数理解析研究所講究録
第 1871 巻 2013 年 54-64

$SU(2,1)$ と $SU(3,1)$ の離散系列表現の行列係数

北里大学一般教育部　宮崎 直
Tadashi Miyazaki
Kitasato University College of Liberal Arts and Sciences

1 序文

本稿は織田孝幸氏，古関春隆氏，早田孝博氏との共著論文 [HKMO] の概説である．半単純 Lie 群 G の正則離散系列表現の極小 K-タイプにおける行列係数は Bergman 核として知られており，その明示式は Godement-Selberg の公式を用いて G/K 上の正則保型形式の空間の次元の計算する際に重要な役割を果たしている．($SU(n,1)$ の場合については，加藤末広氏の論文 [Ka1], [Ka2], [Ka3] や古関春隆氏の論文 [Ko] を参照.）非正則離散系列表現に付随する保型形式の空間についても，行列係数の明示式を用いて次元を計算できる事が期待されるが，非正則離散系列表現の行列係数の明示式はほとんど知られていない．本稿では，$SU(2,1)$ と $SU(3,1)$ の大きい離散系列表現の極小 K-タイプにおける行列係数について，一般化超幾何級数を用いた表示を与える．また，この表示に Vidūnas 氏の結果を適用する事で得られる行列係数の漸近挙動に関する結果についても紹介する．

また，本稿は [HKO] でアナウンスされた内容の訂正と追加にあたる．定式化や明示式の形を大きく変更し，いくつかの新しい結果を追加したものである．

2 $SU(n,1)$ の構造

符号 $(n,1)$ の特殊ユニタリ群 $G=SU(n,1)$ を

$$G=\{g\in SL(n+1,\mathbb{C})\mid {}^t\bar{g}1_{n,1}g=1_{n,1}\},\quad 1_{n,1}=\left(\begin{array}{c|c} 1_n & \\ \hline & -1\end{array}\right)$$

で定義し，その極大コンパクト部分群

$$K=\left\{\left(\begin{array}{c|c} u & \\ \hline & (\det u)^{-1}\end{array}\right)\middle|\, u\in U(n)\right\}\simeq U(n)$$

をとる．Lie 群 G の Lie 代数 $\mathfrak{g}$ は

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{su}(n,1)=\{X\in\mathfrak{sl}(n+1,\mathbb{C})\mid {}^t\bar{X}1_{n,1}+1_{n,1}X=0\}$$

で与えられる．極大コンパクト部分群 K の Lie 代数を $\mathfrak{k}$，Killing 形式に関する $\mathfrak{k}$ の直交補空間を $\mathfrak{p}$ とおく．

正の整数 m と $1 \leq i, j \leq m$ に対して，$E_{i,j}^{(m)}$ を (i,j)-成分が 1 で他の成分が 0 の m 次正方行列とする．コンパクト Cartan 部分代数

$$\mathfrak{t} = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{R}\left(\sqrt{-1}\tilde{E}_{i,i}^{(n+1)}\right), \qquad \tilde{E}_{i,i}^{(n+1)} = E_{i,i}^{(n+1)} - E_{n+1,n+1}^{(n+1)}$$

をとり，$\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$ 上の $\mathbb{C}$-線型形式 e_i $(1 \leq i \leq n+1)$ を

$$e_i(t) = t_i \qquad \left(t = \sum_{i=1}^{n+1} t_i E_{i,i}^{(n+1)} \in \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}\right)$$

で定義する．このとき，$(\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ に関するルート系 Σ は

$$\Sigma = \Sigma(\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) = \{e_i - e_j \mid 1 \leq i \neq j \leq n+1\}$$

であり，$e_i - e_j$ に対応するルート空間は $\mathfrak{g}_{e_i - e_j} = \mathbb{C}E_{i,j}^{(n+1)}$ となる．ここで，

$$\Sigma^+ = \{e_i - e_j \mid 1 \leq i < j \leq n+1\}$$

とおくと，Σ^+ は Σ の正ルート系をなし，コンパクト，非コンパクトな正ルート系はそれぞれ

$$\begin{aligned}
\Sigma_{\mathrm{c}}^+ &= \{\alpha \in \Sigma^+ \mid \mathfrak{g}_\alpha \subset \mathfrak{k}_{\mathbb{C}}\} = \{e_i - e_j \mid 1 \leq i < j \leq n\}, \\
\Sigma_{\mathrm{n}}^+ &= \{\alpha \in \Sigma^+ \mid \mathfrak{g}_\alpha \subset \mathfrak{p}_{\mathbb{C}}\} = \{e_i - e_{n+1} \mid 1 \leq i \leq n\}
\end{aligned}$$

で与えられる．このとき，$\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ と $\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$ は次のように分解される：

$$\begin{aligned}
\mathfrak{k}_{\mathbb{C}} &= \mathfrak{t}_{\mathbb{C}} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Sigma_{\mathrm{c}}} \mathfrak{g}_\alpha && \left(\Sigma_{\mathrm{c}} = \Sigma_{\mathrm{c}}^+ \cup (-\Sigma_{\mathrm{c}}^+)\right), \\
\mathfrak{p}_{\mathbb{C}} &= \mathfrak{p}_+ \oplus \mathfrak{p}_- && \left(\mathfrak{p}_+ = \bigoplus_{\alpha \in \Sigma_{\mathrm{n}}^+} \mathfrak{g}_\alpha, \ \mathfrak{p}_- = \bigoplus_{\alpha \in \Sigma_{\mathrm{n}}^+} \mathfrak{g}_{-\alpha}\right).
\end{aligned}$$

今後，$\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$ 上の $\mathbb{C}$-線型形式 γ を複素ベクトル

$$(\gamma(\tilde{E}_{1,1}^{(n+1)}),\ \gamma(\tilde{E}_{2,2}^{(n+1)}),\ \cdots,\ \gamma(\tilde{E}_{n,n}^{(n+1)})) \in \mathbb{C}^n$$

と同一視する．この同一視の下では，

$$e_i = (\overbrace{0, \cdots, 0}^{i-1}, 1, \overbrace{0, \cdots, 0}^{n-i}) \qquad (1 \leq i \leq n), \qquad e_{n+1} = (-1, -1, \cdots, -1)$$

となる事に注意しておこう．

さて，$\mathfrak{p}$ の極大可換部分代数 $\mathfrak{a} = \mathbb{R}H_1 \left(H_1 = E^{(n+1)}_{1,n+1} + E^{(n+1)}_{n+1,1} \right)$ をとり，

$$A = \exp(\mathfrak{a}) = \{\mathrm{a}[t] = \exp(tH_1) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

と定義しておく．このとき，G は $G = KAK$ と Cartan 分解される．また，M を K における A の中心化部分群とする，すなわち，

$$M = \left\{ \left(\begin{array}{c|c|c} u_1 & & \\ \hline & u_2 & \\ \hline & & u_1 \end{array} \right) \;\middle|\; \begin{array}{l} u_1 \in U(1),\ u_2 \in U(n-1), \\ (u_1)^2 \det u_2 = 1 \end{array} \right\}.$$

3 行列係数

G 上の滑らかな関数のなす空間 $C^\infty(G)$ を両側正則作用

$$(L(g_1)R(g_2)\varphi)(x) = \varphi(g_1^{-1} x g_2) \qquad (\varphi \in C^\infty(G),\ x \in G,\ (g_1, g_2) \in G \times G)$$

により，$G \times G$-加群とみなす．(Π, H_Π) を G の既約許容 Banach 表現とし，$(\Pi^\vee, H_\Pi^\vee)$ を Π の反傾表現とする．$H_{\Pi,K}$ と $H^\vee_{\Pi,K}$ をそれぞれ K-有限なベクトルのなす H_Π と $H_\Pi^\vee$ の部分空間とする，このとき，$K \times K$-準同型写像 $\Phi_\Pi \colon H^\vee_{\Pi,K} \boxtimes_{\mathbb{C}} H_{\Pi,K} \to C^\infty(G)$ を

$$\Phi_\Pi(f^\vee \boxtimes f)(g) = \langle f^\vee, \Pi(g) f \rangle$$

で定義する．ここで，$\langle \cdot, \cdot \rangle$ は $H_\Pi^\vee \times H_\Pi$ 上の標準的なペアリングとする．$f^\vee \in H^\vee_{\Pi,K}$ と $f \in H_{\Pi,K}$ に対して，関数 $\Phi_\Pi(f^\vee \boxtimes f)$ を (K-有限な)Π の行列係数という．このとき，定義より，

$$\begin{aligned} L(X)\Phi_\Pi(f^\vee \boxtimes f) &= \Phi_\Pi((\Pi^\vee(X) f^\vee) \boxtimes f), \\ R(X)\Phi_\Pi(f^\vee \boxtimes f) &= \Phi_\Pi(f^\vee \boxtimes (\Pi(X) f)) \qquad\qquad (X \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \end{aligned}$$

という関係式が成立する．ここで，左正則作用 L, 右正則作用 R の微分を $\mathbb{C}$-線型に拡張する事で定まる $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の作用をそれぞれ同じ記号で書いている．また，

$$\Phi_\Pi(f^\vee \boxtimes f)(g) = \Phi_{\Pi^\vee}(f \boxtimes f^\vee)(g^{-1}) \qquad (g \in G) \tag{3.1}$$

である事も容易に分かる．

4 $U(n)$ の場合の最高ウェイト理論の復習

この節では，$U(n)$ の場合の最高ウェイト理論を簡単に復習しておこう．$U(n)$ の既約表現 (τ, V_τ) は有限次元であり，次のように分解される事が知られている：

$$V_\tau = \bigoplus_{\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n) \in \mathbb{Z}^n} V_\tau(\gamma), \qquad V_\tau(\gamma) = \{v \in V_\tau \mid \tau(E^{(n)}_{i,i}) v = \gamma_i v,\ 1 \le i \le n\}.$$

ここで，τ の微分を $\mathbb{C}$-線型に拡張する事で定まる $\mathfrak{u}(n)_{\mathbb{C}} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ の作用を同じ記号で書いている．$V_\tau(\gamma) \neq \{0\}$ であるとき，$\gamma \in \mathbb{Z}^n$ を τ のウェイトと呼び，$V_\tau(\gamma)$ をそのウェイト空間という．このとき，辞書式順序について最大となる τ のウェイト λ_τ を τ の最高ウェイトという．最高ウェイト λ_τ は

$$\Lambda_n = \{\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{Z}^n \mid \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n\}$$

の元であり，$\tau \to \lambda_\tau$ は $U(n)$ の既約表現の同値類から Λ_n への全単射を与える．今後，$\lambda \in \Lambda_n$ に対して，最高ウェイト λ の $U(n)$ の既約表現を $(\tau_\lambda^{(n)}, V_\lambda^{(n)})$ と書く事にする．また，同型写像

$$\kappa\colon K \ni \left(\begin{array}{c|c} u & \\ \hline & (\det u)^{-1} \end{array}\right) \mapsto u \in U(n) \tag{4.1}$$

により，$(\tau_\lambda^{(n)}, V_\lambda^{(n)})$ を K の既約表現とも見なす．

5　行列係数の M-不変性

今後，常に $n \geq 2$ であると仮定する．K-タイプを固定して，既約許容 Banach 表現の行列係数を考えてみよう．(Π, H_Π) を G の既約許容 Banach 表現とし，$(\tau_\lambda^{(n)}, V_\lambda^{(n)})$ をその K-タイプとする．2 つの単射 K-準同型写像 $\iota^\vee\colon V_\lambda^{(n)\vee} \to H_{\Pi,K}^\vee$ と $\iota\colon V_\lambda^{(n)} \to H_{\Pi,K}$ をとり，$\phi = \Phi_\Pi \circ (\iota^\vee \boxtimes \iota)$ とおく．定義より，$v^\vee \in V_\lambda^{(n)\vee}$ と $v \in V_\lambda^{(n)}$ に対して，

$$\phi(v^\vee \boxtimes v)(k_1 g k_2) = \phi(\tau_\lambda^{(n)\vee}(k_1^{-1})v^\vee \boxtimes \tau_\lambda^{(n)}(k_2)v)(g) \qquad (g \in G,\ k_1, k_2 \in K)$$

という等式が成立するから，Cartan 分解 $G = KAK$ より，ϕ は動径成分 $\phi(v^\vee \boxtimes v)|_A$ ($v^\vee \in V_\lambda^{(n)\vee}$, $v \in V_\lambda^{(n)}$) によって特徴づけられる．

また，$v^\vee \in V_\lambda^{(n)\vee}$ と $v \in V_\lambda^{(n)}$ に対して，$\phi(v^\vee \boxtimes v)|_A$ は M の作用について

$$\begin{aligned}\phi(\tau_\lambda^{(n)\vee}(m)v^\vee \boxtimes \tau_\lambda^{(n)}(m)v)(a) &= \phi(v^\vee \boxtimes v)(m^{-1}am) \\ &= \phi(v^\vee \boxtimes v)(a) \qquad (m \in M,\ a \in A)\end{aligned} \tag{5.1}$$

という不変性を持つ．この不変性について考察するために，まずは $V_\lambda^{(n)\vee}$ と $V_\lambda^{(n)}$ が M-加群としてどのように既約分解するかを考えよう．埋め込み

$$\iota_{n-1,n}\colon U(n-1) \ni u \mapsto \left(\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & u \end{array}\right) \in U(n), \tag{5.2}$$

により，$U(n-1)$ を $U(n)$ の部分群と考える．$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \in \Lambda_n$ に対して，

$$B(\lambda) = \{\nu = (\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_{n-1}) \in \Lambda_{n-1} \mid \lambda_i \geq \nu_i \geq \lambda_{i+1}\ (1 \leq i \leq n-1)\}$$

とおくと，$\tau_\lambda^{(n)}$ の $U(n-1)$ への制限 $\tau_\lambda^{(n)}|_{U(n-1)}$ は $\tau_\lambda^{(n)}|_{U(n-1)} \simeq \bigoplus_{\nu\in B(\lambda)} \tau_\nu^{(n-1)}$ と既約分解される事が知られている.（例えば，Zhelobenko 氏の論文 [Z, Proposition A.3] を参照.）この既約分解に対応する表現空間 $V_\lambda^{(n)}$ の分解を

$$V_\lambda^{(n)} = \bigoplus_{\nu\in B(\lambda)} V_{\lambda,\nu}^{(n)} \tag{5.3}$$

とする，すなわち，$V_{\lambda,\nu}^{(n)}$ は $U(n-1)$-加群として $V_\nu^{(n-1)}$ と同型な $V_\lambda^{(n)}$ の部分空間とする．このとき，簡単な議論によって，(5.3) は M-加群としての既約分解でもある事が分かる．さらに，この分解において，$\nu \neq \nu'$ ならば M-加群としても $V_{\lambda,\nu}^{(n)} \not\simeq V_{\lambda,\nu'}^{(n)}$ である事も分かる．また，$V_\lambda^{(n)}$ の双対空間 $V_\lambda^{(n)\vee}$ は M-加群として

$$V_\lambda^{(n)\vee} = \bigoplus_{\nu\in B(\lambda)} V_{\lambda,\nu}^{(n)\vee}, \quad V_{\lambda,\nu}^{(n)\vee} = \{v^\vee \in V_\lambda^{(n)\vee} \mid \langle v^\vee, v\rangle = 0 \ (v \in V_{\lambda,\nu'}^{(n)},\ \nu' \in B(\lambda) - \{\nu\})\}$$

と既約分解される事も容易に分かる.

さて，(5.1) より，$\nu, \nu' \in B(\lambda)$ と $a \in A$ に対して，

$$V_{\lambda,\nu}^{(n)\vee} \otimes_{\mathbb{C}} V_{\lambda,\nu'}^{(n)} \ni v^\vee \otimes v \to \phi(v^\vee \boxtimes v)(a) \in \mathbb{C}$$

は M-不変なペアリングである．よって，Schur の補題より，$\nu \neq \nu'$ ならば

$$\phi(v^\vee \boxtimes v)(a) = 0 \qquad\qquad (v^\vee \in V_{\lambda,\nu}^{(n)\vee},\ v \in V_{\lambda,\nu'}^{(n)})$$

であり，$\nu = \nu'$ ならば

$$\phi(v^\vee \boxtimes v)(a) = \phi[\nu](a)\langle v^\vee, v\rangle \qquad\qquad (v^\vee \in V_{\lambda,\nu}^{(n)\vee},\ v \in V_{\lambda,\nu}^{(n)})$$

となる $\phi[\nu](a) \in \mathbb{C}$ が存在する．以上により，K-タイプ $\tau_\lambda^{(n)}$ における Π の行列係数 $\phi(v^\vee \boxtimes v)$ の明示式は，A 上の関数 $\phi[\nu]$ $(\nu \in B(\lambda))$ の明示式に帰着される．$\nu \in B(\lambda)$ に対して，A 上の関数 $\phi[\nu]$ を ϕ の ν-成分と呼ぶ事にする.

6 離散系列表現の Blattner パラメーター

行列係数が G 上の Haar 測度について 2 乗可積分であるような G の既約ユニタリ表現を，G の離散系列表現という．この節では，G の離散系列表現の Blattner パラメーターについて復習する．詳細については，例えば，Knapp 氏の本 [Kn, Theorems 9.20, 12.21] を参照.

$0 \le J \le n$ に対して，Σ の単純ルート系 Δ_J を

$$\begin{aligned}\Delta_0 =&\{e_i - e_{i+1} \mid 1 \le i \le n\},\\ \Delta_J =&\{e_i - e_{i+1} \mid 1 \le i \le n-1,\ i \neq n-J\} \cup \{e_{n-J} - e_{n+1}, e_{n+1} - e_{n-J+1}\} \quad (0 < J < n),\end{aligned}$$

$$\Delta_n = \{e_i - e_{i+1} \mid 1 \le i \le n-1\} \cup \{e_{n+1} - e_1\}$$

で定義し，Δ_J に対応する正ルート系を $\Sigma^{+,J}$ とする．このとき，Σ_c^+ を含む Σ の正ルート系は $\Sigma^{+,J}$ $(0 \le J \le n)$ で尽くされる．

ここで，

$$\rho_J = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Sigma^{+,J}} \alpha = (n-J, n-J-1, \cdots, 2, 1, -1, -2, \cdots, -J) \qquad (0 \le J \le n),$$

$$\rho_{[K]} = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Sigma_c^+} \alpha = \frac{1}{2}(n-1, n-3, \cdots, n+1-2i, \cdots, -n+1)$$

とおく．$0 \le J \le n$ に対して，集合 $\Xi_J^{(n)}$ を

$$\Xi_J^{(n)} = \{\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \in \Lambda_n \mid \lambda_{n-J} > n-2J,\ n-2J > \lambda_{n-J+1}\}.$$

で定義する．(ただし，$J = n$ のときは $\lambda_{n-J} > n-2J$ という条件は省き，$J = 0$ のときは $n - 2J > \lambda_{n-J+1}$ という条件は省くものとする.) また，$\Xi^{(n)} = \bigcup_{J=0}^n \Xi_J^{(n)}$ とおいておく．各 $0 \le J \le n$ と $\mu \in \Xi_J^{(n)}$ に対して，次の性質を持つ G の離散系列表現 (Π, H_Π) が存在する：

(a) Π の無限小指標は $\mu - \rho_J + 2\rho_{[K]}$ で与えられる．

(b) $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_K(V_\lambda^{(n)}, H_{\Pi,K}) > 0$ であるとき，最高ウェイト $\lambda \in \Lambda_n$ は次のような形である：

$$\mu + \sum_{\alpha\in\Delta_J} m_\alpha \alpha \qquad (m_\alpha \in \mathbf{Z}_{\ge 0}).$$

また，$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_K(V_\mu^{(n)}, H_{\Pi,K}) = 1$ である．

このような離散系列表現 Π は同型を除いて唯 1 つであり，μ は Π の Blattner パラメーターと呼ばれる．今後，Blattner パラメーター μ の G の離散系列表現を (Π_μ, H_μ) と表記する．このとき，集合 $\{(\Pi_\mu, H_\mu) \mid \mu \in \Xi^{(n)}\}$ によって，G の離散系列表現の同値類は尽くされる事が知られている．また，$\mu \in \Xi_0^{(n)}$ である Π_μ は正則離散系列表現と呼ばれ，$\mu \in \Xi_J^{(n)}$ $(0 < J < n)$ である Π_μ は（Vogan 氏の論文 [Vo, Definition 6.1] の意味で）大きい離散系列表現と呼ばれる．

Blattner パラメーター $\mu = (\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n) \in \Xi_J^{(n)}$ の G の離散系列表現 Π_μ の反傾表現 $\Pi_\mu^\vee$ は Blattner パラメーター $\widehat{\mu} = (-\mu_n, -\mu_{n-1}, \cdots, -\mu_1) \in \Xi_{n-J}^{(n)}$ の G の離散系列表現である，すなわち，$\Pi_\mu^\vee \simeq \Pi_{\widehat{\mu}}$．よって，(3.1) を踏まえると，離散系列表現 Π_μ の行列係数の明示式は，各 $0 \le J \le n/2$ と $\mu \in \Xi_J^{(n)}$ に対して考えれば十分である事が分かる．

7 微分方程式

$\Pi = \Pi_\mu$ $(\mu \in \Xi_J^{(n)},\ 0 \le J \le n)$, $\lambda = \mu$ について，§5 のように ϕ をとる．つまり，2 つの単射 K-準同型写像 $\iota^\vee \colon V_\mu^{(n)\vee} \to H_{\mu,K}^\vee$ と $\iota \colon V_\mu^{(n)} \to H_{\mu,K}$ をとり，$\phi = \Phi_{\Pi_\mu} \circ (\iota^\vee \boxtimes \iota)$ とおく．ま

た，各 $\lambda \in \Lambda_n$ に対して，$V_\lambda^{(n)}$ の基底 $\{v_i^\lambda\}_{i\in I(\lambda)}$ をとって固定し，その双対基底を $\{v_i^{\lambda\vee}\}_{i\in I(\lambda)}$ とおく．この節では，$\mathfrak{p}_\mathbb{C}$ の元の作用から，G の離散系列表現 Π_μ の極小 K-タイプ $\tau_\mu^{(n)}$ における行列係数 $\phi(v_{i'}^{\mu\vee}\boxtimes v_i^\mu)$ $(i,i'\in I(\mu))$ がみたす微分方程式系を構成する方法を紹介する．この節で構成した微分方程式を解く事で，行列係数の明示式は与えられる．

$\mathfrak{p}_\mathbb{C}$ を随伴作用 Ad によって K-加群とみなすとき，$\mathfrak{p}_\mathbb{C}=\mathfrak{p}_+\oplus\mathfrak{p}_-$ は K-加群としての既約分解である．まず，$\mathfrak{p}_+$ の元の作用から微分方程式を構成しよう．テンソル積 $\mathfrak{p}_+\otimes_\mathbb{C} V_\mu^{(n)}$ の K-加群としての既約分解は次のようになる：

$$\mathfrak{p}_+\otimes_\mathbb{C} V_\mu^{(n)} \simeq \bigoplus_{\substack{1\le j\le n\\ \mu+e_j-e_{n+1}\in\Lambda_n}} V_{\mu+e_j-e_{n+1}}^{(n)}.$$

ここで，$\mu+e_j-e_{n+1}\in\Lambda_n$ となる $1\le j\le n$ に対して，(定数倍を除いて唯 1 つの) 単射 K-準同型写像 $I_j^+\colon V_{\mu+e_j-e_{n+1}}^{(n)}\to\mathfrak{p}_+\otimes_\mathbb{C} V_\mu^{(n)}$ による基底 $\{v_i^{\mu+e_j-e_{n+1}}\}_{i\in I(\mu+e_j-e_{n+1})}$ の像が

$$I_j^+(v_i^{\mu+e_j-e_{n+1}}) = \sum_{i_1\in I(\mu)} X_{+,i,i_1}^{(j)}\otimes v_{i_1}^\mu \qquad (X_{+,i,i_1}^{(j)}\in\mathfrak{p}_+)$$

という形に書き下されているとする．また，K-準同型写像 $\iota_\mathfrak{p}\colon\mathfrak{p}_\mathbb{C}\otimes_\mathbb{C} V_\mu^{(n)}\to H_{\mu,K}$ を

$$\iota_\mathfrak{p}(X\otimes v)=\Pi_\mu(X)\iota(v)$$

で定義しておく．ここで，$\iota_{\mathfrak{p},j}^+=\iota_\mathfrak{p}\circ I_j^+$ とおくと，

$$\iota_{\mathfrak{p},j}^+(v_i^{\mu+e_j-e_{n+1}}) = \iota_\mathfrak{p}\left(\sum_{i_1\in I(\mu)} X_{+,i,i_1}^{(j)}\otimes v_{i_1}^\mu\right) = \sum_{i_1\in I(\mu)}\Pi_\mu(X_{+,i,i_1}^{(j)})\iota(v_{i_1}^\mu)$$

となる．従って，$i'\in I(\mu)$ に対して，

$$\Phi_{\Pi_\mu}\left(\iota^\vee(v_{i'}^{\mu\vee})\boxtimes\iota_{\mathfrak{p},j}^+(v_i^{\mu+e_j-e_{n+1}})\right) = \sum_{i_1\in I(\mu)} R(X_{i,i_1}^{(+;j)})\phi(v_{i'}^{\mu\vee}\boxtimes v_{i_1}^\mu)$$

となる．一方，§6 で紹介した Π_μ の性質 (b) より，$n-J+1\le i\le n$ ならば，

$$\mathrm{Hom}_K(V_{\mu+e_j-e_{n+1}}^{(n)}, H_{\mu,K})=\{0\}$$

だから，$\iota_{\mathfrak{p},j}^+\colon V_{\mu+e_j-e_{n+1}}^{(n)}\to H_{\mu,K}$ は 0-写像である．従って，$\mu+e_j-e_{n+1}\in\Lambda_n$ となる $n-J+1\le j\le n$ に対して，

$$\sum_{i_1\in I(\mu)} R(X_{+,i,i_1}^{(j)})\phi(v_{i'}^{\mu\vee}\boxtimes v_{i_1}^\mu)=0 \qquad (i\in I(\mu+e_j-e_{n+1}),\ i'\in I(\mu)) \tag{7.1}$$

という等式が成立する．ここで，$R(X_{+,i,i_1}^{(j)})$ は微分作用素であるから，この等式は $\phi(v_{i'}^{\mu\vee}\boxtimes v_i^\mu)$ $(i,i'\in I(\mu))$ のみたす微分方程式となる．

同様にして，$\mathfrak{p}_-$ の作用からも微分方程式を構成できる．テンソル積 $\mathfrak{p}_- \otimes_{\mathbb{C}} V_\mu^{(n)}$ の K-加群としての既約分解は次のようになる：

$$\mathfrak{p}_- \otimes_{\mathbb{C}} V_\mu^{(n)} \simeq \bigoplus_{\substack{1\le j\le n \\ \mu-e_j+e_{n+1}\in\Lambda_n}} V^{(n)}_{\mu-e_j+e_{n+1}}.$$

$\mu - e_j + e_{n+1} \in \Lambda_n$ となる $1 \le j \le n-J$ に対して，(定数倍を除いて唯 1 つの) 単射 K-準同型写像 $I_j^- : V^{(n)}_{\mu-e_j+e_{n+1}} \to \mathfrak{p}_- \otimes_{\mathbb{C}} V_\mu^{(n)}$ が

$$I_j^-(v_i^{\mu-e_j+e_{n+1}}) = \sum_{i_1\in I(\mu)} X^{(j)}_{-,i,i_1} \otimes v^\mu_{i_1} \qquad (X^{(j)}_{-,i,i_1} \in \mathfrak{p}_-)$$

という形に書き下されているとき，

$$\sum_{i_1\in I(\mu)} R(X^{(j)}_{-,i,i_1})\phi(v_{i'}^{\mu\vee} \boxtimes v^\mu_{i_1}) = 0 \qquad (i \in I(\mu - e_j + e_{n+1}),\ i' \in I(\mu)) \tag{7.2}$$

という等式が成立する．

論文 [HKMO] では，$n = 2, 3$ の場合に，Gelfand-Tsetlin 基底を $\{v_i^\lambda\}_{i\in I(\lambda)}$ として用いて，$X^{(j)}_{\pm,i,i_1}$ を具体的に計算して微分方程式を立式した．Gelfand-Tsetlin 基底は $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}} \simeq \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ の作用が具体的に書き下されている基底であり，各 $\nu \in B(\lambda)$ に対して，$V^{(n)}_{\lambda,\nu} \cap \{v_i^\lambda\}_{i\in I(\lambda)}$ は $V^{(n)}_{\lambda,\nu}$ の基底になるという性質を持っている．これらを踏まえると，Gelfand-Tsetlin 基底 $\{v_i^\lambda\}_{i\in I(\lambda)}$ に対しての等式 (7.1) と (7.2) は，§5 で紹介した ν-成分 $\phi[\nu]$ $(\nu \in B(\lambda))$ の等式に容易に書き下す事ができる．例えば，$n = 3$, $J = 1$ の場合は次のようになる．

命題 7.1. 上の記法を用いる．$n = 3$, $J = 1$, $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3) \in \Xi_1^{(3)}$ のとき，ϕ の ν-成分 $\phi[\nu]$ $(\nu = (\nu_1, \nu_2) \in B(\lambda))$ は次の等式をみたす：

(i) $\mu_1 \ge \nu_1 \ge \mu_2 \ge \nu_2 > \mu_3$ のとき，

$$\begin{aligned}&\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{d}{dt} - (\mu_1+\mu_2+\mu_3-\nu_1-\nu_2)\frac{\mathrm{sh}(t)}{\mathrm{ch}(t)}\right) + (\mu_1+\mu_2-\nu_1-\nu_2+2)\frac{\mathrm{ch}(t)}{\mathrm{sh}(t)}\right\}\phi[\nu](\mathrm{a}[t]) \\ &- \frac{(\nu_1-\mu_2)(\mu_1-\nu_1+1)}{(\nu_1-\nu_2+1)}\frac{1}{\mathrm{sh}(t)}\phi[\nu-(1,0)](\mathrm{a}[t]) \\ &- \frac{(\mu_2-\nu_2+1)(\mu_1-\nu_2+2)}{(\nu_1-\nu_2+1)}\frac{1}{\mathrm{sh}(t)}\phi[\nu-(0,1)](\mathrm{a}[t]) = 0.\end{aligned}$$

(ii) $\mu_1 > \nu_1 \ge \mu_2 \ge \nu_2 \ge \mu_3$ のとき，

$$\begin{aligned}&\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{d}{dt} + (\mu_1+\mu_2+\mu_3-\nu_1-\nu_2)\frac{\mathrm{sh}(t)}{\mathrm{ch}(t)}\right) + (\nu_1-\mu_3+2)\frac{\mathrm{ch}(t)}{\mathrm{sh}(t)}\right\}\phi[\nu](\mathrm{a}[t]) \\ &- (\nu_1-\mu_3+2)\frac{1}{\mathrm{sh}(t)}\phi[\nu+(1,0)](\mathrm{a}[t]) = 0.\end{aligned}$$

(iii) $\mu_1 > \nu_1 \geq \mu_2 > \nu_2 \geq \mu_3$ のとき，

$$-\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{d}{dt}+(\mu_1+\mu_2+\mu_3-\nu_1-\nu_2)\frac{\mathrm{sh}(t)}{\mathrm{ch}(t)}\right)+(\nu_2-\mu_3+1)\frac{\mathrm{ch}(t)}{\mathrm{sh}(t)}\right\}\phi[\nu](\mathrm{a}[t])$$
$$+(\nu_2-\mu_3+1)\frac{1}{\mathrm{sh}(t)}\phi[\nu+(0,1)](\mathrm{a}[t])=0.$$

ここで，$\mathrm{ch}(t)=\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}$, $\mathrm{sh}(t)=\dfrac{e^t-e^{-t}}{2}$ とする．

命題 7.1 の微分方程式の解で $t=0$ で正則であるものは定数倍を除いて唯 1 つであり，この解が行列係数の ν-成分である．従って，この微分方程式を解く事によって，次節で紹介する ν-成分 $\phi[\nu]$ 達の明示式を求める事ができる．

8 主結果

$n \geq 2$ と仮定する．$\mu \in \Xi^{(n)}$ に対して，2 つの単射 K-準同型写像 $\iota_\mu^\vee\colon V_\mu^{(n)\vee} \to H_{\mu,K}^\vee$ と $\iota_\mu\colon V_\mu^{(n)} \to H_{\mu,K}$ を

$$\langle \iota_\mu^\vee(v^\vee), \iota_\mu(v)\rangle = \langle v^\vee, v\rangle \qquad (v^\vee \in V_\mu^{(n)\vee},\ v \in V_\mu^{(n)}) \tag{8.1}$$

となるようにとり，$\phi_\mu = \Phi_{\Pi_\mu}\circ(\iota_\mu^\vee \boxtimes \iota_\mu)$ とおく，すなわち，

$$\phi_\mu(v^\vee \boxtimes v)(g) = \langle \iota_\mu^\vee(v^\vee), \Pi_\mu(g)\iota_\mu(v)\rangle \qquad (g \in G,\ v^\vee \in V_\mu^{(n)\vee},\ v \in V_\mu^{(n)}).$$

$\nu \in B(\mu)$ に対して，ϕ_μ の ν-成分を $\phi_\mu[\nu]$ と書く事にする．このとき，正規化 (8.1) によって，

$$\phi_\mu[\nu](1_{n+1}) = 1 \qquad (\nu \in B(\mu)) \tag{8.2}$$

が成立する．

正則離散系列表現の行列係数の明示式は Bergman 核としてよく知られているが，ここで，我々の定式化の下ではどのように表示されるかを紹介しておこう．

命題 8.1. $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$, $\mu = (\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n) \in \Xi_0^{(n)}$ とおく．このとき，$\nu = (\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_{n-1}) \in B(\mu)$ に対して，

$$\phi_\mu[\nu](\mathrm{a}[t]) = \mathrm{ch}(t)^{-\mu_1-\mu_2-\cdots-\mu_n+\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_{n-1}}.$$

$n=2,3$ の場合に G の各離散系列表現の行列係数の明示式を与えるには，命題 8.1 と §6 での議論より，$\mu \in \Xi_1^{(n)}$ に対して，Π_μ の行列係数の明示式を与えれば十分である．$n=2$ の場合の明示式は以下のようになる．

定理 8.2. $n=2$, $\mu=(\mu_1,\mu_2)\in\Xi_1^{(2)}$ とおく．このとき，$\nu=\nu_1\in B(\mu)$ に対して，

$$\begin{aligned}\phi_\mu[\nu](\mathrm{a}[t]) &= \mathrm{ch}(t)^{-\mu_1-\mu_2+\nu}{}_2F_1\left(\begin{matrix}\nu-\mu_2+1,\ -\mu_2+1\\ \mu_1-\mu_2+2\end{matrix};1-\mathrm{ch}(t)^2\right)\\ &= \mathrm{ch}(t)^{\mu_1+\mu_2-\nu}{}_2F_1\left(\begin{matrix}\mu_1-\nu+1,\ \mu_1+1\\ \mu_1-\mu_2+2\end{matrix};1-\mathrm{ch}(t)^2\right).\end{aligned}$$

この $n=2$ の場合の結果については，同等の結果が都築正男氏の論文 [T, Theorem A.1.1] で既に述べられている事を講演後に森山友則氏から指摘して頂いた．$n=3$ の場合の明示式は次のようになる．

定理 8.3. $n=3$, $\mu=(\mu_1,\mu_2,\mu_3)\in\Xi_1^{(3)}$ とおく．このとき，$\nu=(\nu_1,\nu_2)\in B(\mu)$ に対して，

$$\phi_\mu[\nu](\mathrm{a}[t]) = \mathrm{ch}(t)^{-\mu_1-\mu_2-\mu_3+\nu_1+\nu_2}{}_3F_2\left(\begin{matrix}\nu_1-\mu_3+2,\ \nu_2-\mu_3+1,\ -\mu_3+2\\ \mu_1-\mu_3+3,\ \mu_2-\mu_3+2\end{matrix};1-\mathrm{ch}(t)^2\right).$$

また，定理 8.2 と定理 8.3 の明示式に Vidūnas 氏の論文 [Vi, Theorem 9.1] の結果を適用する事で，次の系が得られる．

系 8.4. $n=2,3$ とする．このとき，$\mu\in\Xi_1^{(n)}$, $\nu\in B(\mu)$ に対して，ある有理関数 $R_1(z)$ と $R_2(z)$ が存在して，

$$\phi_\mu[\nu](\mathrm{a}[t]) = R_1(\mathrm{ch}(t))\log(\mathrm{ch}(t)) + R_2(\mathrm{ch}(t)).$$

が成立する．

注意 8.5. 系 8.4 は $SU(2,1)$ と $SU(3,1)$ の大きい離散系列表現に対して，行列係数の漸近挙動を与えている．また，系 8.4 の有理関数 $R_1(z)$ と $R_2(z)$ は具体的に書き下す事ができる．詳しくは，[HKMO] を参照．

参考文献

[HKMO] Takahiro Hayata, Harutaka Koseki, Tadashi Miyazaki, and Takayuki Oda. Matrix coefficients of discrete series representations of $\mathrm{SU}(3,1)$. *preprint.*

[HKO] Takahiro Hayata, Harutaka Koseki, and Takayuki Oda. The matrix coefficients of the large discrete series of $\mathrm{SU}(3,1)$. **数理解析研究所考究録**, 1767:75–89, 2011.

[Ka1] Suehiro Kato. A dimension formula for a certain space of automorphic forms of $\mathrm{SU}(p,1)$. *Math. Ann.*, 266(4):457–477, 1984.

[Ka2] Suehiro Kato. A dimension formula for a certain space of automorphic forms of $\mathrm{SU}(p,1)$. II. The case of $\Gamma(N)$ with $N\geq 3$. *Tohoku Math. J. (2)*, 37(4):571–584, 1985.

[Ka3] Suehiro Kato. Correction: "A dimension formula for a certain space of automorphic forms of $\mathrm{SU}(p,1)$. II. The case of $\Gamma(N)$ with $N \geq 3$" [Tôhoku Math. J. (2) **37** (1985), no. 4, 571–584; MR0814083 (87d:11036)]. *Tohoku Math. J. (2)*, 38(4):643, 1986.

[Kn] Anthony W. Knapp. *Representation theory of semisimple groups.* Princeton Landmarks in Mathematics. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001. An overview based on examples, Reprint of the 1986 original.

[Ko] Harutaka Koseki. On a comparison of trace formulas for $\mathrm{GU}(1,2)$ and $\mathrm{GU}(3)$. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.*, 33(3):467–521, 1986.

[T] Masao Tsuzuki. Real Shintani functions and multiplicity free property for the symmetric pair $(\mathrm{SU}(2,1), \mathrm{S}(\mathrm{U}(1,1) \times \mathrm{U}(1)))$. *J. Math. Sci. Univ. Tokyo*, 4(3):663–727, 1997.

[Vi] Raimundas Vidūnas. Degenerate Gauss hypergeometric functions. *Kyushu J. Math.*, 61(1):109–135, 2007.

[Vo] David A. Vogan, Jr. Gel′fand-Kirillov dimension for Harish-Chandra modules. *Invent. Math.*, 48(1):75–98, 1978.

[Z] D. P. Zhelobenko. On Gel′fand-Zetlin bases for classical Lie algebras. In *Representations of Lie groups and Lie algebras (Budapest, 1971)*, pages 79–106. Akad. Kiadó, Budapest, 1985.