数理解析研究所講究録
第 1849 巻 2013 年 88-90

分散システムでの剛性グラフに対する局所交換可能性
Transitivity of Laman Graphs in Distributed System

タウフィックラチマン 山内由紀子
Taufiqurrachman Yukiko Yamauchi
来嶋秀治 山下雅史
Shuji Kijima Masafumi Yamashita

九州大学
Kyushu University

1 はじめに

本研究では，グラフ $G=(V,E)$ 上のラーマングラフ全体の集合上での局所遷移可能性について議論する．特に，あるラーマングラフから別のラーマングラフへ，剛性を保ちながら変形する分散アルゴリズムを提案する．

2 準備

2.1 ラーマングラフと疎性マトロイド

グラフ $G=(V,E)$ が剛であるとは，E の各辺の長さを不変としたとき，頂点を任意に動かしてもグラフの形が変わらないことを言う．

2 次元の極小の剛なグラフは，次のラーマンの条件を満たすことと等価であることが知られている [2].

$$|E| = 2|V|-3 \qquad (1)$$

$$|E[U]| \leq 2|U|-3 \quad \forall U \subseteq V, \quad |U| \geq 2 \qquad (2)$$

ラーマンの条件を満たすグラフをラーマングラフと言う．特に，(2) は疎条件と呼ばれ，疎条件を満たす辺集合は疎性マトロイドを構成することが知られている [2].

グラフがラーマンの条件を満たすかどうかを素朴に判定するには，すべての誘導部分グラフを確認する必要があり，$O(2^{|V|})$ 時間かかる．

2.2 ペブルゲーム

$O(|V||E|)$ でグラフのラーマン性を判定するために，ペブルゲームというアルゴリズムが提案されている [1].

ペブルゲームの初期状態では，各頂点にそれぞれ 2 個の石が与えられる．ペブルゲームは 2 つの操作からなる．1 つは，ある頂点対 a,b にそれぞれ 2 個の石があれば，b から石を 1 個削り，b から a への辺を追加する．もう一つは，有向辺の終点に石があるならば，石を始点に移動し，辺の向きを逆にする．

以上の操作を繰り返し，グラフ全体に 3 個の石を残して全ての辺に向きが付いているならば，得られたグラフはラーマンである．

3 提案アルゴリズム

3.1 アルゴリズムの概略

本研究では，同一の頂点集合 V をもつラーマングラフ $L_0=(V,E_0)$ と $L_n=(V,E_n)$ が与えられたとき，グラフの辺の交換により，L_0 から L_n へ至るグラフの系列 $L_0, L_1, \cdots, L_n$ を見つけるというものである．

辺の交換は，グラフの剛性を保持するために，L_i にある辺 $e \in E_n \setminus E_i$ を追加し，別の辺 $e' \in E_0 \cap E_i$ を削除する操作と定義される．マトロイド基の同時交換可能性から，任意の辺 $e \notin E_i$ に対し，$L+e-e'$ がラーマングラフとなるような $e' \in E_i$ が存在する．

3.2 交換可能辺の探索

本節では，ラーマングラフ $L = (V, E)$ とある辺 $f \notin L$ が与えられるとき，ペブルゲームの向き付けを用いて，辺 f と交換可能な辺 $e \in L$ を局所的に探索するアルゴリズムを与える．

定理 1. ラーマングラフ $L = (V, E)$ と任意の頂点対 $\{u, v\} \subset V$ に対し，ペブルゲームの操作で，u, v はそれぞれ *2* 個，*1* 個の石をもつときの向き付けを $\hat{L} = (V, \hat{E})$ とする．このとき，v からの有向パスを持つ頂点の集合を $U \subset V$ とすると，U で誘導される部分グラフ $G[U]$ の任意の辺 $e \in E$ に対し，$L + \{uv\} - e$ はラーマングラフである．

定理 1 に基づき，追加したい辺 e の両端点 u, v にそれぞれ 2 個と 1 個の石を集め，ペブルゲームの向き付け $\hat{L}_i = (V, \hat{E}_i)$ を得る．その向き付けを保持したまま，v からの有向パスをもつ頂点を探索し，$L_n \setminus L_i$ の無い辺 f を見つけると，$L_i + e - f$ はラーマングラフである．分散アルゴリズムについては 3.3 節で述べる．

以下，定理 1 の証明のアイデアについて述べる．準備として，次の補題を用意する．

補題 2. $\hat{L} = (V, \hat{E})$ はラーマングラフ $L = (V, E)$ 上のペブルゲームの向き付けとする．このとき，頂点 $v \in V$ の持つ石の数が *0* 個 *(*同様に *1* 個*)* ならば，*3* 個 *(*v に無い *2* 個*)* の石のうちの少なくとも *2* 個 *(1* 個*)* の石について，その石のある頂点 u に対して，v から u への有向パスが存在する．

補題 3. *[1]* ペブルゲーム上で任意の頂点対に *3* 個の石を集めることができる．

補題 2，3 を用いて，次の補題が得られる．

補題 4. ラーマングラフ $L = (V, E)$ と任意の頂点対 $\{u, v\} \subset V$ に対し，ペブルゲームの操作で，u, v にそれぞれ *2* 個，*1* 個の石を集めることができる．

証明. 任意の頂点対 $\{u, v\} \subset V$ に対し，合計で 3 個の石を集めることができないと仮定して，矛盾を導く．任意の頂点対 $\{u, v\}$ に 3 個の石を集めることができないとする．この条件は，$\{u, v\}$ に 3 個の石を集めることで，ラーマンの条件を満たさなくなることを意味する．つまり，$|E[U]| > 2|U| - 3$，$u, v \in U \subseteq V, |U| \geq 2$ を満たす V の頂点部分集合 U が存在する．

u と v にある 3 個の石を辺に変え，3 個の石の代わりに，$\{u, v\}$ の間に 3 本の多重辺を追加する．$\{u, v\}$ に 3 個の石を集めることで，ラーマンの条件を満たさなくなることにより，ある頂点部分集合 U が存在して，

$$|E[U]| \quad > \quad 2|U| - 3 \tag{3}$$

が成り立ち，すなわち

$$|E[U]| + 3|\{uv\}| \quad > \quad 2|U| - 3 + 3 = 2|U| \tag{4}$$

を得る．

しかし，ペブルゲームの初期状態では，グラフの各頂点に 2 個の石が与えられる．ペブルゲームの操作から $k (k \leq n)$ 個の頂点からできている誘導部分グラフは高々$2k$ 本の辺しか持つことができないため，矛盾である．

以上の議論から，任意の頂点対 $\{u, v\} \subset V$ に対し，合計で 3 個の石を集めることができることが示される．ペブルゲームの操作から，各頂点に最大で 2 個の石しか持つことができないため，頂点対 $\{u, v\}$ に集まった 3 個の石を 2 つの頂点に分ける．u, v にそれぞれ 2 個，1 個の石もしくは 1 個，2 個の石を集めることができる．

u, v にそれぞれ 2 個，1 個の石が集められる状態とする．v にある石の数は 1 であるから，補題 2 より，v から u への有向パスが存在する．その有向パスを利用すれば，u から v へ石を動かすことができる．

したがって，任意の頂点対 u, v に対して，u, v にそれぞれ 2 個，1 個の石を集めることができる． □

補題 2， 4 から次の補題が導かれる．

補題 5. ラーマングラフ $L = (V, E)$ と任意の頂点対 $\{u, v\} \subset V$ に対し，ペブルゲームの操作で，u, v にそれぞれ *2* 個，*1* 個の石を集めたときの向き付けを $\hat{L} = (V, \hat{E})$ とする．このとき，$(v, w) \in \hat{E}$ に対して，w から u への *2* 本の辺疎な有向パスが存在する．

証明. 補題 2 より，u を除く任意の頂点は u への有向パスを少なくとも 1 本持つ．

グラフの頂点を，u への 2 本以上の辺疎な有向パスを持つ頂点の集合 V_1 と u への有向パスが 1 つしかない頂点の集合 V_2 に分ける．

このとき，v の出次数は 1 であるから，V_2 に含まれることに注意されたい．

w が V_1 の要素であるならば，明らかである．

w は V_2 の要素とする．よって，w に u から 1 個の石を移動することができ，V_2 に 2 個の石を集めることができる．補題 4 より，任意の頂点対に 2 個，1 個の石を集めることができる．よって，少なくとも，頂点対 $\{x, y\} \subset V_2$ に 3 個目の石を集めるために，V_2 から V_1 へのもう一つのパスが存在し，グラフが 2 つのカットを持っている．そのため，w から u への 2 つの辺疎な有向パスが存在する． □

補題 2，4，5 を用いて，定理 1 の証明を行う．

証明. 帰納法で証明する．

仮定より，v が 1 個の石しか持たないため，補題 2 よりペブルゲームの向き付け $\hat{L} = (V, \hat{E})$ では，v の出次数が 1 である．まず，v が始点となる辺 (v, w) に対し，補題 5 より v の石を動かさずに，(v, w) の終点 w に 2 個の石を集められる．(v, w) の削除より，v に 1 個の石を与える．w から u に 2 個の石を戻し，(u, v) の追加が可能になる．

同様に，v からの有向パスをもつ頂点を w とすると再帰的に操作を行うことで題意を得る． □

なお，定理 1 と補題 2 から，次の系 6 が導かれることを補足しておく．

M-Circuit とは $2|V| - 2$ 本の辺を持ち，(2) を満たすグラフと定義する．M-Circuit の各誘導部分グラフが (2) を満たすため，M-Circuit の任意の辺を削除すると，ラーマングラフになる．すなわち M-Circuit はサイズ $2|V| - 2$ を持つ疎性マトロイドのサーキットである．

系 6. ラーマングラフ $L = (V, E)$ と追加したい辺 $f = \{uv\}, \{u, v\} \subset V$ が与えられるとする．$L = (V, E)$ と f に対して，ペブルゲームを行った後，u, v はそれぞれ *2* 個，*1* 個の石をもつときの向き付けを $\hat{L} = (V, \hat{E})$ とする．このとき，ペブルゲームで得られた向き付けにおいて，$G + f$ 上で u を含む強連結成分を満たす部分グラフ U とすると，U で誘導される部分グラフが $G + f$ の *M-Circuit* である．

f の 1 個の石しか持たない頂点 v から到達可能な全ての頂点を見つけるために，深さ優先探索を行う．深さ優先探索で見つからない頂点に関しては，その頂点から出る辺が必ず f と交換可能ではないため，M-Circuit の要素ではない．よって，ペブルゲームの向き付け上で動作する深さ優先探索は M-Circuit を見つけることができる．

3.3 分散アルゴリズムの設計

本節では，定理 1 を用いて，分散アルゴリズムを設計する．まず，ペブルゲームに関する新しい局所操作を定義する．$\hat{L}_i = (V, \hat{E}_i)$ をペブルゲームで向き付けされたラーマングラフとし，ある頂点対 $u, v; \{uv\} \in E_n \setminus E_i$ に対して，u に石が 2 個，v に石が 1 個あるものとする．補題 2 より，頂点 v は出次数が 1 であることが言える．このとき，v から出る辺の終点を w とする．このとき，$\hat{E}'_i = \hat{E}_i - (v, w) + (v, u)$ としたものは，ラーマングラフに対するペブルゲームの正しい向き付けになっている．なお，石は u に 2 個，v に 1 個のままであることに注意されたい．ペブルゲームの操作により，石を u から v に 1 個移動し，$\hat{E}''_i = \hat{E}'_i - (v, u) + (u, v)$ もペブルゲームの正しい向き付けになる．

補題 2 より，w から u へ有向パスが存在することがわかる．u の石を w に移動させると，(u, v) を追加する前と同様な状態になる．従って，再帰的に L_n にない辺が削除されるまで，上記の操作を繰り返す．

4 おわりに

ラーマングラフの局所遷移可能性について，ペブルゲームを用いて，議論を行った．今後の課題としては，MCMC 法を用いたラーマングラフのランダム生成法の設計が挙げられる．

参考文献

[1] Jacobs, D., Hendrickson, B.: An algorithm for two dimensional rigidity percolation: the pebble game, *Journal of Computational Physics*, 137 (1997), pp.346–365.

[2] 加藤直樹: 三角形分割とラーマングラフ：建築への応用, *RAMP シンポジウム 2006*, pp.135–152.