数理解析研究所講究録
第 1856 巻 2013 年 12-23

二重非線型抽象的発展方程式の周期解の存在について

小池 昌裕
(早稲田大学大学院先進理工学研究科)
大谷 光春
(早稲田大学先進理工学部応用物理学科)

1 導入

次の二重非線型発展方程式の周期解の存在について考える。

$$\alpha(u_t) - \triangle_m u = f(t) \quad \text{in} \quad \Omega \times (0, \mathrm{T}),$$

$$u = 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega \times (0, \mathrm{T}),$$

$$u(0) = u(\mathrm{T}) \quad \text{in} \quad \Omega,$$

ここで Ω は $\mathbb{R}^N$ の有界な領域とし、その境界 $\partial\Omega$ は滑らかとする。f は $L^{p'}(0,T;\mathrm{V}^*)$ の元とし V^* はあるバナッハ空間 V の共役空間とする。$\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ かつ $\triangle_m$ は m ラプラシアンで次のように与えられる。

$$\triangle_m u = \mathrm{div}(| \nabla u |^{m-2} \nabla u), \quad 1 < \mathrm{m} < \infty.$$

さらに、 α は $\mathbb{R}$ 上の単調作用素、 $\mathrm{p} \in [2, \infty)$ かつ c_1, c_2, c_3 を正の定数とし

$$c_1 \mid x \mid^p \leq \beta(x) + c_2,$$

$$\mid \alpha(x) \mid^{p'} \leq c_3 (\mid x \mid^p + 1), \quad p' = p/(p-1),$$

を満たすとする。ここに $\beta(x) = \int_0^x \alpha(c)\, dc$ とする。上記の二重非線型発展方程式は次の適当なバナッハ空間内の抽象方程式に帰着することがことができる。

$$\mathrm{d}\psi(u_t(t)) + \partial\phi(u(t)) \ni f(t) \quad \text{in } \mathrm{V}^*, \tag{1.1}$$

$$u(0) = u(\mathrm{T}). \tag{1.2}$$

ここで V^* は一様凸バナッハ空間 V の共役空間、$f \in L^{p'}(0,T;\mathrm{V}^*)$ 、$\phi : \mathrm{V} \to (-\infty, \infty]$ は適正 (即ち、恒等的に ∞ とならない) 下半連続凸関数、$\psi : \mathrm{V} \to (-\infty, \infty]$ は凸かつ Gâteaux 微分可能な関数とする。$\mathrm{d}\psi$ と $\partial\phi$ は各々ψ の Gâteaux 微分と ϕ の劣微分を表すとする。

実際、 $m^* = \infty$ ($N \leq m$ の時)、$m^* = \frac{Nm}{N-m}$ ($m < N$ の時) とおき、$p < m^*$ と仮定し、

$$\mathrm{V} = L^p(\Omega), \qquad \mathrm{X} = W_0^{1,m}(\Omega),$$

$$\psi(u) = \int_\Omega \beta(u(x))dx \quad \forall u \in \mathrm{V}, \qquad \phi(u) = \begin{cases} \frac{1}{m}\int_\Omega |\nabla u|^m\, dx & \text{if } u \in W_0^{1,m}(\Omega), \\ \infty & \text{if } u \in \mathrm{V}\backslash W_0^{1,m}(\Omega). \end{cases}$$

とおく。この時、埋め込み $\mathrm{X} \hookrightarrow \mathrm{V}$ がコンパクトであることは Rellich-Kondrachov の定理からわかる。さらに ψ は Gâteaux 微分可能で凸、ϕ_X ($\phi_\mathrm{X} : \mathrm{X} \to [0,\infty]$ は ϕ を X に制限したもの) は劣微分可能かつ凸で各々 $\mathrm{d}\psi(u_t) = \alpha(u_t)$, $\partial\phi(u) = -\triangle_m u$ となる。

Akagi and Stefanelli [1] は Weighted Energy-Dissipation functional の変分構造を解析することで二重非線型抽象的発展方程式のコーシー問題の可能性を示した。しかしながら、この方法は周期問題に適さない。よって、ここでは別の方法を紹介する。

2 定義

定義 2.1 φ_E はあるノルム空間 E から $(-\infty,\infty]$ への適正 (つまり $\varphi \not\equiv \infty$) 下半連続凸関数 とする。この時 φ の劣微分作用素 $\partial\varphi_\mathrm{E} : \mathrm{E} \to \mathrm{E}^*$ は次で定義される。

$$\partial\varphi_\mathrm{E} : x \longmapsto \{\, y \in \mathrm{E}^*\,;\, \varphi(z) \geq \varphi(x) + \langle y, z-x \rangle_\mathrm{E} \ \forall z \in \mathrm{E} \,\}$$

その定義域は $\quad D(\partial\varphi_\mathrm{E}) = \{\, z \in \mathrm{E}\,;\, \partial\varphi_\mathrm{E}(z) \neq \phi \,\}.$

ここで $\partial_\mathrm{E}\varphi$ は $\mathrm{E} \times \mathrm{E}^*$ 上の極大単調作用素であることはよく知られている。

定義 2.2 ψ が u で Gâteaux 可能であるとは、

$$\lim_{h \to 0} \frac{\psi(u + h\,e) - \psi(u)}{h} = \langle \xi, e \rangle_\mathrm{E}.$$

を満たす $\xi \in \mathrm{E}^*$ が存在することである。この場合 ξ は u における ψ の Gâteaux 導関数といい、これを $\mathrm{d_E}\psi(u)$ と表す。ψ が u で Gâteaux 微分可能かつ凸ならば劣微分 $\partial\phi(u)$ は $\mathrm{d_E}\psi(u)$ の元のみである。

3 仮定

V と V^* は一様凸バナッハ空間としそれぞれのノルムを $|\cdot|_\mathrm{V}$ と $|\cdot|_{\mathrm{V}^*}$ で表して、duality pairing は $\langle\cdot,\cdot\rangle_\mathrm{V}$ とする。X と X^* は回帰的バナッハ空間とし、それぞれのノルムを $|\cdot|_\mathrm{X}$ と $|\cdot|_{\mathrm{X}^*}$ で表し duality pairing を $\langle\cdot,\cdot\rangle_\mathrm{X}$ とする。さらに埋め込み

$$\mathrm{X} \hookrightarrow \mathrm{V} \ , \ \mathrm{V}^* \hookrightarrow \mathrm{X}^*$$

はコンパクトであるとする。$\phi : \mathrm{V} \to [0,\infty]$ は適正下半連続凸関数とし、$\psi : \mathrm{V} \to [0,\infty)$ は Gâteaux 微分可能で凸とし、ϕ の劣微分と ψ の Gâteaux 導関数を各々$\partial\phi$ と $\mathrm{d}\psi$ で表す。

$p \in [2,\infty)$ と $m \in (1,\infty)$ として ψ と ϕ、さらに各々の劣微分作用素と Gâteaux 導関数に次の仮定を課す。

$$\exists \mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2 > 0 \quad \text{s.t.} \quad C_1 \mid u \mid_{\mathrm{V}}^{p} \ \leq \psi(u) + C_2 \quad \forall u \in \mathrm{V}. \tag{3.1}$$

$$\exists \mathrm{C}_3, \mathrm{C}_4 > 0 \quad \text{s.t.} \quad \mid \mathrm{d}\psi(u) \mid_{\mathrm{V}^*}^{p'} \ \leq C_3 \mid u \mid_{\mathrm{V}}^{p} + C_4 \quad \forall u \in \mathrm{V}. \tag{3.2}$$

$$\exists \mathrm{C}_5 > 0 \quad \text{s.t.} \quad \mid u \mid_{\mathrm{X}}^{m} \ \leq C_5\,(\phi(u) + 1) \quad \forall u \in \mathrm{D}(\phi). \tag{3.3}$$

$$\exists \mathrm{C}_6 > 0 \quad \text{s.t.} \quad \mid \eta \mid_{\mathrm{X}^*}^{m'} \ \leq C_6\,(\mid u \mid_{\mathrm{X}}^{m} + 1) \quad \forall \eta \in \partial_{\mathrm{X}}\phi_{\mathrm{X}}(u). \tag{3.4}$$

4 主な結果

定理 4.1 (3.1)-(3.4) を全て満たすとする。この時 (1.1)-(1.2) の elliptic regularization

$$-\varepsilon(\mathrm{d}\psi(u_\varepsilon'))' + \mathrm{d}\psi(u_\varepsilon'(t)) + \partial_{\mathrm{X}}\phi_{\mathrm{X}}(u_\varepsilon(t)) + \varepsilon u_\varepsilon + \varepsilon \mathrm{d}\psi(u_\varepsilon(t)) + \varepsilon\phi^{\alpha}\partial_{\mathrm{X}}\phi_{X}(u_\varepsilon) \ni f(t) \text{ in } \mathrm{X}^*, \tag{4.1}$$

$$u_\varepsilon(0) = u_\varepsilon(\mathrm{T}), \tag{4.2}$$

$$\mathrm{d}\psi(u_\varepsilon'(0)) = \mathrm{d}\psi(u_\varepsilon'(\mathrm{T})), \tag{4.3}$$

は一意的な強解 u_ε を持つ。さらにこの解は

$$\int_0^T \mid u_\varepsilon' \mid_{\mathrm{V}}^{p} dt \leq C, \tag{4.4}$$

$$\int_0^T \phi(u_\varepsilon)dt \leq C, \tag{4.5}$$

$$\int_0^T \langle \tilde{\eta}, u_\varepsilon \rangle_{\mathrm{X}} dl \leq -\int_0^T \langle \varepsilon \mathrm{d}\psi(u_\varepsilon'), u_\varepsilon' \rangle_{\mathrm{V}} dt - \int_0^T \langle \mathrm{d}\psi(u_\varepsilon'), u_\varepsilon \rangle_{\mathrm{V}} dt + \int_0^T \langle f, u_\varepsilon \rangle_{\mathrm{V}} dt, \tag{4.6}$$

$$\int_0^T \langle \mathrm{d}\psi(u_\varepsilon'), u_\varepsilon' \rangle_{\mathrm{V}} dt \leq \int_0^T \langle f, u_\varepsilon' \rangle_{\mathrm{V}} dt. \tag{4.7}$$

を満たす。ここに α は $\frac{m}{p}-1$ より大きな定数かつ $\tilde{\eta}(t)$ は (4.1) を満たす $\partial_{\mathrm{X}}\phi_{\mathrm{X}}(u_\varepsilon(t))+\varepsilon\phi^{\alpha}(u_\varepsilon(t))\partial_{\mathrm{X}}\phi_{\mathrm{X}}(u_\varepsilon(t))$ の section を表す。

定理 4.2 (3.1)-(3.4) を全て満たすとする。この時部分列 ε_n と u が存在して $\varepsilon_n \to 0$ とした時

$$u_{\varepsilon_n} \to u \ \text{ strongly in } \ \mathrm{C}([0,\mathrm{T}];\mathrm{V}), \tag{4.8}$$

$$u_{\varepsilon_n} \rightharpoonup u \ \text{ weakly } \ \text{ in } \ \mathrm{W}^{1,p}(0,\mathrm{T};\mathrm{V}) \cap \mathrm{L}^m(0,\mathrm{T};\mathrm{X}). \tag{4.9}$$

をみたす。さらに u は (1.1)-(1.2) の強解となる。

5 定理の証明の概略

5.1 定理 4.1 の証明

定理 4.1 の証明は次のように三つの段階に分けて行う。

Step1

$m > p$、$h \in L^{p'}(0,T;\mathrm{V}^*)$ とする。次のような補助的な方程式を導入する。

$$
(\mathrm{AE})^{\mathrm{h}}_{\lambda}\begin{cases} -\varepsilon(\mathrm{d}\psi(u'_\lambda(t)))' + \varepsilon\mathrm{d}\psi(u_\lambda(t)) + \partial_{\mathrm{V}}\phi_\lambda(u_\lambda(t)) + \varepsilon u_\lambda(t) = f(t) + h(t) \quad \text{in} \quad \mathrm{V}^* \\ u_\lambda(0) = u_\lambda(\mathrm{T}) \\ \mathrm{d}\psi(u'_\lambda(0)) = \mathrm{d}\psi(u'_\lambda(\mathrm{T})) \end{cases}
$$

$(\mathrm{AE})^{\mathrm{h}}_{\lambda}$ は一意的な解を持つ。ここで ϕ_λ は ϕ の吉田近似とする。この方程式において $\lambda \to 0$ とすると $u_\lambda \to u_h$ かつ u_h は

$$
(\mathrm{AE})^{\mathrm{h}}\begin{cases} -\varepsilon(\mathrm{d}\psi(u'_h(t)))' + \varepsilon\mathrm{d}\psi(u_h(t)) + \partial_{\mathrm{X}}\phi_{\mathrm{X}}(u_h(t)) + \varepsilon u_h(t) \ni f(t) + h(t) \quad \text{in} \quad \mathrm{X}^* \\ u_h(0) = u_h(\mathrm{T}) \\ \mathrm{d}\psi(u'_h(0)) = \mathrm{d}\psi(u'_h(\mathrm{T})) \end{cases}
$$

の一意的な解となる。

Step2

$\Xi \equiv L^{p'}(0,T;V^*)$(with weak topology) とし h を $K_R \equiv \{x \in \Xi; \mid x \mid_{L^{p'}(0,T;V^*)} \leq R\}$ の任意の元とする。ここで $K_R \equiv \{x \in \Xi; \mid x \mid_{L^{p'}(0,T;V^*)} \leq R\}$ は Banach-Alaoglu の定理によりコンパクト集合となる。u_h を $(\mathrm{AE})^h$ の唯一解とする。作用素 $\beta(h)$ を次のように定める。

$$
\beta(h) \; : \; h \longmapsto u_h \longmapsto -\mathrm{d}\psi(u'_h),
$$
$$
\beta(h) = -\mathrm{d}\psi(u'_h).
$$

この時 $\beta(h)$ は self-mapping かつ連続になるので Schauder の不動点定理により K_R 内に不動点を持つ。よって、

$$
(\mathrm{AE})\begin{cases} -\varepsilon(\mathrm{d}\psi(u'_\varepsilon(t)))' + \mathrm{d}\psi(u'_\varepsilon(t)) + \partial_{\mathrm{X}}\phi_{\mathrm{X}}(u_\varepsilon(t)) + \varepsilon u_\varepsilon(t) + \varepsilon\mathrm{d}\psi(u_\varepsilon(t)) \ni f(t) \text{ in } \mathrm{X}^*, \\ u_\varepsilon(0) = u_\varepsilon(\mathrm{T}), \\ \mathrm{d}\psi(u'_\varepsilon(0)) = \mathrm{d}\psi(u'_\varepsilon(\mathrm{T})), \end{cases}
$$

は強解を持つ。

強解の定義 5.1

u が $(\mathrm{AE})^h$ の強解であるとは、u が $(\mathrm{AE})^h$ を満たしさらに次の条件を満たすことである。

$$
\begin{aligned}
&u \in W^{1,p}(0,\mathrm{T};\mathrm{V}) \cap L^m(0,T;\mathrm{X}),\\
&\mathrm{d}\psi(u_t(\cdot)) \in L^{p'}(0,\mathrm{T};\mathrm{V}^*),\\
&\partial_{\mathrm{X}}\phi_{\mathrm{X}}(u(\cdot)) \in L^{m'}(0,\mathrm{T};\mathrm{X}^*),\\
&(\mathrm{d}\psi(u_t(\cdot)))' \in L^{p'}(0,\mathrm{T};\mathrm{V}^*) + L^{m'}(0,\mathrm{T};\mathrm{X}^*).
\end{aligned}
$$

Step3

定理 4.2 においてアプリオリ評価を行う時に用いる不等式 (4.4)-(4.7) を導出する。

Step1 の証明

$\Gamma \equiv L^p(0,T;\mathrm{V})$ とおく。$I_\varepsilon^1 : \Gamma \to [0,\infty]$ を次式で定義する。

$$I_\varepsilon^1(u) \equiv \begin{cases} \int_0^T \varepsilon\psi(u'(t))dt & (\ u \in W^{1,p}(0,T;\mathrm{V}) \quad \text{かつ } u(0)=u(T) \text{ の時}) \\ \infty & \text{その他} \end{cases}$$

補題 1 作用素 $A : \Gamma \to \Gamma^*$ を次式で定義する。

$$A(u)(t) = -\frac{d}{dt}\big(\varepsilon \mathrm{d_V}\psi(u'(t))\big) \text{ for } u \in D(A)$$

その定義域は

$$D(A) = \{u \in D(I_\varepsilon^1); \mathrm{d_V}\psi(u'(\cdot)) \in W^{1,p'}(0,T;\mathrm{V}^*), \mathrm{d}\psi(u_\varepsilon'(0)) = \mathrm{d}\psi(u_\varepsilon'(\mathrm{T}))\}.$$

この時 $A = \partial_\Gamma I_\varepsilon^1$ となる。

$I_{\varepsilon,\lambda}$ を次のように定義する。

$$I_{\varepsilon,\lambda}(u) \equiv \begin{cases} \int_0^T \phi_\lambda(u(t)) + \varepsilon\psi(u'(t)) + \varepsilon\psi(u(t)) + \frac{\varepsilon}{2}|\ u\ |_\mathrm{V}^2 - \langle f+h, u\rangle_\mathrm{V} dt \\ \quad (u \in W^{1,p}(0,T;\mathrm{V})), u(0)=u(T) \text{ かつ} \psi(u(\cdot)), \psi(u'(\cdot)), \phi_\lambda(u(\cdot)) \in L^1(0,T) \text{ の時}) \\ \infty \qquad\qquad \text{その他} \end{cases}$$

補題 2 上記の汎関数 $I_{\varepsilon,\lambda}$ は global minimizer u_λ を Γ 内に持つ。

補題 1 、 2 より $(\mathrm{AE})_\lambda^h$ は一意的な強解をもつ。
$(\mathrm{AE})_\lambda^h$ の方程式に $u_\lambda(t)$ をかけると

$$\begin{aligned} &\int_0^T \langle \varepsilon \mathrm{d}\psi(u_\lambda'), u_\lambda'\rangle_\mathrm{V} dt + \int_0^T \langle \partial_\mathrm{V}\phi_\lambda(u_\lambda), u_\lambda\rangle_\mathrm{V} dt \\ &\qquad + \int_0^T \langle \varepsilon \mathrm{d}\psi(u_\lambda), u_\lambda\rangle_\mathrm{V} + \langle \varepsilon u_\lambda, u_\lambda\rangle_\mathrm{V} dt = \int_0^T \langle f+h, u_\lambda\rangle_\mathrm{V} dt \end{aligned} \tag{5.1}$$

仮定の (3.1),(3.3) より

$$\|u_\lambda\|_{L^2(0,T;\mathrm{V})} + \|u_\lambda\|_{W^{1,p}(0,T;\mathrm{V})} + \|J_\lambda u_\lambda\|_{L^m(0,T;\mathrm{X})} \le C \tag{5.2}$$

$$\int_0^T \psi(u_\lambda)dt + \int_0^T \psi(u_\lambda')dt + \int_0^T \phi_\lambda(u_\lambda)dt \le C \tag{5.3}$$

さらに仮定 (3.2),(3.4) より

$$\int_0^T |\ \mathrm{d}\psi(u_\lambda)\ |_{\mathrm{V}^*}^{p'} dt \le C\int_0^T |\ u_\lambda\ |_\mathrm{V}^p dt + C'$$

$$\int_0^T |\,\mathrm{d}\psi(u'_\lambda)\,|_{\mathrm{V}^*}^{p'}\,dl \le C\int_0^T |\,u'_\lambda\,|_{\mathrm{V}}^{p}\,dl + C'$$

$$\int_0^T |\,\partial_{\mathrm{V}}\phi_\lambda(u_\lambda)\,|_{\mathrm{X}^*}^{m'}\,dt \le C\int_0^T |\,J_\lambda u_\lambda\,|_{\mathrm{X}}^{m}\,dt + C'$$

が示せるので $(\mathrm{AE})_\lambda^h$ の方程式から

$$\|(\mathrm{d}\psi(u'_\lambda))'\|_{L^{p'}(0,T;\mathrm{V}^*)+L^{m'}(0,T;\mathrm{X}^*)} \le \|\mathrm{d}\psi(u_\lambda)\|_{L^{p'}(0,T;\mathrm{V}^*)}$$

$$+\|\partial_V\phi_\lambda(u_\lambda)\|_{L^{m'}(0,T;\mathrm{X}^*)} + \|f+h\|_{L^{p'}(0,T;\mathrm{V}^*)} \le C$$

が導ける。上記のアプリオリ評価から $\exists\lambda_n \to 0$ s.t.

$$u_{\lambda_n} \rightharpoonup u \quad \text{in} \quad W^{1,p}(0,T;\mathrm{V})$$

$$\partial_V\phi_{\lambda_n}(u_{\lambda_n}) \rightharpoonup \eta \quad \text{in} \quad L^{m'}(0,T;\mathrm{X}^*)$$

$$\mathrm{d}\psi(u_{\lambda_n}) \rightharpoonup a \quad \text{in} \quad L^{p'}(0,T;\mathrm{V}^*)$$

$$\mathrm{d}\psi(u'_{\lambda_n}) \rightharpoonup \xi \quad \text{in} \quad L^{p'}(0,T;\mathrm{V}^*)$$

$$(\mathrm{d}\psi(u'_{\lambda_n}))' \rightharpoonup \xi' \quad \text{in} \quad L^{m'}(0,T;\mathrm{X}^*) + L^{p'}(0,T;\mathrm{V}^*)$$

これらから方程式は

$$-\varepsilon\xi' + \eta + \varepsilon a + \varepsilon u = f + h$$

となる。
最後に次を示す。

$$\begin{cases} \eta(t) \in \partial_{\mathrm{X}}\phi_{\mathrm{X}}(u(t)) \ \ \text{a.e} \ \ t \in (0,T), \\ \xi(t) = \mathrm{d}\psi(u'(t)) \ \ \text{a.e} \ \ t \in (0,T), \\ a(t) = \mathrm{d}\psi(u(t)) \ \ \text{a.e} \ \ t \in (0,T). \end{cases}$$

補題3　H.Brezis (1970) A を $\mathrm{E}\times\mathrm{E}^*$ 上の極大単調作用素とする。
$[u_n, v_n] \in \mathrm{A}$ かつ $u_n \rightharpoonup u$ in E, $v_n \rightharpoonup v$ in E^* が成立するとし、さらに

$$\limsup_{n\to\infty}\langle u_n - u, v_n - v\rangle_{\mathrm{E}} \le 0,$$

を仮定する。この時 $[u,v] \in \mathrm{A}$ かつ $\langle u_n, v_n\rangle_{\mathrm{E}} \to \langle u,v\rangle_{\mathrm{E}}$ が成立する。

この補題を用いることで上記の等式を証明することができる。

Step 2の証明

Step1から

$$-\varepsilon(\mathrm{d}\psi(u(t)'))' + \varepsilon\mathrm{d}\psi(u(t)) + \partial_{\mathrm{X}}\phi_{\mathrm{X}}(u(t))$$
$$+\varepsilon u(t) \ni f(t) + h(t) \quad \text{in } \mathrm{X}^*,$$
$$u(0) = u(\mathrm{T}),$$
$$\mathrm{d}\psi(u'(0)) = \mathrm{d}\psi(u'(\mathrm{T})),$$

は一意的な解を持つ。

Schauderの不動点定理を用いるために 次の２つの事実を示す。

(#1) $\beta(h)$ maps K_R into itself,

$(K_R \equiv \{x \in \Xi; \mid x \mid_{L^{p'}(0,T;V^*)} \leq R\})$

(#2) Let $h_n \rightharpoonup h$ in $L^{p'}(0,T;\mathrm{V}^*)$, then $\beta(h_n) \rightharpoonup \beta(h)$ in $L^{p'}(0,T;\mathrm{V}^*)$.

(#1)の証明

$(\mathrm{AE})^{\mathrm{h}}$ の方程式に u_h をかけると次を得る。

$$C\varepsilon \mid u_h' \mid^p_{L^p(0,T;\mathrm{V})} + C \mid u_h \mid^m_{L^m(0,T;\mathrm{X})} + \varepsilon C \mid u_h \mid^p_{L^p(0,T;\mathrm{V})} + \varepsilon \mid u_h \mid^2_{L^2(0,T;X)}$$
$$\leq C_\eta \mid f \mid^{p'}_{L^{p'}(0,T;\mathrm{V}^*)} + \eta \mid u_h \mid^p_{L^p(0,T;\mathrm{V})} + \eta \mid h \mid^{p'}_{L^{p'}(0,T;\mathrm{V}^*)} + C_\eta \mid u_h \mid^p_{L^p(0,T;\mathrm{V})}$$

コンパクトな埋め込み $\mathrm{X} \hookrightarrow \mathrm{V}$ と $m > p$ から、次の事実を得る。

$$C\varepsilon \mid u_h' \mid^p_{L^p(0,T;\mathrm{V})} + C \mid u_h \mid^m_{L^m(0,T;\mathrm{X})} + \varepsilon C \mid u_h \mid^p_{L^p(0,T;\mathrm{V})} \leq C_f + C + \eta R^{p'}$$

ノルムの正値性から

$$C\varepsilon \mid u_h' \mid^p_{L^p(0,T;\mathrm{V})} \leq C_f + C + \eta R^{p'}$$

仮定 (3.2) から

$$\mid \mathrm{d}\psi(u) \mid^{p'}_{\mathrm{V}^*} \leq C_3 \mid u \mid^p_{\mathrm{V}} + C_4,$$

よって、

$$C\varepsilon \mid \beta(h) \mid^{p'}_{L^{p'}(0,T;\mathrm{V})} \leq C_f + C + \eta R^{p'}$$

が成立する。R を充分大きくとり η を充分小さくとると

$$\mid \beta(h) \mid^{p'}_{L^{p'}(0,T;\mathrm{V})} \leq R^{p'}$$

を得る。即ち、

$$\beta : K_R \to K_R$$

がいえた。(#1)の証明は終了。

(#2) の証明
$h_n \rightharpoonup h$ in $L^{p'}(0,T;\mathrm{V}^*)$ とおく。この時 $|\, h\,|^{p'}_{L^{p'}(0,T;\mathrm{V}^*)} \leq C$ である。 Step1 と同様のアプリオリ評価をすることで次式を得る。

$$|\, u'_{h_n}\,|^p_{L^p(0,T;\mathrm{V})} + |\, u_{h_n}\,|^m_{L^m(0,T;\mathrm{X})} + |\, u_{h_n}\,|^p_{L^p(0,T;\mathrm{V})} + |\, u_{h_n}\,|^2_{L^2(0,T;\mathrm{X})} \leq C$$

仮定 (3.2),(3.4) から

$$|\, \mathrm{d}\psi(u'_{h_n})\,|_{L^{p'}(0,T;\mathrm{V}^*)} \leq C$$

$$|\, \partial_{\mathrm{X}}\phi_{\mathrm{X}}(u_{h_n})\,|_{L^{m'}(0,T;\mathrm{X}^*)} \leq C$$

$$|\, \varepsilon(\mathrm{d}\psi(u'_{h_n}))'\,|_{L^m(0,T;X^*)+L^p(0,T;V^*)} \leq C$$

上記のアプリオリ評価から

$$u_{h_n} \rightharpoonup u_h \quad \text{in} \quad W^{1,p}(0,T;\mathrm{V})$$

$$u_{h_n} \rightharpoonup u_h \quad \text{in} \quad L^2(0,T;\mathrm{X})$$

$$\partial_{\mathrm{X}}\phi_{\mathrm{X}}(u_{h_n}) \rightharpoonup \eta_h \quad \text{in} \quad L^{m'}(0,T;\mathrm{X}^*)$$

$$\mathrm{d}\psi(u_{h_n}) \rightharpoonup a_h \qquad \text{in} \quad L^{p'}(0,T;\mathrm{V}^*)$$

$$\mathrm{d}\psi(u'_{h_n}) \rightharpoonup \xi_h \qquad \text{in} \quad L^{p'}(0,T;\mathrm{V}^*)$$

$$(\mathrm{d}\psi(u'_{h_n}))' \rightharpoonup \xi'_h \qquad \text{in} \quad L^{m'}(0,T;\mathrm{X}^*) + L^{p'}(0,T;\mathrm{V}^*)$$

これらより方程式は

$$-\varepsilon\xi'_h + \eta_h + \varepsilon a_h + \varepsilon u_h = f + h \qquad \text{in} \quad \mathrm{X}^*$$

となる。最後に次式を確認する必要がある。

$$\begin{aligned}
&\eta_h(t) \in \partial_{\mathrm{X}}\phi_{\mathrm{X}}(u_h(t)),\\
&\xi_h(t) = \mathrm{d}\psi(u'_h(t)),\\
&a_h(t) = \mathrm{d}\psi(u_h(t)).
\end{aligned}$$

これらは Step1 と同様にすれば導く事ができる。よって (#1)、(#2) から $\beta(h)$ は K_R 内に不動点を持つ。したがって、

$$-\varepsilon(\mathrm{d}\psi(u'_\varepsilon(t)))' + \mathrm{d}\psi(u'_\varepsilon(t)) + \partial_{\mathrm{X}}\phi_{\mathrm{X}}(u_\varepsilon(t)) + \varepsilon u_\varepsilon(t) + \varepsilon\mathrm{d}\psi(u_\varepsilon(t)) \ni f(t) \text{ in } \mathrm{X}^*,$$

$$u_\varepsilon(0) = u_\varepsilon(\mathrm{T}),$$

$$\mathrm{d}\psi(u'_\varepsilon(0)) = \mathrm{d}\psi(u'_\varepsilon(\mathrm{T})),$$

は強解を持つ。

Step3 の証明

不等式 (4.4) の導出

不等式 (5.2) と

$$u_{\lambda_n} \rightharpoonup u \quad \text{in} \quad L^p(0,T;\mathrm{V}),$$

より

$$\int_0^T \mid u'_\varepsilon \mid_{\mathrm{V}}^p dt \leq C.$$

不等式 (4.5) の導出

吉田近似の等式から

$$\phi(J_\lambda u_\lambda) \leq \phi_\lambda(u_\lambda),$$

が導ける。また不等式 (5.2) から

$$J_{\lambda_n} u_{\lambda_n} \rightharpoonup u \quad \text{in} \quad L^m(0,T;\mathrm{X})$$

さらに Simon[5] のコンパクト性に関する定理から

$$J_{\lambda_n} u_{\lambda_n} \rightharpoonup u \quad \text{in V}$$

が示せる。よってこれらと不等式 (5,3) から

$$\int_0^T \phi(u_\varepsilon) dt \leq C,$$

を導出できる。

不等式 (4.6) の導出

リゾルベントの性質より

$$\int_0^T \langle \partial\phi_\lambda(J_\lambda u_\lambda), J_\lambda u_\lambda \rangle_{\mathrm{X}} dt \leq \int_0^T \langle \partial\phi_\lambda(J_\lambda u_\lambda), u_\lambda \rangle_{\mathrm{V}} dt,$$

が成立する。さらに式 (5.1) から

$$\begin{aligned}
\int_0^T \langle \eta_\varepsilon, u_\varepsilon \rangle_{\mathrm{X}} dt &\leq \limsup_{\lambda_n \to 0} \int_0^T \langle \partial\phi_\lambda(J_\lambda u_\lambda), J_\lambda u_\lambda \rangle_{\mathrm{X}} dt \\
&\leq \limsup_{\lambda_n \to 0} \int_0^T \langle \partial\phi_\lambda(J_\lambda u_\lambda), u_\lambda \rangle_{\mathrm{V}} dt \\
&\leq -\int_0^T \langle \varepsilon \mathrm{d}\psi(u'_\varepsilon), u'_\varepsilon \rangle_{\mathrm{V}} dt - \int_0^T \langle h, u_\varepsilon \rangle_{\mathrm{V}} dt + \int_0^T \langle f, u_\varepsilon \rangle_{\mathrm{V}} dt,
\end{aligned}$$

ここに η は $\partial_{\mathrm{X}}\phi_{\mathrm{X}}(u_{\varepsilon}(t))$ の section を表す。最後に不動点定理から

$$h = -\mathrm{d}\psi(u'_{\varepsilon}),$$

が成立しているので求める不等式を導出できる。
不等式 (4.7) の導出
$(\mathrm{AE})^h$ の方程式に u'_{ε} をかけると

$$-\int_0^T \langle \varepsilon(\mathrm{d}\psi(u'_h(t)))', u'_{\varepsilon}\rangle_{\mathrm{V}} dt + \int_0^T \langle \mathrm{d}\psi(u'_{\varepsilon}), u'_{\varepsilon}\rangle_{\mathrm{V}} dt + \int_0^T \langle \eta_{\varepsilon}, u'_{\varepsilon}\rangle_{\mathrm{X}} dt + \int_0^T \langle \varepsilon u_{\varepsilon}, u'_{\varepsilon}\rangle_{\mathrm{V}} dt$$
$$+ \int_0^T \langle \varepsilon \mathrm{d}\psi(u_{\varepsilon}), u'_{\varepsilon}\rangle_{\mathrm{V}} dt = \int_0^T \langle f, u'_{\varepsilon}\rangle_{\mathrm{V}} dt,$$

周期条件から

$$-\int_0^T \langle \varepsilon(\mathrm{d}\psi(u'_h(t)))', u'_{\varepsilon}\rangle_{\mathrm{V}} dt + \int_0^T \langle \mathrm{d}\psi(u'_{\varepsilon}), u'_{\varepsilon}\rangle_{\mathrm{V}} dt \leq \int_0^T \langle f, u'_{\varepsilon}\rangle_{\mathrm{V}} dt,$$

を示せる。つぎに左辺の第一項を形式的に部分積分すれば

$$\int_0^T \langle (\mathrm{d}\psi(u'_h(t)))', u'_{\varepsilon}\rangle_{\mathrm{V}} dt = \langle \mathrm{d}\psi(u'(T)), u(T)\rangle_{\mathrm{V}} - \langle \mathrm{d}\psi(u'(0)), u(0)\rangle_{\mathrm{V}} - \int_0^T \langle (\mathrm{d}\psi(u'_h(t))), u''_{\varepsilon}\rangle_{\mathrm{V}} dt$$

を得る。周期条件を加味すれば右辺は 0 になる。しかし、厳密に計算する際は極限操作が加わるため左辺は 0 以下になる。つまり、

$$\int_0^T \langle (\mathrm{d}\psi(u'_h(t)))', u'_{\varepsilon}\rangle_{\mathrm{V}} dt \leq 0.$$

これより

$$\int_0^T \langle \mathrm{d}\psi(u'_{\varepsilon}), u'_{\varepsilon}\rangle_{\mathrm{V}} dt \leq \int_0^T \langle f, u'_{\varepsilon}\rangle_{\mathrm{V}} dt,$$

を得られる。これらの不等式は定理 4.2 のアプリオリ評価に用いる。

5.2 定理 4.2 の証明

定理 4.2 の証明は 3 段階に分けて証明する。

1. ε についてアプリオリ評価をする。

2. ε の部分列 ε_n を 0 に収束させる。すると、

$$\eta(t) + \xi(t) = f(t)$$

   が成立する。

3. $\xi(t) = \mathrm{d}\psi(u_t(t))$ かつ $\eta(t) = \partial_{\mathrm{X}}\phi_{\mathrm{X}}(u(t))$ を確認する。その方法は Step1 と同様である。よって求める周期解を得ることができる。つまり、$m > p$ の時

$$\mathrm{d}\psi(u_t(t)) + \partial\phi(u(t)) \ni f(t) \quad \text{in } \mathrm{V}^*,$$
$$u(0) = u(\mathrm{T}).$$

は解を持つ。

最後に $m > p$ という条件を取り除く。実際、$\alpha > \frac{p}{m} - 1$ とし $\tilde{m} \equiv m\alpha + m$ $(\tilde{m} > p)$ とおく。ここで次の補題を述べる。

補題 4 [2] Ôtani (1984)

$$\tilde{\phi_{\mathrm{X}}} = \phi_{\mathrm{X}} + \frac{\varepsilon}{1+\alpha}\phi_{\mathrm{X}}^{1+\alpha}$$

この時 $\quad \mathrm{D}(\partial\tilde{\phi_{\mathrm{X}}}) = \mathrm{D}(\partial\phi_{\mathrm{X}})$, $\mathrm{D}(\tilde{\phi_{\mathrm{X}}}) = \mathrm{D}(\phi_{\mathrm{X}})$

$$\partial\tilde{\phi_{\mathrm{X}}} = \partial\phi_{\mathrm{X}} + \varepsilon\phi_{\mathrm{X}}^{\alpha}\partial_{\mathrm{X}}\phi_{\mathrm{X}}$$

が成立する。

よって、$\tilde{\phi_{\mathrm{X}}}$ と $\partial_{\mathrm{X}}\tilde{\phi_{\mathrm{X}}}$ は次をみたす。

$$\exists \mathrm{C}_5' > 0 \quad \text{s.t.} \quad |\, u\,|_{\mathrm{X}}^{\tilde{m}} \ \leq C_5'\,(\tilde{\phi}(u) + 1) \quad \forall u \in \mathrm{D}(\tilde{\phi}) \qquad (3.3)'$$

$$\exists \mathrm{C}_6' > 0 \quad \text{s.t.} \quad |\, \tilde{\eta}\,|_{\mathrm{X}^*}^{\tilde{m}'} \ \leq C_6'\,(|\, u\,|_{\mathrm{X}}^{\tilde{m}} + 1)\ \forall (u, \tilde{\eta}) \in \partial_{\mathrm{X}}\tilde{\phi_{\mathrm{X}}}(u) \quad (3.4)'$$

仮定 (3.3),(3.4) の代わりに (3.3)',(3.4)' を用いれば、同じ方針で $m > p$ という条件を課していない定理 4.1,4.2 を示すことができる。

参考文献

[1] G. Akagi, U. Stefanelli, Weighted energy-dissipation functionals for doubly nonlinear evolution, J. Funct. Anal. 260 (2011), no. 9, 2541-2578.

[2] M. Ôtani, Nonmonotone perturbations for nonlinear parabolic equations associated with subdifferential operators; periodic problems, J. Differential Equations 54 (1984), no. 2, 248-273.

[3] V. Barbu, Existence theorems for a class of two point boundary problems, J. Differential Equations **17** (1975), 236-257.

[4] H. Brézis, M. G. Crandall, A. Pazy, Perturbations of nonlinear maximal monotone sets in Banach space, Comm. Pure Appl. Math. **23** 1970 123-144.

[5] J. Simon, Compact sets in the space $L^p(0,T;B)$, Ann. Mat. Pura Appl. (4) 146 (1987), 65-96.

[6] J.Prüß, A characterization of uniform convexity and applications to accretive operators, Hiroshima Math. J. **11** (1981), no. 2, 229-234.