数理解析研究所講究録
第 1870 巻 2013 年 58-76

Cyclotomic q-Schur 代数の Drinfeld 型の表示について

和田 堅太郎 (Kentaro Wada)

信州大学 理学部
(Faculty of Science, Shinshu University)

1 Introduction

1.1. R を可換環とし，パラメータ $q, Q_1, \ldots, Q_r \in R$ (q は可逆元) を取る。R 上の複素鏡映群 $\mathfrak{S}_n \ltimes (\mathbb{Z}/r\mathbb{Z})^n$ に付随する **Ariki-Koike 代数** $\mathscr{H}_{n,r}$ とは，以下の生成元と基本関係式によって定義される R 上の単位元を持った結合代数である。

生成元: $T_0, T_1, \ldots, T_{n-1}$.

基本関係式:
$$
\begin{aligned}
&(T_0 - Q_1)(T_0 - Q_2)\ldots(T_0 - Q_r) = 0, && \\
&(T_i - q)(T_i + q^{-1}) = 0 && (1 \leq i \leq n-1), \\
&T_0T_1T_0T_1 = T_1T_0T_1T_0, && \\
&T_iT_{i+1}T_i = T_{i+1}T_iT_{i+1} && (1 \leq i \leq n-2), \\
&T_iT_j = T_jT_i && (|i-j| \geq 2).
\end{aligned}
$$

1.2. $\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_r) \in \mathbb{Z}^r_{>0}$ に対し，

$$
\Lambda_{n,r}(\mathbf{m}) = \left\{ \mu = (\mu^{(1)}, \ldots, \mu^{(r)}) \;\middle|\; \begin{matrix} \mu^{(k)} = (\mu_1^{(k)}, \ldots, \mu_{m_k}^{(k)}) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{m_k} \\ \sum_{k=1}^{r} \sum_{i=1}^{m_k} \mu_i^{(k)} = n \end{matrix} \right\}
$$

とおく。$\mathscr{H}_{n,r}$ に付随する **cyclotomic q-Schur 代数** $\mathscr{S}_{n,r}$ を

$$
\mathscr{S}_{n,r} = \mathscr{S}_{n,r}(\mathbf{m}) = \mathrm{End}_{\mathscr{H}_{n,r}} \Big(\bigoplus_{\mu \in \Lambda_{n,r}(\mathbf{m})} m_\mu \mathscr{H}_{n,r} \Big)
$$

によって定義する。ここで,

$$m_\mu = \Big(\sum_{w\in\mathfrak{S}_\mu} q^{\ell(w)}T_w\Big)\Big(\prod_{k=1}^{r}\prod_{i=1}^{\sum_{l=1}^{k-1}\sum_{i=1}^{m_l}\mu_i^{(l)}}(L_i - Q_k)\Big) \in \mathscr{H}_{n,r}$$

である。

1.3. R が体であり，各 $k = 1,\dots,r$ に対し $m_k \geq n$ が成り立っているとき，$\mathscr{S}_{n,r}$ は $\mathscr{H}_{n,r}$ の ([R] の意味での) **quasi-hereditary cover** になっていることが [DJM] によって示されている。さらに，パラメータに関するある条件のもとで，$\mathscr{S}_{n,r}$-mod は $\mathfrak{S}_n \ltimes (\mathbb{Z}/r\mathbb{Z})^n$ に付随する有理 Cherednik 代数の圏 $\mathcal{O}$ と，$\mathscr{H}_{n,r}$-mod の highest weight cover として同値であることが [R] によって示されている。また，[VV] によって，有理 Cherednik 代数の圏 $\mathcal{O}$ は affine Lie 代数 $\widehat{\mathfrak{sl}}_e$ の放物型圏 $\mathcal{O}$ のある充満部分圏と同値であることが予想されている*。このような関係は，非常に興味深いものであるが，本稿では，[DJM] によって与えられている，組み合わせ論を用いた $\mathscr{S}_{n,r}$ の表現論の記述と，A 型の場合の古典的な結果との類似性より，量子群 $U_q(\mathfrak{gl}_m)$ の表現論の拡張として $\mathscr{S}_{n,r}$ の表現論を扱うことを考える。

1.4. まず，A 型の場合 ($r = 1$ の場合) について復習しよう。このとき，q-Schur 代数 $\mathscr{S}_{n,1}$ は以下のようにして **Schur-Weyl 双対性** によって得られる。まず，$R = \mathbb{Q}(q)$ (q を不定元とする有理関数体) としよう。V を量子群 $U_q(\mathfrak{gl}_m)$ の自然表現とし，その n 階テンソル積表現 $V^{\otimes n}$ を考える。一方で，$V^{\otimes n}$ には対称群 $\mathfrak{S}_n$ に付随する Hecke 環 $\mathscr{H}_{n,1}$ が，テンソル積の置換の q-類似として作用する。このとき，$U_q(\mathfrak{gl}_m)$ と $\mathscr{H}_{n,1}$ の $V^{\otimes n}$ 上の作用は互いに可換となり，より強く，お互いに他方の full centralizer となっている ([J])。よって，$U_q(\mathfrak{gl}_m)$ の作用によって定まる表現 $\rho : U_q(\mathfrak{gl}_m) \to \mathrm{End}(V^{\otimes n})$ の像は，$\mathrm{End}_{\mathscr{H}_{n,1}}(V^{\otimes n})$ と一致する。$V^{\otimes n}$ に現れる $U_q(\mathfrak{gl}_m)$-加群としてのウェイトは，自然に $\Lambda_{n,1}(m)$ と同一視でき，$U_q(\mathfrak{gl}_m)$ と $\mathscr{H}_{n,1}$ の作用は互いに可換であることから，$V^{\otimes n}$ のウェイト空間 $V^{\otimes n}_\mu$ ($\mu \in \Lambda_{n,1}(m)$) は，$\mathscr{H}_{n,1}$-加群となる。さらに，$\mathscr{H}_{n,1}$-加群として $V^{\otimes n}_\mu \cong m_\mu \mathscr{H}_{n,1}$ となることが分かり，代数としての同型 $\mathscr{S}_{n,1} := \mathrm{End}_{\mathscr{H}_{n,1}}\big(\bigoplus_{\mu\in\Lambda_{n,1}(m)} m_\mu \mathscr{H}_{n,1}\big) \cong \mathrm{End}_{\mathscr{H}_{n,1}}(V^{\otimes n})$ を得る。

* あるパラメータに関する条件下で，この予想が Rouquier-Shan-Varagnolo-Vasserot によって証明されたことが，2012 年の京都での研究集会にて Varagnolo によってアナウンスされている。

これらのことは $\mathbb{Z}[q,q^{-1}]$ 上でも成り立つことが知られており，特殊化によって，任意の環 R (パラメータも R の可逆元なら何でもよい) 上で，q-Schur 代数 $\mathscr{S}_{n,1}$ は，量子群 $U_q(\mathfrak{gl}_m)$ (divided power を用いた $\mathbb{Z}[q,q^{-1}]$-form を特殊化したもの) の商代数となっている。つまり，$U_q(\mathfrak{gl}_m)$ の $V^{\otimes n}$ 上の作用によって，全射準同型

$$\rho : U_q(\mathfrak{gl}_m) \to \mathscr{S}_{n,1}$$

が得られる。

1.5. 一般の r に話を戻そう。Ariki-Koike 代数 $\mathscr{H}_{n,r}$ は，対称群の Hecke 環 $\mathscr{H}_{n,1}$ を部分代数として含んでいる ($\mathscr{H}_{n,r}$ の生成元の内で，$T_1,\dots,T_{n-1}$ によって生成される部分代数)。$\mathscr{H}_{n,r}$ が半単純である場合，[SakS] によって，$V^{\otimes n}$ 上に $\mathscr{H}_{n,r}$ の作用が $\mathscr{H}_{n,1}$ の作用を拡張する形で定義され，$V^{\otimes n}$ 上の $U_q(\mathfrak{gl}_m)$ の作用をその Levi 部分代数 $U_q(\mathfrak{g})$ ($\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_{m_1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{gl}_{m_r}$, $m = m_1 + \cdots + m_r$) に制限したものとの間で，double centralizer property を満たすことが示されている。しかし，この double centralizer property は $\mathscr{H}_{n,r}$ が半単純でない場合には一般には成り立たない。$U_q(\mathfrak{g})$ はパラメータ q のみによって決まる ($V^{\otimes n}$ 上の作用も q にしか依らない) のに対し，$\mathscr{H}_{n,r}$ はパラメータ q, $Q_1,\dots,Q_r$ によって定まる (表現論もこれらのパラメータに依存する) ので，一般にこれらの間で double centralizer property が成立しないことは自然な事であろう。一般の環 R, 及びパラメータ q, $Q_1,\dots,Q_r$ に対しては，[SawS] によって，(パラメータ $Q_1,\dots,Q_r$ に若干の条件が付くが) $U_q(\mathfrak{g})$ の $V^{\otimes n}$ 上の作用に関する full centralizer として，modified Ariki-Koike 代数が現れることが示され，double centralizer property が成り立つことが示されている† 。さらに，[SawS] において、$U_q(\mathfrak{g})$ の作用から定まる表現 $U_q(\mathfrak{g}) \to \mathrm{End}(V^{\otimes n})$ の像の表現 ($U_q(\mathfrak{g})$ の多項式表現の一部) と，cyclotomic q-Schur 代数 $\mathscr{S}_{n,r}$ の表現との間の関係が，$\mathscr{S}_{n,r}$ の cellular basis を用いることによって調べられている。この関係は，4 節において ($R = \mathbb{Q}(q)$ の場合に) $\mathscr{S}_{n,r}$ の Drinfeld 型の表示を用いて，お互いの表現のなす圏の間に関手を構成することによって，$\mathscr{S}_{n,r}$ の cellular basis を用いずに与えられる。

1.6. A 型の場合は，q-Schur 代数 $\mathscr{S}_{n,1}$ が量子群 $U_q(\mathfrak{gl}_m)$ の商代数として表されることを用いて，$\mathscr{S}_{n,1}$-加群を $U_q(\mathfrak{gl}_m)$-加群とみなすことによって，その表現論は豊かな

---

† modified Ariki-Koike 代数は q をパラメータとする対称群の Hecke 環のいくつかのテンソル積の直和と森田同値になることが知られている。つまり，modified Ariki-Koike 代数は本質的にはパラメータ $Q_1,\dots,Q_r$ に依らない。また，$\mathscr{H}_{n,r}$ が半単純な場合は，$\mathscr{H}_{n,r}$ と modified Ariki-Koike 代数とは同型になる。

ものになっている。そこで，$\mathscr{S}_{n,r}$ も "良い代数 $\mathcal{U}$" の商として表すことを考えたい。まず，"良い代数 $\mathcal{U}$" が満たしてほしい性質について考えてみよう。$U_q(\mathfrak{gl}_m)$ は三角分解 $U_q(\mathfrak{gl}_m) \cong U_q^- \otimes U_q^0 \otimes U_q^+$ が成り立っていて，その表現論はウェイト (可換部分代数 U_q^0 の同時固有値) によって制御されている。また，$U_q(\mathfrak{gl}_m)$ は Hopf 代数であり，テンソル積表現，双対表現を考えることが出来る。そこで，考えるべき代数 $\mathcal{U}$ に望むことは，

(i) 三角分解 $\mathcal{U} = \mathcal{U}^- \cdot \mathcal{U}^0 \cdot \mathcal{U}^+$ を持ち，その（あるクラスの) 表現論がウェイト (可換部分代数 $\mathcal{U}^0$ の同時固有値) によって制御される。

(ii) $\mathcal{U}$ は Hopf 代数である。あるいは，あるクラスの表現に対し，テンソル積表現，双対表現が定義できる。

(ii) については，今回与える代数 $\mathcal{U}$ が Hopf 代数の構造を持つかどうかはまだ分かっていないが，その可能性について 5 節で議論する。

1.7. さて，少なくとも上記の (i) を満たす代数 $\mathcal{U}$ を定義したいのだが，闇雲に探しても中々上手くはいかない。しかし，[DR] によって，$\mathscr{S}_{n,r}(\mathbf{m})$ 自身が三角分解 $\mathscr{S}_{n,r} = \mathscr{S}_{n,r}^- \cdot \mathscr{S}_{n,r}^0 \cdot \mathscr{S}_{n,r}^+$ を持ち，その Borel 部分代数 $\mathscr{S}_{n,r}^{\leq 0} = \mathscr{S}_{n,r}^- \cdot \mathscr{S}_{n,r}^0$ (resp. $\mathscr{S}_{n,r}^{\geq 0} = \mathscr{S}_{n,r}^0 \cdot \mathscr{S}_{n,r}^+$) が A 型の q-Schur 代数 $\mathscr{S}_{n,1}(m)$ (ここで, $m = m_1 + \cdots + m_r$) の Borel 部分代数 $\mathscr{S}_{n,1}^{\leq 0}$ (resp. $\mathscr{S}_{n,1}^{\geq 0}$) と同型であることが示されている。ここで，$q$-Schur 代数 $\mathscr{S}_{n,1}$ の Borel 部分代数は，全射準同型 $\rho : U_q(\mathfrak{gl}_m) \to \mathscr{S}_{n,1}(m)$ のもとで，$U_q(\mathfrak{gl}_m)$ の Borel 部分代数 $U_q^{\leq 0}$ (resp. $U_q^{\geq 0}$) の像と一致している。ここで，$U_q(\mathfrak{gl}_m)$ の Chevalley 生成元を e_i, f_i $(1 \leq i \leq m-1)$, $K_j^{\pm}$ $(1 \leq j \leq m)$ とすれば，$U_q^{\leq 0} = \langle f_i, K_j^{\pm} \,|\, 1 \leq i \leq m-1, 1 \leq j \leq m \rangle$ (resp. $U_q^{\leq 0} = \langle e_i, K_j^{\pm} \,|\, 1 \leq i \leq m-1, 1 \leq j \leq m \rangle$) である。以上より，全射準同型

$$\varphi^{\leq 0} : U_q^{\leq 0} \xrightarrow{\rho} \mathscr{S}_{n,1}^{\leq 0} \cong \mathscr{S}_{n,r}^{\leq 0}, \quad \varphi^{\geq 0} : U_q^{\geq 0} \xrightarrow{\rho} \mathscr{S}_{n,1}^{\geq 0} \cong \mathscr{S}_{n,r}^{\geq 0}$$

が存在して，$\mathscr{S}_{n,r} = \varphi^{\leq 0}(U_q^{\leq 0}) \cdot \varphi^{\geq 0}(U_q^{\geq 0})$ となる。よって，$\mathscr{S}_{n,r}$ は $F_i := \varphi^{\leq 0}(f_i)$, $E_i := \varphi^{\geq 0}(e_i)$ $(1 \leq i \leq m-1)$, $\mathcal{K}_j^{\pm} := \varphi^{\leq 0}(K_j^{\pm}) = \varphi^{\geq 0}(K_j^{\pm})$ $(1 \leq j \leq m)$ によって生成されることが分かる。(上の議論より，$U_q(\mathfrak{gl}_m)$ の関係式と異なるのは，交換関係 $[E_i, F_i]$ の部分のみであることが分かる。) [W1] において，これらの生成元の間の関係式を調べることによって，$\mathscr{S}_{n,r}$ の生成元と基本関係式による表示を与えた。しかし，[W1] における関係式は，(関係式が存在することは分かっていて，計算しよう

と思えば計算できるが) 具体的に記述されていない部分があり，さらにその部分の関係式が n に依存しているため，非常に扱いづらい[‡]。しかし，そこの部分の関係式は $\mathscr{S}_{n,r}$ の **Jucys-Murphy 元** (以下 JM 元) によって制御されていることが分かっているので，JM 元を用いて生成元を (可算無限個に) 増やすことによって，(i) を満たす代数 $\mathcal{U}$ を [W4] において得ることができた。その表示は Yangian や 量子ループ代数に対する Drinfeld による (可算無限個の生成元を用いた) 表示によく似ているために，Drinfeld 型の表示と呼んでいるが，現在のところ，Yangian や 量子ループ代数に対する Drinfeld 表示との関係は一切分かっていない。

1.8. 本稿では，2 節において，代数 $\mathcal{U}$ の定義を与え，$\mathscr{S}_{n,r}$ をその商代数として実現する。3 節において，$R = \mathbb{Q}(q)$ の場合に，$\mathcal{U}$ の表現論を展開し，$\mathscr{S}_{n,r}$- 加群を $\mathcal{U}$-加群とみなした時の特徴付けを与える。q が 1 のベキ根の場合の $\mathcal{U}$ を用いた表現論は，[W5] で扱う予定だが，現段階では，まだ計算が出来ていない部分があるので，今回は割愛する。4 節において，$U_q(\mathfrak{g})$-加群との関係を関手を構成することによって与える。最後に 5 節において，[W2] において調べた $\mathscr{S}_{n,r}$ の Weyl 加群の指標との関係から，$\mathcal{U}$ が Hopf 代数の構造を持つ (あるいは, あるクラスの $\mathcal{U}$-加群のなす圏がモノイダル圏となる) 可能性について議論する。

2 Cyclotomic q-Schur 代数の Drinfeld 型の表示

2.1. まず, cyclotomic q-Schur 代数を商代数として実現する $\mathbb{Q}(q)$-代数 $\mathcal{U}$ を定義しよう。$\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_r) \in \mathbb{Z}^r_{>0}$ とし，$m = \sum_{k=1}^r m_k$ とおく。$P = \bigoplus_{i=1}^m \mathbb{Z}\varepsilon_i$ を $\mathfrak{gl}_m$ の weight lattice とし，$P^\vee = \bigoplus_{i=1}^m \mathbb{Z}h_i$ をその dual weight lattice とする。また，$\langle\, , \rangle : P \times P^\vee \to \mathbb{Z}$ を $\langle \varepsilon_i, h_j \rangle = \delta_{ij}$ によって定まる双線型写像とする。$\alpha_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}$ とおけば，$\Pi = \{\alpha_i \,|\, 1 \le i \le m-1\}$ が simple root の集合となる。$Q = \bigoplus_{i=1}^m \mathbb{Z}\alpha_i$ を root lattice とし，$Q^+ = \bigoplus_{i=1}^{m-1} \mathbb{Z}_{\ge 0}\alpha_i$ とおく。P 上の半順序 (支配的順序) を $\lambda - \mu \in Q^+$ であるとき $\lambda \ge \mu$ として定める。

代数 $\mathcal{U}$ を定義するために，集合 $\{1, 2, \dots, m\}$ を以下のように分割する。
$\Gamma(\mathbf{m}) = \{(i,k) \,|\, 1 \le i \le m_k, 1 \le k \le r\}$ とし，$\Gamma'(\mathbf{m}) = \Gamma(\mathbf{m}) \setminus \{(m_r, r)\}$ とおく。全単射

$$(*1) \qquad \Gamma(\mathbf{m}) \to \{1, 2, \dots, m\} \text{ such that } (i,k) \mapsto \sum_{j=1}^{k-1} m_j + i$$

‡ と言っても，[W3] において，[W1] での $\mathscr{S}_{n,r}$ の表示を用いて $\mathscr{S}_{n,r}$-mod と $\mathscr{S}_{n+1,r}$-mod の間に，制限，誘導関手を定義し，それらを用いて (レベル r の) Fock 空間の圏化が得られている。

によって，$\Gamma(\mathbf{m})$ と $\{1,2,\dots,m\}$ を同一視する。この対応により，$\Gamma'(\mathbf{m})$ と $\{1,2,\dots,m-1\}$ とが対応する。これらの対応によって，

$$P=\bigoplus_{i=1}^{m}\mathbb{Z}\varepsilon_i=\bigoplus_{(i,k)\in\Gamma(\mathbf{m})}\mathbb{Z}\varepsilon_{(i,k)},\quad P^\vee=\bigoplus_{i=1}^{m}\mathbb{Z}h_i=\bigoplus_{(i,k)\in\Gamma(\mathbf{m})}\mathbb{Z}h_{(i,k)},\quad Q=\bigoplus_{i=1}^{m-1}\mathbb{Z}\alpha_i=\bigoplus_{(i,k)\in\Gamma'(\mathbf{m})}\mathbb{Z}\alpha_{(i,k)}$$

と書ける。このとき，cyclotomic q-Schur 代数を定義するときに用いた集合 $\Lambda_{n,r}(\mathbf{m})$ は，単射

$$\Lambda_{n,r}(\mathbf{m})\to P \text{ such that } \mu\mapsto\sum_{(i,k)\in\Gamma(\mathbf{m})}\mu_i^{(k)}\varepsilon_{(i,k)}$$

によって，P の部分集合とみなせる。また，

$$\Lambda^+_{n,r}(\mathbf{m})=\{\lambda\in\Lambda_{n,r}(\mathbf{m})\mid\lambda_1^{(k)}\geq\lambda_2^{(k)}\geq\cdots\geq\lambda_{m_k}^{(k)} \text{ for any } k=1,\dots,r\}$$

とおく。

Definition 2.2. $\mathcal{U}$ を以下の生成元と基本関係式で定義される $\mathbb{Q}(q)$ 上の単位元を持った結合代数とする。

生成元： $\mathcal{X}^\pm_{(i,k),t}$ $((i,k)\in\Gamma'(\mathbf{m}),t\geq0)$, $\mathcal{K}^\pm_{(j,l)}$, $\mathcal{H}^\pm_{(j,l),t}$, $\mathcal{I}^\pm_{(j,l),t}$ $((j,l)\in\Gamma(\mathbf{m}),t\geq0)$, C_k $(1\leq k\leq r)$

基本関係式：

(R1) C_k $(1\leq k\leq r)$: central elements,

(R2) $\mathcal{K}^+_{(j,l)}\mathcal{K}^-_{(j,l)}=\mathcal{K}^-_{(j,l)}\mathcal{K}^+_{(j,l)}=1,\ \mathcal{H}^\pm_{(j,l),0}=\mathcal{I}^\pm_{(j,l),0}=1,$

(R3) $[\mathcal{K}^\varepsilon_{(i,k)},\mathcal{K}^{\varepsilon'}_{(j,l)}]=[\mathcal{K}^\varepsilon_{(i,k)},\mathcal{H}^{\varepsilon'}_{(j,l),t}]=[\mathcal{K}^\varepsilon_{(i,k)},\mathcal{I}^{\varepsilon'}_{(j,l),t}]=[\mathcal{H}^\varepsilon_{(i,k),s},\mathcal{H}^{\varepsilon'}_{(j,l),t}]$
$=[\mathcal{H}^\varepsilon_{(i,k),s},\mathcal{I}^{\varepsilon'}_{(j,l),t}]=[\mathcal{I}^\varepsilon_{(i,k),s},\mathcal{I}^{\varepsilon'}_{(j,l),t}]=0,\quad(\varepsilon,\varepsilon'\in\{+,-\}),$

(R4) $[t+1]\mathcal{I}^\pm_{(j,l),t+1}=\sum_{z=0}^{t}(-1)^zq^{t-z}(q-q^{-1})^z\mathcal{I}^\pm_{(j,l),t-z}\mathcal{H}^\pm_{(j,l),z+1}$

(R5) $\mathcal{K}_{(j,l)}\mathcal{X}^\pm_{(i,k),t}\mathcal{K}^-_{(j,l)}=q^{\pm\langle\alpha_{(i,k)},h_{(j,l)}\rangle}\mathcal{X}^\pm_{(i,k),t},$

(R6) $[\mathcal{H}^+_{(j,l),s+1},\mathcal{X}^\pm_{(i,k),t}]=q^{\pm\langle\alpha_{(i,k)},h_{(j,l)}\rangle}\mathcal{H}^+_{(j,l),s}\mathcal{X}^\pm_{(i,k),t+1}-q^{\mp\langle\alpha_{(i,k)},h_{(j,l)}\rangle}\mathcal{X}^\pm_{(i,k),t+1}\mathcal{H}^+_{(j,l),s},$

(R7) $[\mathcal{H}^-_{(j,l),s+1},\mathcal{X}^\pm_{(i,k),t}]=q^{\mp\langle\alpha_{(i,k)},h_{(j,l)}\rangle}\mathcal{H}^-_{(j,l),s}\mathcal{X}^\pm_{(i,k),t+1}-q^{\pm\langle\alpha_{(i,k)},h_{(j,l)}\rangle}\mathcal{X}^\pm_{(i,k),t+1}\mathcal{H}^-_{(j,l),s},$

(R8)
$$[\mathcal{X}^+_{(i,k),t},\mathcal{X}^-_{(j,l),s}]=\delta_{(i,k)(j,l)}\begin{cases}\dfrac{\mathcal{J}^+_{(i,k),s+t}-\mathcal{J}^-_{(i,k),s+t}}{q-q^{-1}} & \text{if } i\neq m_k,\\[2ex] -C_{k+1}\dfrac{\mathcal{J}^+_{(m_k,k),s+t}-\mathcal{J}^-_{(m_k,k),s+t}}{q-q^{-1}} & \text{if } i=m_k,\\ \quad+\left(\mathcal{J}^+_{(m_k,k),s+t+1}-\mathcal{J}^-_{(m_k,k),s+t+1}\right) & \end{cases}$$

(R9) $[\mathcal{X}^{\pm}_{(i,k),t}, \mathcal{X}^{\pm}_{(j,l),s}] = 0 \quad \text{if } (j,l) \neq (i,k), (i\pm 1, k)$,

(R10) $\mathcal{X}^{+}_{(i\pm1,k),0}(\mathcal{X}^{+}_{(i,k),0})^2 - (q+q^{-1})\mathcal{X}^{+}_{(i,k),0}\mathcal{X}^{+}_{(i\pm1,k),0}\mathcal{X}^{+}_{(i,k),0} + (\mathcal{X}^{+}_{(i,k),0})^2\mathcal{X}^{+}_{(i\pm1,k),0} = 0$,

(R11) $\mathcal{X}^{-}_{(i\pm1,k),0}(\mathcal{X}^{-}_{(i,k),0})^2 - (q+q^{-1})\mathcal{X}^{-}_{(i,k),0}\mathcal{X}^{-}_{(i\pm1,k),0}\mathcal{X}^{-}_{(i,k),0} + (\mathcal{X}^{-}_{(i,k),0})^2\mathcal{X}^{-}_{(i\pm1,k),0} = 0$,

(R12) $\mathcal{X}^{\pm}_{(i,k),t+1}\mathcal{X}^{\pm}_{(i,k),s} - q^{\pm2}\mathcal{X}^{\pm}_{(i,k),s}\mathcal{X}^{\pm}_{(i,k),t+1} = q^{\pm2}\mathcal{X}^{\pm}_{(i,k),t}\mathcal{X}^{\pm}_{(i,k),s+1} - \mathcal{X}^{\pm}_{(i,k),s+1}\mathcal{X}^{\pm}_{(i,k),t}$,

ここで，

$$\mathcal{J}^{+}_{(i,k),0} = \mathcal{K}^{+}_{(i,k)}\mathcal{K}^{-}_{(i+1,k)}, \quad \mathcal{J}^{-}_{(i,k),0} = \mathcal{K}^{-}_{(i,k)}\mathcal{K}^{+}_{(i+1,k)},$$

$$\mathcal{J}^{+}_{(i,k),t} = \mathcal{K}^{+}_{(i,k)}\mathcal{K}^{-}_{(i+1,k)}\Big(q^{-t}\mathcal{H}^{+}_{(i,k),t} - \frac{q^{-1}}{q-q^{-1}}\sum_{h=1}^{t-1} q^{t-2h}\mathcal{H}^{+}_{(i,k),h}\mathcal{H}^{-}_{(i+1,k),t-h}\Big) \quad (t \geq 1),$$

$$\mathcal{J}^{-}_{(i,k),t} = \mathcal{K}^{+}_{(i,k)}\mathcal{K}^{-}_{(i+1,k)}\Big(-q^{t}\mathcal{H}^{-}_{(i+1,k),t} - \frac{q}{q-q^{-1}}\sum_{h=1}^{t-1} q^{t-2h}\mathcal{H}^{+}_{(i,k),h}\mathcal{H}^{-}_{(i+1,k),t-h}\Big) \quad (t \geq 1)$$

とおく。

$d \in \mathbb{Z}$ に対し q-整数 $[d]$ を $[d] = (q^d - q^{-d})/(q - q^{-1})$ によって定義し，$d \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し，$[d]! = [d][d-1]\dots[1]$ とおく。また，$[0]! = 1$ とする。

$(i,k) \in \Gamma'(\mathbf{m})$ と $t, d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し，

$$\mathcal{X}^{\pm(d)}_{(i,k),t} = \frac{(\mathcal{X}^{\pm}_{(i,k),t})^d}{[d]!} \in \mathcal{U}$$

とおく。また，$(j,l) \in \Gamma(\mathbf{m})$, $d \in \mathbb{Z}_{>0}$, $c \in \mathbb{Z}$ に対し，

$$\begin{bmatrix} \mathcal{X}_{(j,l)}; c \\ d \end{bmatrix} = \prod_{b=1}^{d} \frac{\mathcal{K}^{+}_{(j,l)}q^{c-b+1} - \mathcal{K}^{-1}_{(j,l)}q^{-c+b-1}}{q^b - q^{-b}} \in \mathcal{U}$$

とおく。

$\mathcal{A} = \mathbb{Z}[q, q^{-1}][(q-q^{-1})^{-1}] \subset \mathbb{Q}(q)$ とおく。${}_{\mathcal{A}}\mathcal{U}$ を，$\mathcal{X}^{(d)}_{(i,k),0}, \mathcal{X}^{\pm}_{(i,k),t}, \mathcal{K}^{\pm}_{(j,l)}, \begin{bmatrix} \mathcal{K}_{(j,l)}; 0 \\ d \end{bmatrix}$, $\mathcal{H}^{\pm}_{(j,l),t}, \mathcal{I}^{\pm}_{(j,l),t}, C_k$ $((i,k) \in \Gamma(\mathbf{m})$, $(j,l) \in \Gamma(\mathbf{m})$, $d, t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $1 \leq k \leq r)$ によって生成される $\mathcal{U}$ の $\mathcal{A}$-部分代数とする。このとき以下のことが成り立つ。

Theorem 2.3 ([W4]).

(i) $R = \mathbb{Q}(q)$ のとき，代数としての準同型写像 $\Psi : \mathcal{U} \to \mathscr{S}_{n,r}(\mathbf{m})$ が存在する。特に，全ての $k = 1, \dots, r-1$ に対し，$m_k \geq n$ であるとき，Ψ は全射である。

(ii) ${}_{\mathcal{A}}\mathscr{S}_{n,r}(\mathbf{m})$ を $\mathcal{A}$ 上で定義される *cyclotomic q-Schur* 代数とする。このとき，*(i)* の Ψ を ${}_{\mathcal{A}}\mathcal{U}$ に制限することによって，代数としての準同型写像 $\Psi : {}_{\mathcal{A}}\mathcal{U} \to {}_{\mathcal{A}}\mathscr{S}_{n,r}(\mathbf{m})$ が得られる。特に，全ての $k = 1, \ldots, r-1$ に対し，$m_k \geq n$ であるとき，Ψ は全射である。

Proof. 準同型写像 Ψ の存在を示すには，$\mathcal{U}$ の生成元の像にあたるものを $\mathscr{S}_{n,r}(\mathbf{m})$ の中で具体的に構成し，それらが $\mathcal{U}$ の基本関係式 (R1)-(R12) を満たすことをチェックすればよい (詳しくは [W4] を参照)。$\mathbf{m}$ に関する条件のもとで，Ψ が全射となることは，[W1] の結果から従う。 □

Remarks 2.4.

(i) $\mathcal{A}$ の中に $(q-q^{-1})^{-1}$ を含んでいるのは，$\mathscr{S}_{n,r}$ の中で生成元を定義する際に $(q-q^{-1})^{-1}$ を使うためである。(関係式 (R8) における $\mathcal{J}^{\pm}_{(i,k),t}$ を定義する際にも $(q-q^{-1})$ で割っていることに注意。) その理由は，関係式を簡単にするために調整しているというだけである。よって，${}_{\mathcal{A}}\mathcal{U}$ から $q = \pm 1$ には特殊化できないが，$q = \pm 1$ の場合は $\mathscr{S}_{n,r}$ の生成元として $(q-q^{-1})$ で割る前のものを使い，それらの関係式を計算すれば，$\mathcal{U}$ にあたる代数が得られるはずであるが，それについては真面目に計算していないので，分からない。

(ii) $\Psi(\mathcal{H}^{\pm}_{(j,l),t})$, $\Psi(\mathcal{I}^{\pm}_{(j,l),t})$ は，Ariki-Koike 代数 $\mathscr{H}_{n,r}$ の Jucys-Murphy 元を用いて定義され，それらは $\mathscr{S}_{n,r}$ の Jucys-Murphy 元 (の一般化) とみなすことが出来る。よって，3 節で見るように，$\mathscr{S}_{n,r}$-加群を $\mathcal{U}$-加群とみなした時，それらが，$\mathcal{K}^{\pm}_{(j,l)}$, $\mathcal{H}^{\pm}_{(j,l),t}$, $\mathcal{I}^{\pm}_{(j,l),t}$ 達の固有値によって制御されることは，自然なことである。

(iii) $\mathcal{U}$ の中心元 C_k $(1 \leq k \leq r)$ は，$\mathscr{S}_{n,r}$ のパラメータ Q_k に対応する。つまり，$\Psi(C_k) = Q_k$ である。

(iv) ${}_{\mathcal{A}}\mathcal{U}$ の中に，$\mathcal{X}^{\pm(d)}_{(i,k),t}$ $(t \geq 1)$ や，$\begin{bmatrix} \mathcal{X}_{(j,l)}; c \\ d \end{bmatrix}$ $(c \in \mathbb{Z})$ が含まれることは分かる。

(v) 関係式 (R4) より，$\mathbb{Q}(q)$ 上では，$\mathcal{I}^{\pm}_{(j,l),t}$ は，$\mathcal{H}^{\pm}_{(i,k),s}$ $((i,k) \in \Gamma(\mathbf{m}), s \geq 0)$ の線形結合で表されることが分かる。また，$\mathcal{I}^{\pm}_{(j,l),t}$ は関係式 (R4) 以外には出てこない。実際に，$\mathbb{Q}(q)$ 上で考えている分には $\mathcal{I}^{\pm}_{(j,l),t}$ は必要ない。しかし，${}_{\mathcal{A}}\mathcal{U}$ の中で三角分解が成立するように考えようとすると，(divided power $\mathcal{X}^{+(c)}_{(i,k),t}$ と $\mathcal{X}^{-(d)}_{(i,k),s}$ の交換関係を記述するのに) $\mathcal{I}^{\pm}_{(j,l),t}$ が必要となる ($\mathcal{A}$ の中では q-整数 $[d]$ $(d \neq \pm 1)$ で割れないことに注意)。3 節以降では，$\mathbb{Q}(q)$ 上での $\mathcal{U}$ の表現を扱うので，$\mathcal{I}^{\pm}_{(j,l),t}$ の作用については省略して考える。

2.5. この節の最後に，$\mathcal{U}$ と量子群 $U_q(\mathfrak{gl}_m)$, $U_q(\mathfrak{g})$ ($\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_{m_1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{gl}_{m_r}$) との関係を与えておこう。$U_q(\mathfrak{gl}_m)$ の Chevalley 生成元を $e_{(i,k)}, f_{(i,k)}$ ($(i,k) \in \Gamma'(\mathbf{m})$), $K^{\pm}_{(j,l)}$ ($(j,l) \in \Gamma(\mathbf{m})$) とする (同一視 (*1) に注意)。よって，その Levi 部分代数 $U_q(\mathfrak{g})$ の生成元として，$e_{(i,k)}, f_{(i,k)}$ ($1 \leq i \leq m_k - 1$, $1 \leq k \leq r$), $K^{\pm}_{(j,l)}$ ($(j,l) \in \Gamma(\mathbf{m})$) が取れる。すると，基本関係式より，以下のような代数の準同型が得られる。

Proposition 2.6.

(i) $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_r) \in (\mathbb{Q}(q) \setminus \{0\})^r$ に対し，代数としての全射準同型写像

$$\gamma_{\mathbf{c}} : \mathcal{U} \to U_q(\mathfrak{gl}_m)$$

が，$\gamma_{\mathbf{c}}(\mathcal{X}^+_{(i,k),0}) = \begin{cases} e_{(i,k)} & \text{if } i \neq m_k \\ -c_k e_{(m_k,k)}, & \text{if } i = m_k \end{cases}$, $\gamma_{\mathbf{c}}(\mathcal{X}^-_{(i,k),0}) = f_{(i,k)}$, $\gamma_{\mathbf{c}}(\mathcal{K}^{\pm}_{(j,l)}) = K^{\pm}_{(j,l)}$, $\gamma_{\mathbf{c}}(\mathcal{X}^{\pm}_{(i,k),t}) = \gamma_{\mathbf{c}}(\mathcal{H}^{\pm}_{(j,l),t}) = \gamma_{\mathbf{c}}(\mathcal{I}^{\pm}_{(j,l),t}) = 0$ $(t \geq 1)$, $\gamma_{\mathbf{c}}(C_k) = c_k$ によって定まる。

(ii) 代数としての単射準同型写像

$$\iota : U_q(\mathfrak{g}) \to \mathcal{U}$$

が，$\iota(e_{(i,k)}) = \mathcal{X}^+_{(i,k),0}$, $\iota(f_{(i,k)}) = \mathcal{X}^-_{(i,k),0}$, $\iota(K^{\pm}_{(j,l)}) = \mathcal{K}^{\pm}_{(j,l)}$ によって定まる。

3 $\mathcal{U}$ の表現

この節では, $\mathbb{Q}(q)$ 上における $\mathcal{U}$ の表現について調べ, 既約 $\mathscr{S}_{n,r}$-加群を Theorem 2.3 の全射準同型 $\Psi : \mathcal{U} \to \mathscr{S}_{n,r}(\mathbf{m})$ を通じて $\mathcal{U}$-加群としてみなした時に，その最高ウェイトによる特徴付けを与える。

3.1. まず，代数 $\mathcal{U}$ が三角分解を持つことを見てみよう。$\mathcal{U}^+$ (resp. $\mathcal{U}^-$) を $\mathcal{X}^+_{(i,k),t}$ (resp. $\mathcal{X}^-_{(i,k),t}$) ($(i,k) \in \Gamma'(\mathbf{m}), t \geq 0$) によって生成される $\mathcal{U}$ の部分代数とし，$\mathcal{U}^0$ を $\mathcal{K}^{\pm}_{(j,l)}$, $\mathcal{H}^{\pm}_{(j,l),t}$, $\mathcal{I}^{\pm}_{(j,l),t}$ ($(j,l) \in \Gamma(\mathbf{m}), t \geq 0$), C_k ($1 \leq k \leq r$) によって生成される $\mathcal{U}$ の部分代数とする。関係式 (R1) と (R3) より，$\mathcal{U}^0$ は可換代数である。$\mathcal{U}$ の定義関係式より以下のことが分かる。

Proposition 3.2. $\mathcal{U} = \mathcal{U}^- \cdot \mathcal{U}^0 \cdot \mathcal{U}^+$.

以下のように，より強い意味での三角分解が成り立つことが予想される。

予想： $\mathcal{U} \cong \mathcal{U}^- \otimes \mathcal{U}^0 \otimes \mathcal{U}^+$ as vector spaces.

3.3. 三角分解 Proposition 3.2, 及び関係式 (R5) より，有限次元既約 $\mathcal{U}$-加群は，($\mathcal{K}^{+}_{(j,l)}$ 達の同時固有値が $\mathbb{Q}(q)$ に含まれている場合，それらをウェイトとみなした時に) 最高ウェイト加群となることが分かる。但し，$\mathcal{H}^{\pm}_{(j,l)}$ や C_k 達の作用もあるので，$\mathcal{K}^{+}_{(j,l)}$ の同時固有値のみでは，既約 $\mathcal{U}$-加群を特徴づけることはできない。そこで，$\mathcal{U}$-加群が**最高ウェイト加群** であることを以下のように定義する。

Definition 3.4. $\mathcal{U}$-加群 V が**最高ウェイト加群** であるとは，ある元 $v_0 \in V$ が存在して, 以下の (i) - (iii) を満たすものとして定義する:

(i) V は $\mathcal{U}$-加群として v_0 によって生成される。
(ii) $\mathcal{X}^{+}_{(i,k),t} \cdot v_0 = 0$ for all $(i,k) \in \Gamma'(\mathbf{m})$, $t \geq 0$.
(iii) v_0 は $\mathcal{U}^0$ の作用に関する同時固有ベクトルである。

このとき，$\boldsymbol{\kappa} = (\kappa_{(j,l)})_{(j,l)\in\Gamma(\mathbf{m})}$, $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi^{\pm}_{(j,l),t})_{(j,l)\in\Gamma(\mathbf{m}),t\geq 1}$, $\mathbf{c} = (c_k)_{1\leq k\leq r}$ を

$$\mathcal{K}^{+}_{(j,l)} \cdot v_0 = \kappa_{(j,l)} v_0, \quad \mathcal{H}^{\pm}_{(j,l),t} \cdot v_0 = \varphi^{\pm}_{(j,l),t} v_0, \quad C_k \cdot v_0 = c_k v_0$$

によって定め，V (resp. v_0) を最高ウェイト $(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\varphi}, \mathbf{c})$ の最高ウェイト加群 (resp. 最高ウェイトベクトル) と呼ぶ。特に，ある $\lambda = \sum_{(j,l)\in\Gamma(\mathbf{m})} \lambda_j^{(l)} \varepsilon_{(j,l)} \in P$ に対し，$\kappa_{(j,l)} = q^{\lambda_j^{(l)}}$ $((j,l) \in \Gamma(\mathbf{m}))$ となるとき，$(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\varphi}, \mathbf{c})$ を $(\lambda, \boldsymbol{\varphi}, \mathbf{c})$ と書くことにする。

3.5. 通常のように，$\mathcal{U}$ の商加群として（あるいは $\mathcal{U}^0$ の 1 次元表現を Borel 部分代数 $\mathcal{U}^{\geq 0} := \langle \mathcal{U}^0, \mathcal{U}^+ \rangle$ を経由して $\mathcal{U}$ まで誘導することによって), 最高ウェイトが $(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\varphi}, \mathbf{c})$ である普遍的な最高ウェイト加群 (**Verma 加群**) $V(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\varphi}, \mathbf{c})$ を構成できる。$V(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\varphi}, \mathbf{c})$ の一意的な既約商加群を $L(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\varphi}, \mathbf{c})$ とおく。

$L(\lambda, \boldsymbol{\varphi}, \mathbf{c})$ $(\lambda \in P)$ の最高ウェイトベクトルを v_0 とするとき，Proposition 2.6 (ii) の準同型 $\iota : U_q(\mathfrak{g}) \to \mathcal{U}$ を通じて，$L(\lambda, \boldsymbol{\varphi}, \mathbf{c})$ を $U_q(\mathfrak{g})$-加群と思うと，v_0 は $U_q(\mathfrak{g})$-加群としての最高ウェイトベクトルとなる。$L(\lambda, \boldsymbol{\varphi}, \mathbf{c})$ が有限次元ならば，当然 $U_q(\mathfrak{g}) \cdot v_0$ は最高ウェイトが λ である有限次元最高ウェイト加群となるので，$U_q(\mathfrak{g})$ の表現論より以下のことが分かる。

Lemma 3.6. $\lambda \in P$ に対し，$L(\lambda, \boldsymbol{\varphi}, \mathbf{c})$ が有限次元ならば，各 $k = 1, \ldots, r$ に対し，$\lambda_1^{(k)} \geq \lambda_2^{(k)} \geq \cdots \geq \lambda_{m_k}^{(k)}$ が成り立つ。

3.7. $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_r) \in \mathbb{Q}(q)^r$ に対し，$\mathcal{U}$-mod の充満部分圏 $\mathcal{O}^{\mathbf{c}}$ を以下の (i) - (iv) を満たすものとして定義する:

(i) $M \in \mathcal{O}^{\mathbf{c}}$ は有限次元。

(ii) $M \in \mathcal{O}^{\mathbf{c}}$ はウェイト空間分解

$$M = \bigoplus_{\lambda \in P_{\geq 0}} M_\lambda, \quad M_\lambda = \{m \in M \mid \mathcal{K}^+_{(j,l)} \cdot m = q^{\lambda^{(l)}_j} m \text{ for } (j,l) \in \Gamma(\mathbf{m})\}$$

を持つ。ここで，$P_{\geq 0} = \bigoplus_{(j,l)\in\Gamma(\mathbf{m})} \mathbb{Z}_{\geq 0}\varepsilon_{(j,l)} \subset P$ である。

(iii) $M \in \mathcal{O}^{\mathbf{c}}$ に対し，C_k は c_k 倍として作用する。

(iv) $M \in \mathcal{O}^{\mathbf{c}}$ に対し，$\mathcal{U}^0$ の作用に関する固有値は全て $\mathbb{Q}(q)$ に含まれる。

$P^+_{\geq 0} = \{\lambda \in P_{\geq 0} \mid \lambda^{(k)}_1 \geq \lambda^{(k)}_2 \geq \cdots \geq \lambda^{(k)}_{m_k} \geq 0 \text{ for } k = 1, \dots, r\}$ とおくとき，以下のことが成り立つ。

Lemma 3.8. $\mathcal{O}^{\mathbf{c}}$ に属する既約加群はある $L(\lambda, \varphi, \mathbf{c})$ $(\lambda \in P^+_{\geq 0})$ と同型である。

Remarks 3.9.

(i) $\mathcal{O}^{\mathbf{c}}$ の定義の (ii) において，ウェイトを $P_{\geq 0}$ に制限しているのは，一般線型群 (あるいは $U_q(\mathfrak{gl}_m)$) の表現論における多項式表現にあたるものを考えていることに相当する。場合によっては，ウェイトを P 全体まで許したものを考える必要があるかもしれない。

(ii) 後でみるように，各 $\lambda \in P^+_{\geq 0}$ に対し，($\mathscr{S}_{n,r}(\mathbf{m})$ の既約加群を $\mathcal{U}$-加群と思うことによって) ある φ が (少なくとも 1 つ以上) 存在して，$L(\lambda, \varphi, \mathbf{c})$ が $\mathcal{O}^{\mathbf{c}}$ に属することが分かる。しかし，どのような φ に対し $L(\lambda, \varphi, \mathbf{c})$ が $\mathcal{O}^{\mathbf{c}}$ に属するか, あるいは，$L(\lambda, \varphi, \mathbf{c})$ がいつ有限次元となるかはまだ全然分かっていない。

3.10. $k = 1, \dots, r$ に対し，$\mathbb{Z}[x^{(k)}_1, x^{(k)}_2, \dots, x^{(k)}_{m_k}]$ を $x^{(k)}_i$ $(1 \leq i \leq m_k)$ を変数とする多項式環とする。また，$\mathbb{Z}[x^{(k)}_1, \dots, x^{(k)}_{m_k}]^{\mathfrak{S}_{m_k}}$ を対称多項式のなす部分環とする。$\lambda = \sum_{(j,l)\in\Gamma(\mathbf{m})} \lambda^{(l)}_j \varepsilon_{(j,l)} \in P_{\geq 0}$ に対し，

$$x^\lambda := \otimes^r_{k=1} (x^{(k)}_1)^{\lambda^{(k)}_1} (x^{(k)}_2)^{\lambda^{(k)}_2} \dots (x^{(k)}_{\mu_k})^{\lambda^{(k)}_{m_k}} \in \bigotimes_{k=1}^r \mathbb{Z}[x^{(k)}_1, x^{(k)}_2, \dots, x^{(k)}_{m_k}]$$

とおく。

以上の準備のもと，$M \in \mathcal{O}^{\mathbf{c}}$ に対し，その**指標** $\operatorname{ch} M$ を

$$\operatorname{ch} M := \sum_{\lambda \in P_{\geq 0}} \dim M_\lambda \, x^\lambda \in \bigotimes_{k=1}^{r} \mathbb{Z}[x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_{m_k}^{(k)}]$$

によって定める。Proposition 2.6 (ii) の準同型 $\iota : U_q(\mathfrak{g}) \to \mathcal{U}$ を通じて $M \in \mathcal{O}^{\mathbf{c}}$ を $U_q(\mathfrak{g})$-加群とみなし，$U_q(\mathfrak{g})$-加群としての指標を考えることによって，$M \in \mathcal{O}^{\mathbf{c}}$ に対し，$\operatorname{ch} M \in \bigotimes_{k=1}^{r} \mathbb{Z}[x_1^{(k)}, \dots, x_{m_k}^{(k)}]^{\mathfrak{S}_{m_k}}$ となることが分かる。

Remark 3.11. $\{\operatorname{ch} L \mid L : \text{simple object in } \mathcal{O}^{\mathbf{c}}\}$ は一次独立ではない。よって，$\mathcal{O}^{\mathbf{c}}$ の加群に対し，その組成重複度が指標のみによって定まるという訳ではない。

3.12. $\mathcal{O}_{\mathfrak{gl}_m}$ を $U_q(\mathfrak{gl}_m)$-mod のウェイトが $P_{\geq 0}$ に含まれる, 有限次元ウェイト加群からなる充満部分圏 (つまり，多項式表現のなす圏) とする。

$$\mathcal{P}(m) = \{\lambda = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varepsilon_i \in P \mid \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_m \geq 0\}$$

とおけば, $\mathcal{O}_{\mathfrak{gl}_m}$ に属する既約加群の同型類の完全代表系として $\{\Delta_{\mathfrak{gl}_m}(\lambda) \mid \lambda \in \mathcal{P}(m)\}$ が取れる。ここで, $\Delta_{\mathfrak{gl}_m}(\lambda)$ は λ を最高ウェイトとする既約な最高ウェイト $U_q(\mathfrak{gl}_m)$-加群 (Weyl 加群) である。このとき，次のことが成り立つ。

Proposition 3.13. $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_r) \in (\mathbb{Q}(q) \setminus \{0\})^r$ に対し，*Proposition 2.6 (i)* の全射準同型 $\gamma_{\mathbf{c}} : \mathcal{U} \to U_q(\mathfrak{gl}_m)$ を通じて，$U_q(\mathfrak{gl}_m)$-加群を $\mathcal{U}$-加群とみなすことによって，以下のことが成り立つ。

(i) $\mathcal{O}_{\mathfrak{gl}_m}$ は $\mathcal{O}^{\mathbf{c}}$ の充満部分圏である。

(ii) $\lambda \in \mathcal{P}(m)$ に対し，$\Delta_{\mathfrak{gl}_m}(\lambda)$ は，$\mathcal{U}$-加群として，最高ウェイトが $(\lambda, \mathbf{0}, \mathbf{c})$ である既約な最高ウェイト加群である。ここで，$\mathbf{0}$ は全ての $\varphi^{\pm}_{(j,l),t}$ が 0 であることを意味する。

(iii) $\lambda \in \mathcal{P}(m)$ に対し，$\operatorname{ch} \Delta_{\mathfrak{gl}_m}(\lambda) = S_\lambda(x_1^{(1)}, \dots, x_{m_r}^{(r)})$ である。ここで，$S_\lambda(x_1^{(1)}, \dots, x_{m_r}^{(r)})$ は，$\{x_i^{(k)} \mid 1 \leq i \leq m_k, 1 \leq k \leq r\}$ を変数とする，分割 λ に対応する *Schur* 多項式である。

3.14. [DJM] によって, 全ての $k = 1, \dots, r-1$ に対し, $m_k \geq n$ であるとき, $\mathscr{S}_{n,r}(\mathbf{m})$ は quasi-hereditary 代数となることが知られている。さらに，$\mathscr{S}_{n,r}(\mathbf{m})$ の standard

加群が $\Lambda^+_{n,r}(\mathbf{m})$ によって添え字付けられることが示されている。$\lambda \in \Lambda^+_{n,r}(\mathbf{m})$ に対し，対応する standard 加群を $\Delta(\lambda)$ とおく。quasi-hereditary 代数の一般論より，$\{L(\lambda) := \Delta(\lambda)/\operatorname{rad}\Delta(\lambda) \mid \lambda \in \Lambda^+_{n,r}(\mathbf{m})\}$ が既約 $\mathscr{S}_{n,r}(\mathbf{m})$-加群の完全代表系を与える。さらに，$\mathscr{S}_{n,r}(\mathbf{m})$ が半単純である時は，全ての $\lambda \in \Lambda^+_{n,r}(\mathbf{m})$ に対し，$\Delta(\lambda) = L(\lambda)$ となる。Theorem 2.3 の全射準同型 $\Psi : \mathcal{U} \to \mathscr{S}_{n,r}(\mathbf{m})$ を通じて，$\mathscr{S}_{n,r}$-加群を $\mathcal{U}$-加群と思うと，以下のことが成り立つ。

Theorem 3.15 ([W4]). 全ての $k = 1, \dots, r-1$ に対し，$m_k \geq n$ とする。また，$\mathbf{c} = (Q_1, \dots, Q_r)$ とおく。$\Psi : \mathcal{U} \to \mathscr{S}_{n,r}(\mathbf{m})$ を通じて，$\mathscr{S}_{n,r}$-加群を $\mathcal{U}$-加群と思うと，以下のことが成り立つ。

(i) $\mathscr{S}_{n,r}$-mod は $\mathcal{O}^{\mathbf{c}}$ の充満部分圏である。

(ii) $\lambda \in \Lambda^+_{n,r}(\mathbf{m})$ に対し，$\Delta(\lambda)$ *(resp.* $L(\lambda)$*)* は $(\lambda, \varphi, \mathbf{c})$ を最高ウェイトとする最高ウェイト $\mathcal{U}$-加群である。ここで，$\varphi = (\varphi^{\pm}_{(j,l),t})_{(j,l)\in\Gamma(\mathbf{m}), t\geq 1}$ は，

$$\varphi^+_{(j,l),t} = \frac{Q_k^t q^{(2t-1)\lambda_j^{(l)}}}{q^{t(2j-1)}(q-q^{-1})^{t-1}}[\lambda_j^{(l)}], \quad \varphi^-_{(j,l),t} = \frac{-Q_k^t q^{\lambda_j^{(l)}}}{q^{t(2j-1)}(q-q^{-1})^{t-1}}[\lambda_j^{(l)}]$$

によって与えられる。

(iii) $\lambda \in \Lambda^+_{n,r}(\mathbf{m})$ に対し，$\operatorname{ch}\Delta(\lambda) = \displaystyle\sum_{\mu \in \Lambda^+_{n,r}(\mathbf{m})} \beta_{\lambda\mu} \left(\prod_{k=1}^{r} S_{\mu^{(k)}}(x_1^{(k)}, \dots, x_{m_k}^{(k)}) \right)$ である。ここで，$S_{\mu^{(k)}}(x_1^{(k)}, \dots, x_{m_k}^{(k)}) \in \mathbb{Z}[x_1^{(k)}, \dots, x_{m_k}^{(k)}]^{\mathfrak{S}_{m_k}}$ は分割 $\mu^{(k)}$ に対応する *Schur* 多項式である。また，$\beta_{\lambda\mu} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ であり，この数は，*[W2]* によって与えられた，*Littlewood-Richardson* ルールの一般化によって，組合せ論的に計算できる。

4 $U_q(\mathfrak{g})$ との関係

この節でも，$R = \mathbb{Q}(q)$ とし，$\mathscr{S}_{n,r}(\mathbf{m})$-mod と $U_q(\mathfrak{g})$-mod ($\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_{m_1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{gl}_{m_r}$) との関係を見てみよう。

4.1. まず，$\mathcal{U}$ に対し，Levi 代数，及び Parabolic 代数を定義し，その間の関係を調べる。$\mathbb{X}$ を Definition 2.2 における $\mathcal{U}$ の生成元の集合とする。

$\mathcal{U}^{\mathcal{P}}$ (resp. $\mathcal{U}^{\mathcal{P}'}$) を $\mathbb{X} \setminus \{\mathcal{X}^-_{(m_k,k),t} \mid 1 \leq k \leq r-1, t \geq 0\}$ (resp. $\mathbb{X} \setminus \{\mathcal{X}^+_{(m_k,k),t} \mid 1 \leq$

$k \leq r-1, t \geq 0\}$) を生成元とし，(R1)-(R12) を基本関係式として定まる代数とする。また，$\mathcal{U}^{\mathcal{L}}$ を $\mathbb{X} \setminus \{\mathcal{X}^{\pm}_{(m_k,k),t} \,|\, 1 \leq k \leq r-1, t \geq 0\}$ を生成元とし，(R1)-(R12) を基本関係式として定まる代数とする。このとき次のことが成り立つ (基本関係式より容易にチェックできる)。

Lemma 4.2.

(i) 自然な生成元の対応 *(生成元を同じ記号で表される生成元に送る)* によって，代数としての準同型写像 $f_1 : \mathcal{U}^{\mathcal{P}} \to \mathcal{U}$ *(resp.* $f_1' : \mathcal{U}^{\mathcal{P}'} \to \mathcal{U}$*)* が得られる。

(ii) 自然な生成元の対応によって，代数としての単射準同型写像 $f_2 : \mathcal{U}^{\mathcal{L}} \to \mathcal{U}^{\mathcal{P}}$ *(resp.* $f_2' : \mathcal{U}^{\mathcal{L}} \to \mathcal{U}^{\mathcal{P}'}$*)* が得られる。

(iii) 代数としての全射準同型写像 $f_3 : \mathcal{U}^{\mathcal{P}} \to \mathcal{U}^{\mathcal{L}}$ *(resp.* $f_3' : \mathcal{U}^{\mathcal{P}'} \to \mathcal{U}^{\mathcal{L}}$*)* が $1 \leq k \leq r-1$, $t \geq 0$ に対し，$\mathcal{X}^{+}_{(m_k,k),t} \mapsto 0$ *(resp.* $\mathcal{X}^{-}_{(m_k,k),t} \mapsto 0$*)* とし，残りの生成元は同じ記号で表される生成元に送ることによって得られる。

(iv) $k = 1, \ldots, r$ に対し，$\mathcal{U}^{[k]}$ を

$$\mathbb{X}^{[k]} := \left\{\mathcal{X}^{\pm}_{(i,k),t}, \mathcal{K}^{\pm}_{(j,k)}, \mathcal{H}^{\pm}_{(j,k),t}, \mathcal{I}^{\pm}_{(j,k),t}, C_k \;\middle|\; 1 \leq i \leq m_k - 1, 1 \leq j \leq m_k, t \geq 0\right\}$$

を生成元とし，*(R1)-(R12)* を基本関係式として定まる代数とする。このとき，自然な生成元の対応によって，代数としての同型写像

$$f_4 : \mathcal{U}^{\mathcal{L}} \to \mathcal{U}^{[1]} \otimes \mathcal{U}^{[2]} \otimes \cdots \otimes \mathcal{U}^{[r]}$$

が得られる。

予想： $f_1 : \mathcal{U}^{\mathcal{P}} \to \mathcal{U}$ (resp. $f_1' : \mathcal{U}^{\mathcal{P}'} \to \mathcal{U}$) は単射である。

4.3. $\mathcal{U}^{\mathcal{L}}$-加群を 全射準同型 $f_3 : \mathcal{U}^{\mathcal{P}} \to \mathcal{U}^{\mathcal{L}}$ (resp. $f_3' : \mathcal{U}^{\mathcal{P}'} \to \mathcal{U}^{\mathcal{L}}$) を通じて $\mathcal{U}^{\mathcal{P}}$-加群 (resp. $\mathcal{U}^{\mathcal{P}'}$-加群) とみなす。また，準同型 $f_1 : \mathcal{U}^{\mathcal{P}} \to \mathcal{U}$ (resp. $f_1' : \mathcal{U}^{\mathcal{P}'} \to \mathcal{U}$) を通じて $\mathcal{U}$ を $(\mathcal{U}, \mathcal{U}^{\mathcal{P}})$-両側加群 (resp. $(\mathcal{U}^{\mathcal{P}'}, \mathcal{U})$-両側加群) とみなす。このとき，以下のような関手を考える。

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Ind}_{HC} : \mathcal{U}^{\mathcal{L}}\text{-mod} \to \mathcal{U}\text{-mod} \;\text{ by }\; N \mapsto \mathcal{U} \otimes_{\mathcal{U}^{\mathcal{P}}} N,\\
&\mathrm{Ind}'_{HC} : \mathcal{U}^{\mathcal{L}}\text{-mod} \to \mathcal{U}\text{-mod} \;\text{ by }\; N \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}^{\mathcal{P}'}}(\mathcal{U}, N),\\
&\mathrm{Res}_{HC} : \mathcal{U}\text{-mod} \to \mathcal{U}^{\mathcal{L}}\text{-mod} \;\text{ by }\; M \mapsto \{m \in \mathrm{Res}^{\mathcal{U}}_{\mathcal{U}^{\mathcal{P}}}(M) \,|\, \mathrm{Ker}\, f_3 \cdot m = 0\},\\
&\mathrm{Res}'_{HC} : \mathcal{U}\text{-mod} \to \mathcal{U}^{\mathcal{L}}\text{-mod} \;\text{ by }\; M \mapsto \mathrm{Res}^{\mathcal{U}}_{\mathcal{U}^{\mathcal{P}'}}(M) / \mathrm{Ker}\, f_3' \cdot \mathrm{Res}^{\mathcal{U}}_{\mathcal{U}^{\mathcal{P}'}}(M).
\end{aligned}$$

Ind_{HC} は Res_{HC} の左随伴関手，Ind'_{HC} は Res'_{HC} の右随伴関手である。

Ind_{HC} (resp. Res_{HC}) と Ind'_{HC} (resp. Res'_{HC}) とは，以下の意味で双対の関係にある。まず，代数としての反同型写像 $\dagger : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ (resp. $\dagger : \mathcal{U}^{\mathcal{P}} \to \mathcal{U}^{\mathcal{P}'}$, $\dagger : \mathcal{U}^{\mathcal{L}} \to \mathcal{U}^{\mathcal{L}}$) が，

$$\mathcal{X}^{\pm}_{(i,k),t} \mapsto \mathcal{X}^{\mp}_{(i,k),t}, \mathcal{K}^{\pm}_{(j,l)} \mapsto \mathcal{K}^{\pm}_{(j,l)}, \mathcal{H}^{\pm}_{(j,l),t} \mapsto \mathcal{H}^{\pm}_{(j,l),t}, \mathcal{I}^{\pm}_{(j,l),t} \mapsto \mathcal{I}^{\pm}_{(j,l),t}, C_k \mapsto C_k$$

によって定まる。反変関手 $\circledast : \mathcal{U}\text{-mod} \to \mathcal{U}\text{-mod}$ (resp. $\circledast : \mathcal{U}^{\mathcal{P}}\text{-mod} \to \mathcal{U}^{\mathcal{P}'}\text{-mod}$, $\circledast : \mathcal{U}^{\mathcal{P}'}\text{-mod} \to \mathcal{U}^{\mathcal{P}}\text{-mod}$, $\circledast : \mathcal{U}^{\mathcal{L}}\text{-mod} \to \mathcal{U}^{\mathcal{L}}\text{-mod}$) を，$M \in \mathcal{U}\text{-mod}$ に対し，$\mathrm{Hom}_R(M,R)$ を自然に右 $\mathcal{U}$-加群と思い，その作用を $\dagger$ で捻ることによって左 $\mathcal{U}$-加群とみなしたものを $\circledast(M)$ とすることによって定める (resp. 同様)。すると，以下のような関手の同値が得られる。

Lemma 4.4. $\mathrm{Ind}'_{HC} \cong \circledast \circ \mathrm{Ind}_{HC} \circ \circledast$, $\quad \mathrm{Res}'_{HC} \cong \circledast \circ \mathrm{Res}_{HC} \circ \circledast$.

4.5. 次に，$U_q(\mathfrak{g})$-加群（のうちで多項式表現と呼ばれるもの）と $\mathcal{U}^{\mathcal{L}}$-加群との関係を見てみよう。

$\mathcal{O}_{\mathfrak{g}}$ を $U_q(\mathfrak{g})$-mod の $P_{\geq 0}$ をウェイトに持つような有限次元ウェイト加群からなる充満部分圏とする。すると，次のことが知られている。

$$(\sharp\sharp) \qquad \mathcal{O}_{\mathfrak{g}} \cong \bigoplus_{(n_1,\dots,n_r)\in\mathbb{Z}^r_{\geq 0}} \mathscr{S}_{n_1,1}(m_1) \otimes \cdots \otimes \mathscr{S}_{n_r,1}(m_r)\text{-mod}.$$

$(n_1,\dots,n_r) \in \mathbb{Z}^r_{\geq 0}$ に対し，$\mathscr{S}_{(n_1,\dots,n_r)}(\mathbf{m}) := \mathscr{S}_{n_1,1}(m_1) \otimes \cdots \otimes \mathscr{S}_{n_r,1}(m_r)$ とおく。Theorem 2.3 (の $r=1$ の場合) と Lemma 4.2 (iv) の同型 $f_4 : \mathcal{U}^{\mathcal{L}} \to \mathcal{U}^{[1]} \otimes \dots \mathcal{U}^{[r]}$ より，代数としての全射準同型写像

$$\Psi_{(n_1,\dots,n_r)} : \mathcal{U}^{\mathcal{L}} \to \mathscr{S}_{(n_1,\dots,n_r)}(\mathbf{m})$$

が得られる。ここで，$\Psi_{(n_1,\dots,n_r)}(C_k) = Q_k$ であることに注意しよう。
$\mathbf{c} = (Q_1,\dots,Q_r)$ とおき，この全射準同型を通じて，関手

$$\mathbf{ev}_{\mathbf{c},(n_1,\dots,n_r)} : \mathscr{S}_{(n_1,\dots,n_r)}(\mathbf{m})\text{-mod} \to \mathcal{U}^{\mathcal{L}}\text{-mod}$$

が得られる。

さらに,

$$\mathscr{S}^{\mathfrak{g}}_{n,r}(\mathbf{m}) := \bigoplus_{\substack{(n_1,\dots,n_r) \\ n_1+\cdots+n_r=n}} \mathscr{S}_{(n_1,\dots,n_r)}(\mathbf{m})$$

とおき,関手 $\mathbf{ev}_{\mathbf{c},n,r} : \mathscr{S}^{\mathfrak{g}}_{n,r}(\mathbf{m})\text{-mod} \to \mathcal{U}^{\mathcal{L}}\text{-mod}$ を $\mathbf{ev}_{\mathbf{c},n,r} := \bigoplus_{\substack{(n_1,\dots,n_r) \\ n_1+\cdots+n_r=n}} \mathbf{ev}_{\mathbf{c},(n_1,\dots,n_r)}$ によって定める。

また，全射準同型 $\Psi_{(n_1,\dots,n_r)} : \mathcal{U}^{\mathcal{L}} \to \mathscr{S}_{(n_1,\dots,n_r)}(\mathbf{m})$ を通じて，$\mathscr{S}_{n_1,\dots,n_r}(\mathbf{m})$ を $(\mathcal{U}^{\mathcal{L}}, \mathscr{S}_{n_1,\dots,n_r}(\mathbf{m}))$-両側加群 (resp. $(\mathscr{S}_{n_1,\dots,n_r}(\mathbf{m}), \mathcal{U}^{\mathcal{L}})$-両側加群) とみなすことによって関手

$$T_{n,r} := \bigoplus_{\substack{(n_1,\dots,n_r) \\ n_1+\cdots+n_r=n}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}^{\mathcal{L}}}(\mathscr{S}_{(n_1,\dots,n_r)}(\mathbf{m}), ?) : \mathcal{U}^{\mathcal{L}}\text{-mod} \to \mathscr{S}^{\mathfrak{g}}_{n,r}(\mathbf{m})\text{-mod},$$

$$T'_{n,r} := \bigoplus_{\substack{(n_1,\dots,n_r) \\ n_1+\cdots+n_r=n}} \mathscr{S}_{n_1,\dots,n_r}(\mathbf{m}) \otimes_{\mathcal{U}^{\mathcal{L}}} ? : \mathcal{U}^{\mathcal{L}}\text{-mod} \to \mathscr{S}^{\mathfrak{g}}_{n,r}(\mathbf{m})\text{-mod}$$

を定義する。

以下，各 $k = 1, \dots, r$ に対し，$m_k \geq n$ であると仮定する。
以下の関手を考える。

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ind}_{n,r} &:= \mathscr{S}_{n,r}(\mathbf{m}) \otimes_{\mathcal{U}} ? \circ \mathrm{Ind}_{HC} \circ \mathbf{ev}_{\mathbf{c},n,r} : \mathscr{S}^{\mathfrak{g}}_{n,r}(\mathbf{m})\text{-mod} \to \mathscr{S}_{n,r}(\mathbf{m})\text{-mod}, \\
\mathrm{Ind}'_{n,r} &:= \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(\mathscr{S}_{n,r}(\mathbf{m}), ?) \circ \mathrm{Ind}'_{HC} \circ \mathbf{ev}_{\mathbf{c},n,r} : \mathscr{S}^{\mathfrak{g}}_{n,r}(\mathbf{m})\text{-mod} \to \mathscr{S}_{n,r}(\mathbf{m})\text{-mod}, \\
\mathrm{Res}_{n,r} &:= T_{n,r} \circ \mathrm{Res}_{HC} : \mathscr{S}_{n,r}(\mathbf{m})\text{-mod} \to \mathscr{S}^{\mathfrak{g}}_{n,r}(\mathbf{m}), \\
\mathrm{Res}'_{n,r} &:= T'_{n,r} \circ \mathrm{Res}'_{HC} : \mathscr{S}_{n,r}(\mathbf{m})\text{-mod} \to \mathscr{S}^{\mathfrak{g}}_{n,r}(\mathbf{m}).
\end{aligned}$$

すると，$\mathrm{Ind}_{n,r}$ は $\mathrm{Res}_{n,r}$ の左随伴関手，$\mathrm{Ind}'_{n,r}$ は $\mathrm{Res}'_{n,r}$ の右随伴関手となっている。これらの関手に対し以下のことが成り立つ。

Proposition 4.6. $\lambda \in \Lambda^+_{n,r}(\mathbf{m})$ に対し，$\Delta_{\mathfrak{g}}(\lambda)$ を λ を最高ウェイトとする既約最高ウェイト $U_q(\mathfrak{g})$-加群とする *(今 $\mathbb{Q}(q)$ 上で考えていることに注意)*。このとき，以下が成り立つ。

(i) $\mathrm{Ind}_{n,r}(\Delta_{\mathfrak{g}}(\lambda)) \cong \Delta(\lambda)$.
(ii) $\mathrm{Res}'_{n,r}(\Delta(\lambda)) \cong \Delta_{\mathfrak{g}}(\lambda)$.
(iii) $\mathrm{Res}'_{n,r}(L(\lambda)) \cong \Delta_{\mathfrak{g}}(\lambda)$.
(iv) $\mathrm{Res}_{n,r}(L(\lambda)) \cong \Delta_{\mathfrak{g}}(\lambda)$.

系として以下のことが成り立つ。

Corollary 4.7. $\mathscr{S}_{n,r}(\mathbf{m})$ が半単純であるとき *(i.e.* $Q_k \neq q^a Q_l$ *for all* $1 \leq k < l \leq r$, $-n < a < n$ *であるとき),* 以下の関手の同値が成り立つ。

(i) $\mathrm{Ind}_{n,r} \cong \mathrm{Ind}'_{n,r}$, $\mathrm{Res}_{n,r} \cong \mathrm{Res}'_{n,r}$.

(ii) $\mathrm{Res}_{n,r} \circ \mathrm{Ind}_{n,r} \cong \mathrm{Id}_{\mathscr{S}^{\mathfrak{g}}_{n,r}(\mathbf{m})\text{-mod}}$, $\mathrm{Ind}_{n,r} \circ \mathrm{Res}_{n,r} \cong \mathrm{Id}_{\mathscr{S}_{n,r}(\mathbf{m})\text{-mod}}$.

よって，$\mathrm{Res}_{n,r}$ *(resp.* $\mathrm{Ind}_{n,r}$*)* は圏の同値 $\mathscr{S}_{n,r}(\mathbf{m})\text{-mod} \cong \mathscr{S}^{\mathfrak{g}}_{n,r}(\mathbf{m})\text{-mod}$ を与える。

5 モノイダル圏としての構造

$\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_r), \mathbf{m}' = (m'_1, \dots, m'_r) \in \mathbb{Z}^r_{>0}$ に対し $m_k, m'_k \geq n$ $(k = 1, \dots, r)$ が成り立っているとき，$\mathscr{S}_{n,r}(\mathbf{m})\text{-mod} \cong \mathscr{S}_{n,r}(\mathbf{m}')\text{-mod}$ (resp. $\mathscr{S}^{\mathfrak{g}}_{n,r}(\mathbf{m})\text{-mod} \cong \mathscr{S}^{\mathfrak{g}}_{n,r}(\mathbf{m}')\text{-mod}$) となることが知られている。そこで，以下，必要ならばこの同値を用いて随時 $\mathbf{m}$ を取り換えることによって，考える対象に対し，十分大きな $\mathbf{m}$ に対する $\mathscr{S}_{n,r} = \mathscr{S}_{n,r}(\mathbf{m})$ (resp. $\mathscr{S}^{\mathfrak{g}}_{n,r} = \mathscr{S}^{\mathfrak{g}}_{n,r}(\mathbf{m})$) を考えることにする。

5.1. 全射準同型 $U_q(\mathfrak{g}) \to \mathscr{S}_{(n_1,\dots,n_r)}$ を通じて，$\mathscr{S}_{(n_1,\dots,n_r)}$-加群を $U_q(\mathfrak{g})$-加群とみなすことによって，$M \in \mathscr{S}_{(n_1,\dots,n_r)}\text{-mod}$, $M' \in \mathscr{S}_{(n'_1,\dots,n'_r)}\text{-mod}$ に対し，そのテンソル積 $M \otimes M' \in \mathscr{S}_{(n_1+n'_1,\dots,n_r+n'_r)}\text{-mod}$ が $U_q(\mathfrak{g})$ の余積を用いて定義できる。ここで，$\mathbf{m}$ は，$m_k \geq n_k + n'_k$ $(k = 1, \dots, r)$ となるように取っておく。このようにして，$\bigoplus_{n \geq 0} \mathscr{S}^{\mathfrak{g}}_{n,r}\text{-mod}$ 上にモノイダル圏の構造が定義される。ここで，$\mathbf{m}$ は固定されずに，考える n, n' に対し，(上で注意した同値を通じて) 随時十分大きいものに取り換えられることに注意しよう。よって，ここでの $\bigoplus_{n \geq 0} \mathscr{S}^{\mathfrak{g}}_{n,r}\text{-mod}$ は (♯♯) の右辺に現れる $\bigoplus_{(n_1,\dots,n_r) \in \mathbb{Z}^r_{\geq 0}} \mathscr{S}_{n_1,1}(m_1) \otimes \cdots \otimes \mathscr{S}_{n_r,1}(m_r)\text{-mod}$ とは異なる[§]。

5.2. 次に，$\mathscr{S}_{n,r}\text{-mod}^{\Delta}$ を $\mathscr{S}_{n,r}\text{-mod}$ の standard-加群でフィルターされている加群のなす充満部分圏とし，$\bigoplus_{n \geq 0} \mathscr{S}_{n,r}\text{-mod}^{\Delta}$ 上にモノイダル圏としての構造を定義しよう。

[§] (♯♯) の右辺に現れる $\bigoplus_{(n_1,\dots,n_r) \in \mathbb{Z}^r_{\geq 0}} \mathscr{S}_{n_1,1}(m_1) \otimes \cdots \otimes \mathscr{S}_{n_r,1}(m_r)\text{-mod}$ 上にも $U_q(\mathfrak{g})$ (このときは $\mathbf{m}$ を固定したままで) の余積を用いてモノイダル圏の構造が入り，こちらを考える方が自然だが，後の $\bigoplus_{n \geq 0} \mathscr{S}_{n,r}\text{-mod}$ との関係を見る都合上，$\mathbf{m}$ を随時十分大きく取り換えたものを考える。

$M \in \mathscr{S}_{n,r}$-mod と $M' \in \mathscr{S}_{n',r}$-mod に対し，$M \widetilde{\otimes} M' \in \mathscr{S}_{n+n',r}$-mod を，

$$M \widetilde{\otimes} M' := \mathrm{Ind}_{n+n',r}(\mathrm{Res}'_{n,r}(M) \otimes \mathrm{Res}'_{n',r}(M'))$$

によって定める。ここで，$\mathbf{m}$ は $m_k \geq n+n'$ $(k = 1, \ldots, r)$ と取っておき，$\mathrm{Res}'_{n,r}(M) \otimes \mathrm{Res}'_{n',r}(M')$ は $U_q(\mathfrak{g})$ の余積を用いて定義されるテンソル積である。このとき，次のことが成り立つ。

Proposition 5.3 ([W4]). $(\bigoplus_{n\geq 0} \mathscr{S}_{n,r}\text{-mod}^{\Delta}, \widetilde{\otimes})$ は，モノイダル圏となる。

さらに次のことが分かる。

Proposition 5.4 ([W4]). $\lambda \in \Lambda^+_{n,r}$, $\mu \in \Lambda^+_{n',r}$ に対し以下のことが成り立つ。

(i) $\Delta(\lambda) \widetilde{\otimes} \Delta(\mu) \cong \bigoplus_{\nu \in \Lambda^+_{n+n'}} \Big(\prod_{k=1}^{r} \mathrm{LR}^{\nu^{(k)}}_{\lambda^{(k)}\mu^{(k)}} \Big) \Delta(\nu)$,

ここで，$\mathrm{LR}^{\nu^{(k)}}_{\lambda^{(k)}\mu^{(k)}}$ は *Littlewood-Richardson* 係数である。

(ii) $\mathrm{ch}(\Delta(\lambda) \widetilde{\otimes} \Delta(\mu)) = \mathrm{ch}\,\Delta(\lambda)\,\mathrm{ch}\,\Delta(\mu)$.

さらに，$\mathscr{S}_{n,r}$-mod が半単純であるときは，$\mathscr{S}_{n,r}\text{-mod} \cong \mathscr{S}_{n,r}\text{-mod}^{\Delta}$ であることに注意すると，以下のことが成り立つ。

Proposition 5.5 ([W4]). 全ての $1 \leq k < l \leq r$, $a \in \mathbb{Z}$ に対し，$Q_k \neq q^a Q_l$ であるとき *(i.e.* 任意の n に対し $\mathscr{S}_{n,r}$ が半単純であるとき*)* $\bigoplus_{n\geq 0} \mathrm{Res}_{n,r}$ *(resp.* $\bigoplus_{n \geq 0} \mathrm{Ind}_{n,r}$*)* は，モノイダル圏としての同値

$$(\bigoplus_{n\geq 0} \mathscr{S}_{n,r}\text{-mod}, \widetilde{\otimes}) \cong (\bigoplus_{n \geq 0} \mathscr{S}^{\mathfrak{g}}_{n,r}\text{-mod}, \otimes)$$

を与える。

Remark 5.6. $\bigoplus_{n\geq 0} \mathscr{S}_{n,r}$-mod 上のテンソル積 $\widetilde{\otimes}$ の定義は，以下の点であまり都合がよくない。

- standard-加群でフィルターされていない加群に対しては，そのテンソル積に対し，結合則が成り立たない。
- 一度 $\mathrm{Res}'_{n,r}$, $\mathrm{Res}'_{n',r}$ によって，$U_q(\mathfrak{g})$-加群だと思い，そこでのテンソル積を

取った後, $\mathrm{Ind}_{n+n',r}$ によって誘導しているため, $U_q(\mathfrak{g})$-加群だと思った時点で全ての加群は半単純となってしまう (それを誘導したものは, Proposition 4.6 (i) より standard 加群の直和になってしまう)。

- $\mathbf{m}$ を随時, 十分大きく取り換えないといけない。

しかし, Proposition 5.3, 5.4, 5.5 より, $\mathcal{U}$ が Hopf 代数の構造を持つ, あるいは, $\mathscr{S}_{n,r}$-mod を含む $\mathcal{U}$ のあるクラスの加群に対し, Grothendieck 群のレベルでは, Proposition 5.3, 5.4, 5.5 と整合的になるようなテンソル積が定義できることを期待してもいいんじゃないかと (楽観的に) 考えている。

参考文献

[DJM] R. Dipper, G. James and A. Mathas, Cyclotomic q-Schur algebras, *Math. Z.* **229** (1998), 385-416.

[DR] J. Du and H. Rui, Borel type subalgebras of the q-Schur^m algebra, *J. Algebra* **213** (1999), 567-595.

[J] M. Jimbo, *A q-analogue of $U(\mathfrak{gl}(N+1))$, Hecke algebra and the Yang-Baxter equation,* Lett. Math. Phys. **11** (1986), 247–252.

[R] R. Rouquier, q-Schur algebras and complex reflection groups, *Moscow Math. J.* **8**, 119-158.

[SakS] M. Sakamoto and T. Shoji, *Schur-Weyl reciprocity for Ariki-Koike algebras,* J. Algebra **221** (1999), 293–314.

[SawS] N. Sawada and T. Shoji, *Modified Ariki-Koike algebras and cyclotomic q-Schur algebras*, Math. Z. **249** (2005), 829–867.

[VV] M. Varagnolo and E. Vasserot, Cyclotomic double affine Hecke algebras and affine parabolic category O, *Adv. Math.* **225** (2010), 1523-1588.

[W1] K. Wada, Presenting cyclotomic q-Schur algebras, *Nagoya Math. J.* **201** (2011), 45-116.

[W2] K. Wada, On Weyl modules of cyclotomic q-Schur algebras, *Contemp. Math.* **565** (2012), 261-286.

[W3] K. Wada, Induction and restriction functors for cyclotomic q-Schur algebras, preprint.

[W4] K. Wada, Drinfeld type realization of cyclotomic q-Schur algebras I, preprint.

[W5] K. Wada, Drinfeld type realization of cyclotomic q-Schur algebras II, in preparation.