に関する) 条件は, 制御理論において完全に求められている.

さて, システムが非線形の場合は, 上記のように行列の固有値問題に議論を落とすことができない. 例えば,

$$\dot{x}_t = x_t + ue^{x_t}, \quad y_t = x_t \quad (1)$$

なるダイナミクスに従う x_t は, $u_t = 0$ のとき発散する. このような非線形系を安定化する制御則を求めるにあたって, 「リアプノフの方法」がしばしば有効となる. 非負定値関数 $V(x) = x^2$ を考えよう. これは,

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x} \dot{x} = 2x(x + ue^x) = 2x^2 \left(1 + \frac{ue^x}{x}\right)$$

を満たす. そこで, フィードバック制御入力を $u = -2y/e^y = -2x/e^x$ と選んでおけば, $\dot{V} = -2x^2$ となるので, V は $x = 0$ となるまで減少し続ける. V は $x = 0$ で最小値をとるので, $x = 0$ に到達したら以降は変化しなくなる. つまり, (1) 式に従う状態変数が安定化される. このような, 安定化のための V, u のセットを見つけ出す手法がリアプノフの方法である. ヒューリスティックであるが, 非線形系を対象とする場合, 一般的な処方箋はこれしかない.

2.2 確率システムの制御理論

前小節の議論は, システムがノイズを被っている場合:

$$\dot{x}_t = f(x_t, u_t) + g(x_t)\xi_t, \quad y_t = h(x_t) + \zeta_t \quad (2)$$

にも拡張できる. f, g, h は一般の線形あるいは非線形関数で, (1) 式の場合, $f(x, u) = x + ue^x$ である. ノイズ ξ_t, ζ_t は何でも良いが, 確率過程とくにホワイトノイズとするのが理論展開のために便利であり, また現実系の良い近似モデルを与える. さて, 数学的に厳

密な議論を行うために (2) 式を

$$dx_t = f(x_t, u_t)dt + g(x_t)dw_t, \quad dy_t = h(x_t)dt + dv_t \quad (3)$$

なる伊藤型確率微分方程式で表現する. ((2) 式をストラトノビッチ型確率微分方程式とみなすと伊藤の修正項が必要となるが, ここでは, (3) 式を出発点とする). ホワイトノイズに対応するものは標準ウィーナー過程 w_t, v_t であり, dw_t, dv_t は区間 $[t, t + dt)$ で平均ゼロ, 分散 dt のガウス分布に従う. w_t, v_t は独立でもそうでなくてもよい. (3) 式が相手であっても, 前掲した基本的なフィードバック制御のアイデアは変わらない. つまり, u_t を y_t の関数としていかに設計するか, が問題である. $u_t = Ky_t$ のような単純な方策で上手くいくこともある. しかし, 確率系であることを有効に活かしたい, そして量子系へ拡張したい, という観点から, 以下に説明する「最適推定 (フィルタリング)」の考え方が重要である. 詳しくは, 例えば [5] が参考になる.

我々の最初の目的は, 出力データ $\mathcal{Y}_t = \{y_s | 0 \leq s \leq t\}$ を用いて x_t の最適推定値 $z_t^* = \arg \min_{z_t \in \mathcal{Y}_t} \mathbf{E}[(x_t - z_t)^2]$ を得ることである. これは, 一般に条件付き平均 $\pi_t(x) = \mathbf{E}(x_t | \mathcal{Y}_t)$ で与えられることが知られている: $\pi_t(x) = z_t^*$. そして, $\pi_t(x)$ は次の「フィルター方程式」によってリカーシヴに算出される (w_t, v_t が独立な場合):

$$d\pi_t(x) = \pi_t(f(x, u))dt + [\pi_t(x)h(x) - \pi_t(x)\pi_t(h(x))] [dy_t - \pi_t(h(x))dt]. \quad (4)$$

条件付き確率密度関数 $p_t(x) := p_t(x | \mathcal{Y}_t)$ の時間変化を追うことでフィルタリングを行っても良い. 定義式

$$\pi_t(x) = \mathbf{E}(x_t | \mathcal{Y}_t) = \int_{\mathbf{R}} x p_t(x | \mathcal{Y}_t) dx \quad (5)$$

を用いれば, ただちに次の「クスマー方程式」を得る:

$$dp_t(x) = \left[-\frac{\partial(p_t f)}{\partial x}(x) + \frac{1}{2} \frac{\partial(p_t g^2)}{\partial x^2}(x) \right] dt + p_t(x) [h(x) - \pi_t(h(x))] [dy_t - \pi_t(h(x))dt]. \quad (6)$$

(4) 式あるいは(6) 式は $\pi_t(h(x))$ 等の項を含むため, その計算は一般に無限次元までのモーメントが必要となり実行不可能である. ただし, システムが線形系 $f(x, u) = Ax + Bu$, $g(x) = G$, $h(x) = Cx$ であればフィルターは 2 次までのモーメントで閉じて, 次のよく知られた「カルマンフィルター」に帰着する (V_t は推定誤差共分散行列である).

$$d\pi_t(x) = A\pi_t(x)dt + Bu_t dt + V_t C^T [dy_t - C\pi_t(x)dt], \\ \dot{V}_t = AV_t + V_t A^T - V_t C^T C V_t + GG^T.$$

以上のようにして、 x_t の最適推定値が (線形系の場合は厳密に) 計算できるので、それをフィードバックする量として用いよう、というのは自然な発想である。例えば、 $u_t = K\pi_t(x)$ などである。とくに線形系の場合、次の2次評価関数を最小とする LQG 制御法 (Linear Quadratic Gaussian control) の有効性がよく知られている：

$$J[u] = \frac{1}{2} \mathbf{E} \left[\int_0^T (x_t^\top M x_t + u_t^\top R u_t) dt + x_T^\top N x_T \right]. \quad (7)$$

ここで、 $M \geq 0, N > 0, R \geq 0$ は適当な次元の定数行列で、制御のペナルティを決める設計パラメータである。この制御法は、 $x_t \rightarrow 0$ を目指すとともに、それに要する制御入力量を節約したい、という状況で有効であり、燃料が限られている宇宙ロケットの制御などで実際に使われている。この問題は厳密に解くことが可能であり、最適制御入力推定値の線形関数 $u_t^{\text{opt}} = -R^{-1}B^\top K_t \pi_t(x)$ で与えられる。ただし対称行列 K_t は次のリッカチ微分方程式の解である (境界条件は省略した)：

$$\dot{K}_t + K_t A + A^\top K_t - K_t B R^{-1} B^\top K_t + M = 0.$$

対象が非線形系の場合は、最適制御入力がある非線形偏微分方程式 (ハミルトン・ヤコビ方程式) の解で与えられ、一般に厳密解は得られない。それでも、線形近似などを用いた様々な対処法があり、制御理論は、そのようなアプローチについて膨大な研究の蓄積を有している。

3 量子系の時間連続推定

本節では、古典の場合の推定方程式、すなわちフィルター方程式(4)あるいはクスマー方程式(6)の量子版を導く。これらの導出法はいくつか知られているが、ここでは条件付き量子状態 (条件付き確率の量子版) が従う方程式を直接的に導く方法 [3] を紹介する。この方法は、次小節で示す射影測定の公理のみを用いるもので、物理的に理解しやすい。量子条件付き平均の時間変化を直接求める方法に関しては、文献 [2, 6] を参照されたい。

3.1 準備：条件付き量子状態と射影測定

まず、古典の場合の条件付き確率を、ごく簡単なケースで示す。確率 $\mathbb{P}(k) = p_k$ で値 k ($k = 1, \dots, 6$) が出るサイコロを考える。このサイコロには、偶数の目には白いシールが、奇数の目には黒いシールが貼ってある。つまり、サイコロを投げてシールの色を見る (測定する) ことで、サイコロの目の出方について情報を絞り込むことができる。言うまで

もなく、その規則は

$$\mathbb{P}(k|\text{even}) = \frac{\mathbb{P}(\text{even}|k)}{\mathbb{P}(\text{even})}\mathbb{P}(k), \quad \mathbb{P}(k|\text{odd}) = \frac{\mathbb{P}(\text{odd}|k)}{\mathbb{P}(\text{odd})}\mathbb{P}(k)$$

で与えられる。ここで、とくにベイズの表現を用いた。つまり、事前分布 $\mathbb{P}(k)$ が、シール
の色を知ることにより事後分布 $\mathbb{P}(k|\bullet)$ に変化したわけである。冗長であるが、事後分布の
詳細を書いておく：

$$\mathbb{P}(k|\text{even}) = \begin{cases} 0 \\ p_2/(p_2 + p_4 + p_6) \\ 0 \\ p_4/(p_2 + p_4 + p_6) \\ 0 \\ p_6/(p_2 + p_4 + p_6) \end{cases}, \quad \mathbb{P}(k|\text{odd}) = \begin{cases} p_1/(p_1 + p_3 + p_5) \\ 0 \\ p_3/(p_1 + p_3 + p_5) \\ 0 \\ p_5/(p_1 + p_3 + p_5) \\ 0 \end{cases} \quad (8)$$

さて、この議論を量子的な表現を用いて書き直してみる。我々がサイコロのシールの色
を見るとは、物理量 $\hat{A} = \text{diag}\{a, b, a, b, a, b\}$ を測定することである、と表現できる。 \hat{A} の
固有値 a, b は相異なる実数であり、測定結果 a, b はそれぞれ奇数、偶数に対応する。この
物理量を射影測定することを考えよう。いま、 \hat{A} は射影行列 $\hat{E}_1 = \text{diag}\{1, 0, 1, 0, 1, 0\}$ お
よび $\hat{E}_2 = \text{diag}\{0, 1, 0, 1, 0, 1\}$ を用いて $\hat{A} = a\hat{E}_1 + b\hat{E}_2$ と表せる（スペクトル分解）。他
方、測定前の量子状態は $\hat{\rho} = \text{diag}\{p_1, \dots, p_6\}$ である。従って、通常の射影測定の公理に
従って測定後の状態を書き下すと

$$\hat{\rho}_{\text{odd}} = \frac{\hat{E}_1 \hat{\rho} \hat{E}_1}{\text{Tr}(\hat{E}_1 \hat{\rho})} = \frac{1}{p_1 + p_3 + p_5} \text{diag}\{p_1, 0, p_3, 0, p_5, 0\},$$

$$\hat{\rho}_{\text{even}} = \frac{\hat{E}_2 \hat{\rho} \hat{E}_2}{\text{Tr}(\hat{E}_2 \hat{\rho})} = \frac{1}{p_2 + p_4 + p_6} \text{diag}\{0, p_2, 0, p_4, 0, p_6\}$$

を得る。これは、古典の場合のルールに従って求めた条件付き確率(8)と一致している。結
局、ここで言いたいことは、量子論の公理であるところの射影測定のルールは、とりもなお
さず古典の条件付き確率に対応している、という事実である。測定前の量子状態 $\hat{\rho}$ が事前
分布に、測定結果 k に応じて変化した量子状態 $\hat{\rho}_k$ が事後分布に対応するわけである。つ
まり我々は、対象系について単に射影測定を繰り返していけばよい。それによって変化し
ていく量子状態こそが、我々が欲するところの条件付き量子状態である。

いまひとつ準備を行う。一般に、与えられた対象系をそのまま射影測定することは難し
い。つまり実際には、プローブ（測定器）を用意し、その測定を介して対象系から情報を引
き出す、ということを行う。これは、間接測定と呼ばれる。このモデルを簡単にまとめてお

く。まず、対象系の状態 $|\phi\rangle_A$, プローブの状態 $|\phi\rangle_B$ が与えられているとする。ここでは、議論を簡単化するため純粋状態を仮定した。この2つの状態を相互作用させる：

$$|\phi\rangle_A|\phi\rangle_B \rightarrow \hat{U}_{AB}|\phi\rangle_A|\phi\rangle_B.$$

\hat{U}_{AB} は2つの空間にまたがったユニタリ作用素であり、これにより、対象系の情報がプローブに移る。次いで、プローブを射影測定する。測定結果が k であるとき、射影測定の公理により、状態は次のものに変化する：

$$\begin{aligned} |\tilde{\Phi}_k\rangle_{AB} &= (I_A \otimes |k\rangle_B \langle k|) \hat{U}_{AB} |\phi\rangle_A |\phi\rangle_B \\ &= ({}_B \langle k| \hat{U}_{AB} |\phi\rangle_B) |\phi\rangle_A \otimes |k\rangle_B = |\tilde{\phi}_k\rangle_A \otimes |k\rangle_B. \end{aligned} \quad (9)$$

$|\tilde{\phi}_k\rangle_A$ が、測定結果が k であるときの対象系の条件付き量子状態である (正規化はしていない)。また、この結果が得られる確率は、同じく公理により

$$\mathbb{P}(k) = {}_{AB} \langle \tilde{\Phi}_k | \tilde{\Phi}_k \rangle_{AB} = {}_A \langle \tilde{\phi}_k | \tilde{\phi}_k \rangle_A$$

と計算される。

3.2 条件付き量子状態の時間発展

前小節の結果に基づいて、対象系の条件付き状態の時間変化を求める。とくにフィードバック制御を念頭に置く場合、測定値が連続的に変化することが望ましく、そのため、プローブとしてフォック空間で定義される1次元量子場を仮定する。とくにここでは簡単のため、真空場をとる。

まず、時刻 t でシステムとプローブの状態が

$$|\phi_t\rangle|0\rangle \quad (10)$$

にあるものとする。このあと、これらは相互作用するわけであるが、毎時刻、アンシラは真空場にリセットされるとする。つまり、マルコフ性を仮定する。次に、時間 $[t, t + dt)$ の間で起こる相互作用が、次のユニタリ変換で与えられるとする：

$$\hat{U}(t, t + dt) = \exp \left[-i\hat{H}dt + \hat{c}d\hat{B}_t^\dagger - \hat{c}^\dagger d\hat{B}_t \right]. \quad (11)$$

$\hat{H} = \hat{H}^\dagger$ は対象系のハミルトニアン、 \hat{c} は相互作用を表す対象系の作用素、 $\hat{B}_t, \hat{B}_t^\dagger$ はプローブ空間上の消滅、生成過程で次の (真空の場合の) 「量子伊藤則」を満たす：

$$d\hat{B}_t d\hat{B}_t = d\hat{B}_t^\dagger d\hat{B}_t = d\hat{B}_t^\dagger d\hat{B}_t^\dagger = 0, \quad d\hat{B}_t d\hat{B}_t^\dagger = dt.$$

ユニタリ作用素(11)は、回転波近似が有効なシステムについて、良いモデルを与える。上記の量子伊藤則により、

$$\hat{U}(t, t+dt) = \hat{I} - i\hat{H}dt - \frac{1}{2}\hat{c}^\dagger\hat{c}dt + \hat{c}d\hat{B}_t^\dagger - \hat{c}^\dagger d\hat{B}_t$$

を得る。さて、これを初期状態(10)に作用させよう：

$$\begin{aligned} |\Phi_{t+dt}\rangle &= \hat{U}(t, t+dt)|\phi_t\rangle|0\rangle \\ &= \left[\hat{I} - i\hat{H}dt - \frac{1}{2}\hat{c}^\dagger\hat{c}dt + \hat{c}d\hat{B}_t^\dagger - \hat{c}^\dagger d\hat{B}_t \right] |\phi_t\rangle|0\rangle \\ &= \left[\hat{I} - i\hat{H}dt - \frac{1}{2}\hat{c}^\dagger\hat{c}dt + \hat{c}(d\hat{B}_t + d\hat{B}_t^\dagger) \right] |\phi_t\rangle|0\rangle. \end{aligned}$$

2行目から3行目にかけて、 $d\hat{B}_t|0\rangle = 0$ を用いた。この式変形により、自己共役作用素 $d\hat{B}_t + d\hat{B}_t^\dagger$ が現れることがポイントである。事実、これはプローブ空間における物理量であり、この物理量を測定している限り、上式の $d\hat{B}_t + d\hat{B}_t^\dagger$ の項は古典量に置き換えても良いことになる。

測定過程を記述しよう。上述した通り、我々はプローブ真空場における物理量 $d\hat{B}_t + d\hat{B}_t^\dagger$ を測定する。いま、シュレーディンガー描像をとっていることに注意されたい。この物理量は固有値(スペクトル) xdt を有し、固有状態 $|x\rangle$ と合わせて次を満たす：

$$(d\hat{B}_t + d\hat{B}_t^\dagger)|x\rangle = xdt|x\rangle \quad (12)$$

dt は微小時間 $[t, t+dt)$ での測定値であることを反映している。固有値 xdt が、この微小時間における測定で得られる「測定値」であり、そのことを明示するべく

$$dy_t = xdt \quad (13)$$

と表す。さて、(9)式に従って射影作用素 $|x\rangle\langle x|$ を状態 $|\Phi_{t+dt}\rangle$ に作用させ、測定後の(正規化されていない)状態を計算する。まず、次式を得る：

$$\begin{aligned} |\tilde{\phi}_{t+dt}\rangle &= \langle x|\Phi_{t+dt}\rangle \\ &= \langle x| \left[\hat{I} - i\hat{H}dt - \frac{1}{2}\hat{c}^\dagger\hat{c}dt + \hat{c}(d\hat{B}_t + d\hat{B}_t^\dagger) \right] |\phi_t\rangle|0\rangle \\ &= \langle x| \left[\hat{I} - i\hat{H}dt - \frac{1}{2}\hat{c}^\dagger\hat{c}dt + \hat{c}dy_t \right] |\phi_t\rangle|0\rangle \\ &= \left[\hat{I} - i\hat{H}dt - \frac{1}{2}\hat{c}^\dagger\hat{c}dt + \hat{c}dy_t \right] |\phi_t\rangle\langle x|0\rangle. \end{aligned} \quad (14)$$

ここで、(12)、(13)式を用いた。前述したとおり、 $d\hat{B}_t + d\hat{B}_t^\dagger$ が古典量 dy_t に置き換えられている。上式より、測定後の(規格化していない)対象系の状態は

$$d|\tilde{\phi}_t\rangle = \left[\left(-i\hat{H} - \frac{1}{2}\hat{c}^\dagger\hat{c} \right) dt + \hat{c}dy_t \right] |\tilde{\phi}_t\rangle \quad (15)$$

に従うことが分かった。これは、確率的に変動する測定値 y_t で駆動される、古典確率微分方程式である。

次に、測定値 y_t が従う統計則を求めよう。このことは、対象系の規格化された状態 $|\phi_t\rangle$ の時間変化を(15)式から計算する際にも必要となる。まず、(14)式に現れる $\langle x|0\rangle$ の項を計算する。そのために、位置作用素 $d\hat{Q}_t = d\hat{B}_t + d\hat{B}_t^\dagger$ に対応する運動量作用素が $d\hat{P}_t = (d\hat{B}_t - d\hat{B}_t^\dagger)/2i$ で与えられることに注意する。これらは正準交換関係

$$[d\hat{Q}_t, d\hat{P}_t] = idt \quad (16)$$

を満たし、従って $d\hat{P}_t$ は波動関数 $\langle x|\psi\rangle$ に対して微分演算子として作用する：

$$\langle x|d\hat{P}_t|\psi\rangle = -i\frac{d}{dx}\langle x|\psi\rangle \quad (17)$$

位置演算子は $\langle x|d\hat{Q}_t|\psi\rangle = xdt\langle x|\psi\rangle$ として作用する。(12)式の左辺から $\langle 0|$ を作用させると、 $\langle 0|d\hat{B}_t^\dagger = 0$ から、 $\langle 0|d\hat{P}_t|x\rangle = xdt\langle 0|x\rangle/2i$ を得る。すると、(17)式から

$$\frac{d}{dx}\langle 0|x\rangle = -\frac{xdt}{2}\langle 0|x\rangle$$

が従う。正規化条件 $\int |\langle 0|x\rangle|^2 dx = 1$ から、この微分方程式の解は次式で与えられる：

$$\langle 0|x\rangle = \left(\frac{dt}{2\pi}\right)^{1/4} e^{-x^2 dt/4}.$$

いま、 $d\hat{Q}_t$ の測定によって x が微小区間 $[x, x+dx)$ で得られる確率は $\mathbb{P}([x, x+dx)) = \langle \tilde{\phi}_{t+dt}|\tilde{\phi}_{t+dt}\rangle dx$ である。この計算をさらに続けよう：

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([x, x+dx)) &= \langle \phi_t | \left[\hat{I} + i\hat{H}dt - \frac{1}{2}\hat{c}^\dagger \hat{c} dt + \hat{c}^\dagger dy_t \right] \left[\hat{I} - i\hat{H}dt - \frac{1}{2}\hat{c}^\dagger \hat{c} dt + \hat{c} dy_t \right] | \phi_t \rangle |\langle x|0\rangle|^2 dx \\ &= (1 + \langle \hat{c} + \hat{c}^\dagger \rangle dy_t) \sqrt{\frac{dt}{2\pi}} e^{-x^2 dt/2} dx \\ &= \sqrt{\frac{dt}{2\pi}} \exp\left[-\frac{dt}{2}(x - \langle \hat{c} + \hat{c}^\dagger \rangle)^2\right] dx \end{aligned}$$

ここで、 $d\hat{Q}_t$ の測定値が分散 dt のガウシアンで分布すること、つまり $dy_t^2 = dt$ であることを用いた。また、 $\langle \hat{c} + \hat{c}^\dagger \rangle = \langle \phi_t | (\hat{c} + \hat{c}^\dagger) | \phi_t \rangle$ を定義した。上式は、 $dy_t = xdt$ が平均 $\langle \hat{c} + \hat{c}^\dagger \rangle dt$ 、分散 dt のガウシアンで分布することを意味している。すなわち、微小時間 $[t, t+dt)$ で得られるプローブの測定値は

$$dy_t = \langle \hat{c} + \hat{c}^\dagger \rangle dt + dW_t \quad (18)$$

で与えられる. dW_t は標準ウィーナー増分で, 微小時間 $[t, t + dt)$ において平均 0, 分散 dt のガウシアンに従う古典確率変数である. 上式第 2 項目の $(\hat{c} + \hat{c}^\dagger)$ が, 条件付き状態を更新するための情報を与えていることが分かる.

ここで(15)式に戻り, 測定結果に基づく, 規格化された条件付き量子状態 $|\phi_t\rangle$ の時間変化を求める. つまり, $|\phi_t\rangle = |\tilde{\phi}_t\rangle / \sqrt{\langle \tilde{\phi}_t | \tilde{\phi}_t \rangle}$ の微小変化を計算する. 計算が少々長いが, 結果として, 次の方程式が得られる:

$$d|\phi_t\rangle = \left[-i\hat{H}dt - \frac{1}{2}(\hat{c}^\dagger\hat{c} - \langle \hat{c} + \hat{c}^\dagger \rangle \hat{c} + \frac{\langle \hat{c} + \hat{c}^\dagger \rangle^2}{4})dt + \left(\hat{c} - \frac{\langle \hat{c} + \hat{c}^\dagger \rangle}{2} \right) dW_t \right] |\phi_t\rangle. \quad (19)$$

ここで, dW_t は(18)式に現れている標準ウィーナー過程である. このことから, 確かに, 条件付き量子状態 $|\phi_t\rangle$ が測定結果によって駆動されている確率過程に従っていることが分かる. (19)式は, 確率シュレーディンガー方程式と呼ばれる. 実際, 測定過程を除く ($\hat{c} = 0$ とする) と, その方程式は通常のシュレーディンガー方程式と一致している.

以上では, 簡単のために純粋状態に限った議論を行った. 混合状態についても同様の計算が可能であるが, 結果自体は(19)式を利用することで直ちに得られる. すなわち, 純粋状態を密度作用素の形 $\hat{\rho}_t = |\phi_t\rangle\langle\phi_t|$ で表現し, これの微小変分を計算する:

$$d\hat{\rho}_t = |\phi_{t+dt}\rangle\langle\phi_{t+dt}| - |\phi_t\rangle\langle\phi_t|.$$

その結果は次の確率マスター方程式で与えられる:

$$d\hat{\rho}_t = \mathcal{L}^*\hat{\rho}_t dt + [\hat{c}\hat{\rho}_t + \hat{\rho}_t\hat{c}^\dagger - \langle \hat{c} + \hat{c}^\dagger \rangle \hat{\rho}_t](dy_t - \langle \hat{c} + \hat{c}^\dagger \rangle dt). \quad (20)$$

ここで, $\mathcal{L}^*\hat{\rho}$ はリウビリ作用素である:

$$\mathcal{L}^*\hat{\rho} := -i[\hat{H}, \hat{\rho}] + \hat{c}\hat{\rho}\hat{c}^\dagger - \frac{1}{2}\hat{c}^\dagger\hat{c}\hat{\rho} - \frac{1}{2}\hat{\rho}\hat{c}^\dagger\hat{c}.$$

ドリフト項のみの方程式, つまり(20)式のアンサンブル平均をとったものが, 開放系を記述するマスター方程式となっていることに注意されたい. 確率マスター方程式(20), および確率シュレーディンガー方程式(19)が, クスナー方程式(6)の量子版である. また, フィルター方程式(4)の量子版は, 対象系の物理量 \hat{X} の条件付き平均 $\pi_t(\hat{X}) = \text{Tr}(\hat{X}\hat{\rho}_t)$ の時間変化を計算すれば直ちに得られる:

$$d\pi_t(\hat{X}) = \mathcal{L}\hat{X} dt + [\pi_t(\hat{X}\hat{c} + \hat{c}^\dagger\hat{X}) - \pi_t(\hat{c} + \hat{c}^\dagger)\pi_t(\hat{X})](dy_t - \pi_t(\hat{c} + \hat{c}^\dagger)dt). \quad (21)$$

ドリフト項はリンドブラッド作用素である:

$$\mathcal{L}\hat{X} := i[\hat{H}, \hat{X}] + \hat{c}^\dagger\hat{X}\hat{c} - \frac{1}{2}\hat{c}^\dagger\hat{c}\hat{X} - \frac{1}{2}\hat{X}\hat{c}^\dagger\hat{c}.$$

(21)式は, 量子フィルター方程式あるいは創始者の名をとってベラフキン方程式と呼ばれる [7].

4 量子フィードバック制御

本節では、量子フィードバック制御によって何ができるか、1点だけ簡単ではあるが紹介する。詳しい内容、あるいは他の応用については、前掲のレビュー論文やテキストを参照されたい。

紹介するものは、トラップされた原子集団のスピンのフィードバック制御に関する結果である [8, 9, 10, 11, 12, 13]。図 1 を参照されたい。制御したい物理量は z 軸方向の角運動量作用素 \hat{J}_z である。間接測定のためのプローブ光の周波数を原子の励起準位と適切に離調させると、原子の励起準位に応じて偏光方向がシフトし、 \hat{J}_z の量子非破壊測定 (QND 測定) が実現できる。このとき、フィルター方程式の作用素は $\hat{c} = \sqrt{M}\hat{J}_z$ となる。 M はプローブ光と原子集団のカップリングの強さを表す。次に、フィードバック制御は y 軸方向の磁場の強度 u_t を測定結果に応じて時間連続的に変化させることで行う。これは、フィルター方程式において $\hat{H} = u_t\hat{J}_y$ とすることに対応する。我々のタスクは、次の確率マスター方程式に基づいてシステムの条件付き密度作用素 $\hat{\rho}_t$ をリアルタイムで計算し、それ自身が望ましい振舞いを示すよう、 $\hat{\rho}_t$ の関数であるフィードバック制御入力 u_t を設計すること、である：

$$d\hat{\rho} = -i[u\hat{J}_y, \hat{\rho}]dt + M(\hat{J}_z\hat{\rho}\hat{J}_z - \frac{1}{2}\hat{J}_z^2\hat{\rho} - \frac{1}{2}\hat{\rho}\hat{J}_z^2)dt \\ + \sqrt{M}(\hat{J}_z\hat{\rho} + \hat{\rho}\hat{J}_z - 2\langle\hat{J}_z\rangle\hat{\rho})(dy_t - 2\sqrt{M}\langle\hat{J}_z\rangle dt).$$

ここで、 $\langle\hat{J}_z\rangle := \text{Tr}(\hat{J}_z\hat{\rho}) = \pi_t(\hat{J}_z)$ を定義した。

まず、制御を行わないときを考える。 \hat{J}_z の条件付き分散は

$$dE[\langle\Delta\hat{J}_z^2\rangle]/dt = -4E[\langle\Delta\hat{J}_z^2\rangle^2]$$

を満たし、これは、確率 1 で $\langle\Delta\hat{J}_z^2\rangle \rightarrow 0$ が成立することと等価である。用いた定理は、第 2 節で紹介したリアプノフの方法の確率版として知られている [5]。従って、測定に条件付けられた密度作用素は \hat{J}_z の固有状態のいずれかに収束するが、これは、連続 QND 測定が時間無限大で \hat{J}_z の射影測定に対応することを意味する。他方、初期状態 $\hat{\rho}_0$ として全てのスピンの x 軸方向を向いているスピニコヒーレント状態をとると、時間とともに \hat{J}_z の不確かさが減少する一方で、 \hat{J}_y の不確かさは増加する。つまり、連続測定が始まった瞬間から、スピンスクイズド状態が生成される。ただし、これは楕円の中心が測定結果に応じて確率的に揺らいでいる条件付きスピンスクイズド状態であり、測定結果で均すとスクイズ成分は消える。

さて、制御を考えよう。文献 [10, 11, 12] の結果は、フィードバック制御により、 $\hat{\rho}_t$ が \hat{J}_z の任意の固有状態に確率 1 で収束させられる、というものである。ここでも、前述したリアプノフの方法の確率版が用いられている。固有状態の大部分はスピン間エンタングル状態であるから、それらへの確定的収束は重要である。また、この結果は、射影測定の結果をフィードバックで操作できるということを意味しており、測定理論の重要性の観点からも興味深い。次に、文献 [8] では、上述のスピンスクイズド状態を確定的に生成できることを示している。具体的には、いま楕円の中心がおおよそどこにいるのかフィルターを計算することで推定できるので、その情報を用いて、楕円の中心がつねに原点にあるようなフィードバック制御をかけて目的を達成している。なお、この制御法は実験が試みられていることは特筆に値する [13]。以上、どちらの制御目的においても、非古典的状態の生成にフィードバックが有効に使われているが、スピン間の非線形相互作用を測定 + フィードバック制御に負わせている、という点が重要である。つまり、一般に、ハミルトニアン
の非線形相互作用が弱く量子効果が発現しにくいような場面で、連続測定に基づくフィードバック制御は有効な代替手法となり得る。

参考文献

- [1] H. Mabuchi and N. Khaneja, Principles and applications of control in quantum systems, *Int. J. Robust and Nonlinear Control*, 15, 647/667 (2005)
- [2] L. Bouten, R. van Handel, and M. R. James, A discrete invitation to quantum filtering and feedback control, *SIAM Review*, 51, 239/316 (2009)
- [3] H. M. Wiseman and G. J. Milburn, *Quantum Measurement and Control*, Cambridge Univ. Press (2009)
- [4] 山本直樹, 量子フィードバック制御の数理, *数理科学*, 585, 21/27 (2012)
- [5] 大住晃, 確率システム入門, 朝倉書店.
- [6] L. Bouten, R. van Handel, and M. R. James, An introduction to quantum filtering, *SIAM J. Control Optim.*, 46, 2199/2241 (2007)
- [7] V. P. Belavkin, Quantum filtering of Markov signals with white quantum noise, *Radiotekhnika i Electronika*, 25, 1445/1453 (1980)
- [8] L. Thomsen, S. Mancini, and H. M. Wiseman, Continuous quantum nondemolition feedback and unconditional atomic spin squeezing, *J. Phys. B*, 35, 4937 (2002)
- [9] J. K. Stockton, R. van Handel, and H. Mabuchi, Deterministic Dicke state prepa-

- ration with continuous measurement and control, *Phys. Rev. A*, 70, 022106 (2004)
- [10] R. van Handel, J. K. Stockton, and H. Mabuchi, Feedback control of quantum state reduction, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 50, 768/780 (2005)
- [11] N. Yamamoto, K. Tsumura, and S. Hara, Feedback control of quantum entanglement in a two-spin system, *Automatica*, 43-6, 981/992 (2007)
- [12] M. Mirrahimi and R. van Handel, Stabilizing feedback controls for quantum systems, *SIAM J. Control Optim.*, 46, 445/467 (2007)
- [13] J. K. Stockton, *Continuous Quantum Measurement of Cold Alkali-Atom Spins*, Ph.D Thesis, California Institute of Technology (2006)