数理解析研究所講究録
第 1871 巻 2013 年 90-95

GL(2) の保型 L 関数の中心値の平均の漸近的な振る舞い

杉山 真吾
(SHINGO SUGIYAMA)

大阪大学大学院 理学研究科数学専攻
(DEPARTMENT OF MATHEMATICS, GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE, OSAKA UNIVERSITY)

1. Introduction

このノートでは, 自然数 N に対してレベル N の even カスプ Maass 形式 $f:\mathfrak{H}\to\mathbb{C}$ (ただし $\mathfrak{H}$ は Poincaré 上半平面) の標準保型 L 関数の中心値 $L(1/2,f)$ のレベルに関する平均の公式や, $L(1/2,f)$ の nonvanishing result への応用についてまとめる. 実は f を Hilbert 波動形式に置き換えても同様の結果が成り立つ. 実際, 中心値の公式は表現論の言葉を用いて記述できるので, 以下アデールを用いて述べる.

F を総実代数体とし $\mathfrak{o}_F$ をその整数環とする. $\mathbb{A}$ を F のアデール環とする. F のアルキメデス素点全体を Σ_∞, 非アルキメデス素点全体を Σ_{fin} と表す. $v\in\Sigma_{\mathrm{fin}}$ に対して F_v, $\mathfrak{o}_v$ をそれぞれ F, $\mathfrak{o}_F$ の v での完備化とする. $GL(2,F\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{R})$ の標準的な極大コンパクト部分群を $\mathbf{K}_\infty$ とする.

$\mathfrak{o}_F$ のイデアル $\mathfrak{n}$ に対して, 中心指標が自明な $GL(2,\mathbb{A})$ の既約カスプ保型表現 (π,V_π) で $V_\pi^{\mathbf{K}_\infty\mathbf{K}_0(\mathfrak{n})}\neq 0$ かつ π の導手 $\mathfrak{f}_\pi$ が $\mathfrak{f}_\pi=\mathfrak{n}$ となるもの全体を $\Pi(\mathfrak{n})$ とする. ここで $\mathbf{K}_0(\mathfrak{n})$ はレベル $\mathfrak{n}$ の Hecke 合同部分群である:

$$\mathbf{K}_0(\mathfrak{n}):=\prod_{v\in\Sigma_{\mathrm{fin}}}\mathbf{K}_0(\mathfrak{n}\mathfrak{o}_v),$$

$$\mathbf{K}_0(\mathfrak{n}\mathfrak{o}_v):=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in GL(2,\mathfrak{o}_v)\,\middle|\,c\equiv 0(\mathrm{mod}\ \mathfrak{n}\mathfrak{o}_v)\right\}.$$

ここで $\Pi(\mathfrak{n})$ は, $F=\mathbb{Q}$ の時レベル $\mathfrak{n}=N\mathbb{Z}$ の正規化された Hecke 固有カスプ even Maass new form に対応する集合であることに注意しておく.

さてこの時, 以下のようなレベルに関する保型 L 関数の中心値の平均を考える:

$$\frac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})}\sum_{\pi\in\Pi(\mathfrak{n})}\frac{L(1/2,\pi)L(1/2,\pi\otimes\eta)}{L(1,\pi;\mathrm{Ad})},$$

ここで N($\mathfrak{n}$) は $\mathfrak{n}$ の絶対ノルムであり, $L(s,\pi;\mathrm{Ad})$ は π の adjoint L 関数である.

2. Known results

Introduction で述べた形の中心値の平均は相対跡公式を用いて研究されており, 先行研究としては [2], [1], [5] がある. まず, Ramakrishnan, Rogawski [2] が考察した正則楕円モジュラー形式の場合の結果を復習する.

$k \geq 4$ を偶数とする. 素数 N に対して, $S_k^{\mathrm{new}}(N)$ を重さ k, レベル N の正則なカスプ new form の空間とする. $\varphi \in S_k^{\mathrm{new}}(N)$ に対し, 完備化された φ の標準保型 L 関数で s と $1-s$ に関する関数等式を満たすように正規化されたものを $L(s,\varphi)$ とする. $\mathscr{F}_k^{\mathrm{new}}(N)$ を, $S_k^{\mathrm{new}}(N)$ の直交基底で, 正規化された Hecke 固有形式から成るものとする.

η を導手 D の 2 次原始的 Dirichlet 指標で $\eta(-1)=-1$ となるものとし, $L_{\mathrm{fin}}(s,\eta)$ を η に付随する Dirichlet L 関数とする. D を割らない素数 p を 1 つ固定し,

$$J_{p,\eta} = \{N : prime \mid \gcd(p,N) = \gcd(D,N) = 1 \ and \ \eta(N) = -1\}$$

とおく. $a_p(\varphi)$ を φ の p 番目の Fourier 係数に $p^{-(k-1)/2}$ を掛けたものとする. Petersson 内積を

$$||\varphi||^2 = \int_{\Gamma_0(N)\backslash\mathfrak{H}} |\varphi(z)|^2 y^{k-2} dxdy.$$

と定める.

Theorem 1. [2, Theorem A]
任意の区間 $J \subset [-2,2]$ に対して,

$$\lim_{\substack{N\to\infty \\ N\in J_{p,\eta}}} \sum_{\substack{\varphi\in\mathscr{F}_k^{\mathrm{new}}(N), \\ a_p(\varphi)\in J}} \frac{L(1/2,\varphi)L(1/2,\varphi\otimes\eta)}{||\varphi||^2}$$
$$= 2^{k-1}\frac{\{(k/2-1)!\}^2}{\pi(k-2)!} L_{\mathrm{fin}}(1,\eta)\mu_p(J)$$

が成立する. ここで μ_p は

$$\mu_p(x) = \begin{cases} \dfrac{p-1}{(p^{1/2}+p^{-1/2}-x)^2}\ \mu_{ST}(x) & (\eta(p)=1), \\[2ex] \dfrac{p+1}{(p^{1/2}+p^{-1/2})^2-x^2}\ \mu_{ST}(x) & (\eta(p)=-1). \end{cases}$$

で定義される. ただし,$\mu_{ST}(x)$ は佐藤-Tate 測度 $(2\pi)^{-1}\sqrt{4-x^2}dx$ である.

Feigon, Whitehouse [1] は上記の結果を正則 Hilbert 保型形式の場合に一般化し, 都築 [5] は Hilber Maass 形式の場合に同様の公式を得た. しかし, Ramakrishnan, Rogawski[2] では素数レベルの場合を扱っており, Feigon, Whitehouse[1] と都築 [5] では square free レベルの場合を扱っている. そこで今回は一般のレベルの場合を調べるために, 都築 [5] を一般のレベルの Hilbert 波動形式の場合へ拡張することを考察する.

3. Main results

F の素点から成る有限集合 S で Σ_∞ を含むものを1つ固定する. $F^\times\backslash\mathbb{A}^\times$ の2次指標 $\eta=\prod_v \eta_v$ を, すべてのアルキメデス成分が自明で η の導手 $\mathfrak{f}_\eta$ が $S(\mathfrak{f}_\eta)\cap S=\emptyset$ を満たすものとする. ただし任意の $\mathfrak{o}_F$ のイデアル $\mathfrak{a}$ に対して, $\mathfrak{a}$ を割り切る非アルキメデス素点全体を $S(\mathfrak{a})$ とする.

$J_{S,\eta}$ を以下の3つの条件を満たす $\mathfrak{o}_F$ のイデアル $\mathfrak{n}$ 全体のなす集合とする:

(1) $S(\mathfrak{n})\cap S(\mathfrak{f}_\eta)=S(\mathfrak{n})\cap S=\emptyset$,
(2) 任意の $v\in S(\mathfrak{n})$ に対して $\eta_v(\varpi_v)=-1$,
(3) $\tilde{\eta}(\mathfrak{n}):=\prod_{v\in\Sigma_{\mathrm{fin}}}\eta_v(\varpi_v^{\mathrm{ord}_v(\mathfrak{a})})=1$.

ここで, ϖ_v は F_v の素元である.

$\mathfrak{n}\in J_{S,\eta}$ とする. この時 $\pi\in\Pi(\mathfrak{n})$ に対して, π の S でのスペクトルパラメーターを $\nu_S(\pi)$ とする. これは Hecke 作用素の固有値とラプラシアンの固有値をパラメトライズする定数であり, 以下のように定義される: π の各 v-成分 $\pi_v(v\in S)$ は $GL(2,F_v)$ のユニタリー化可能な球的主系列表現 $\pi(|\cdot|_v^{\nu_v/2},|\cdot|_v^{-\nu_v/2})$ に同型である. ここで ν_v は $v\in\Sigma_\infty$ なら $\nu_v\in\mathfrak{X}_v^+:=i\mathbb{R}_{\geq 0}\cup(0,1)$ であり, $v\in S_{\mathrm{fin}}=S\cap\Sigma_{\mathrm{fin}}$ なら $\nu_v\in\mathfrak{X}_v^+:=i[0,2\pi/\log q_v]\cup\{x+iy\mid 0<x<1, y\in\{0,2\pi/\log q_v\}\}$ となるように取れる (ただし q_v は $\mathfrak{o}_v/\mathfrak{p}_v$ の位数). しかも ν_v は π_v から一意的に定まるので $\nu_S(\pi)=(\nu_v)_{v\in S}$ と定める. $\mathfrak{X}_v^+$ 内の純虚数から成る部分は緩増加表現をパラメトライズしており, それ以外の部分は補系列表現をパラメトライズしていることに注意せよ.

最後に測度 μ を導入する. $\mathfrak{X}_v:=\mathfrak{X}_v^+\cap i\mathbb{R}$ 上の測度 μ_v を

$$d\mu_v(iy)=\frac{L(1/2,\pi(|\cdot|_v^{iy/2},|\cdot|_v^{-iy/2}))L(1/2,\pi(|\cdot|_v^{iy/2},|\cdot|_v^{-iy/2})\otimes\eta_v)}{L(1,\eta_v)}$$
$$\times\begin{cases}\dfrac{1}{4\pi}|\Gamma(iy/2)|^{-2}dy & (v\in\Sigma_\infty),\\[2mm] \dfrac{\log q_v}{4\pi}|1-q_v^{-iy}|^2dy & (v\in S_{\mathrm{fin}})\end{cases}$$

と定める. この μ_v は $F=\mathbb{Q}$, $v=p<\infty$ の時に $x=p^{iy/2}+p^{-iy/2}$ という変数変換をすることにより $\mu_v(iy)=\mu_p(x)$ となり, Ramakrishnan, Rogawski の結果に現れた測度と同じものになっている. この時, $\mathfrak{X}_S:=$

$\prod_{v\in S}\mathfrak{X}_v$ 上の測度 μ を $\mu = 4D_F^{3/2}L(1,\eta)\bigotimes_{v\in S}\mu_v$ と定める. ここで D_F は F の判別式の絶対値である. 以上の準備のもとで, 以下の漸近公式を得る.

Theorem 2. [4]
Λ を X の任意の無限部分集合とする. 各 $v\in S$ に対して任意の区間 $J_v\subset\mathfrak{X}_v$ を取る時, 以下の公式が成り立つ.

$$\lim_{\substack{\mathrm{N}(\mathfrak{n})\to\infty\\ \mathfrak{n}\in\Lambda}}\frac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})}\sum_{\substack{\pi\in\Pi(\mathfrak{n}),\\ \nu_S(\pi)\in\mathbf{J}}}\frac{L(1/2,\pi)L(1/2,\pi\otimes\eta)}{L^{S_\pi}(1,\pi;\mathrm{Ad})}=\mathrm{vol}(\mathbf{J},\mu).$$

ただし $\mathbf{J}=\prod_{v\in S}J_v$ とおいた.

この漸近公式を応用すると, 中心値の nonvanishing に関する以下のような結果が得られる.

Theorem 3. [4]
Λ を X の任意の無限部分集合とする. 各 $v\in\Sigma_\infty$ に対し, 区間 $[\alpha_v,\beta_v]\subset[1/4,\infty)$ を任意に取り, 各 $v\in S_{\mathrm{fin}}$ に対し, 区間 $[\alpha_v,\beta_v]\subset[-2,2]$ を任意に取る. この時, 任意の $R>0$ に対して, $\mathrm{N}(\mathfrak{n})>R$ となる $\mathfrak{n}\in\Lambda$ と $\pi\in\Pi(\mathfrak{n})$ が存在して, 次が成り立つ.

(1) $L(1/2,\pi)\neq 0$ かつ $L(1/2,\pi\otimes\eta)\neq 0$.
(2) $\nu_S(\pi)=(\nu_v)_{v\in S}$ と書く時, $v\in\Sigma_\infty$ に対して $(1-\nu_v^2)/4\in[\alpha_v,\beta_v]$ を満たし, 任意の $v\in S_{\mathrm{fin}}$ に対して $q_v^{-\nu_v/2}+q_v^{\nu_v/2}\in[\alpha_v,\beta_v]$ を満たす.

上記の中で無限集合 Λ を任意に取っている. ここで Λ が任意に取れることの重要性を説明するために次の例を見てみる. 簡単のため $F=\mathbb{Q}$ の場合を考えてみる.

Example 4. $S=\{\infty,p_1,\ldots,p_n\}$ とする. $p\notin S\cup S(\mathfrak{f}_\eta)$, $\eta_p(p)=-1$ を満たす素数 p を 1 つ取っておく. この時任意の $R>0$ に対して, 自然数 $m>R$ と 正規化された *Hecke* 固有カスプ *even Maass new form* f が存在して, 次が成り立つ.

(1) f のレベルは p^{2m}.
(2) $L(1/2,f)\neq 0$ かつ $L(1/2,f\otimes\eta)\neq 0$.
(3) f のラプラシアン固有値 $\lambda(f)$ が $\lambda(f)\in[\alpha_\infty,\beta_\infty]$ を満たす. また任意の $j\in 1,\ldots,n$ に対して f の p_j 番目の *Fourier* 係数 $a_{p_j}(f)$ が $a_{p_j}(f)\in[\alpha_j,\beta_j]$ を満たす.

上の例は $\Lambda=\{\mathfrak{n}=p^{2m}\mathbb{Z}\mid m\in\mathbb{N}\}$ とおいて Theorem 3 を使えば得られる. 要するに Λ を任意に取ってよいということは, 中心値が消えないような保型表現のレベルの素イデアル分解の形を, ある程度指定できるということである.

主結果に現れるΛの例は他にもたくさんある．構成法は以下の通りである．$v \in \Sigma_{\mathrm{fin}} - (S \cup S(\mathfrak{f}_\eta))$で$\eta_v(\varpi_v) = -1$を満たすもの全体の集合を$\{v_j\}_{j\in\mathbb{N}}$とする (実際, Chebotarev の密度定理より無限集合であるので自然数で添え字付けができる事に注意せよ)．そして$\{\mathfrak{p}_j\}_{j\in\mathbb{N}}$を$\{v_j\}_{j\in\mathbb{N}}$に対応する$\mathfrak{o}_F$の極大イデアルの族とする．$\Lambda$の例として以下のものが挙げられる:

- $\Lambda = \{\mathfrak{n} = \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_{2n} \mid n \in \mathbb{N}\}$,
- $\Lambda = \{\mathfrak{n} = \mathfrak{p}_1^{2n} \mid n \in \mathbb{N}\}$,
- $\Lambda = \{\mathfrak{n} = \mathfrak{p}_n^{2a} \mid n \in \mathbb{N}\}$ (aは固定された自然数)
- $\Lambda = \{\mathfrak{n} = \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2^3\mathfrak{p}_3^n\mathfrak{p}_4^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

最初の場合は square free の場合であり [5] の中で考察されているが, 他の場合はすべて今回得られたものである．また$\{\mathfrak{p}_j\}_{j\in\mathbb{N}}$を用いれば上記以外にも沢山の例を構成することができる．

4. Sketch of the proof

今回得られた漸近公式は相対跡公式を用いて証明される．本当は積分の発散に注意する必要があり計算は複雑であるが, 大雑把に述べると以下の通りである．

$\mathfrak{X}_S$上のテスト関数αを取る．この時, 任意のイデアル$\mathfrak{n}$に付随する保型 Green 関数$\Psi_{\mathfrak{n},\alpha} : GL(2,F)\backslash GL(2,\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$を定義することができる．この保型 Green 関数はスペクトル分解による表示と両側剰余類分解による表示の２つをもつので, $PGL(2,\mathbb{A})$の極大分裂トーラス上の積分を２通りの表示に対して計算することによって, 以下の相対跡公式が得られる:

$$C(\mathfrak{n},S)\{\mathbb{I}^\eta_{\mathrm{cus}}(\mathfrak{n}|\alpha) + \mathbb{I}^\eta_{\mathrm{eis}}(\mathfrak{n}|\alpha) + \mathbb{D}^\eta(\mathfrak{n}|\alpha)\} = \mathbb{J}^\eta_{\mathrm{u}}(\mathfrak{n}|\alpha) + \mathbb{J}^\eta_{\mathrm{hyp}}(\mathfrak{n}|\alpha)$$

ここで$C(\mathfrak{n},S) = (-1)^{\#S} D_F^{-1/2}[\mathbf{K}_0(\mathfrak{o}_F), \mathbf{K}_0(\mathfrak{n})]^{-1}$であり,

$$\mathbb{I}^\eta_{\mathrm{cus}}(\mathfrak{n}|\alpha) := \sum_{\varphi\in\mathscr{B}_{\mathrm{cus}}(\mathfrak{n})} \alpha(\nu_{\varphi,S})\overline{P^{\mathbf{1}}(\varphi)}P^\eta(\varphi)$$

とおいた．ただし$\mathscr{B}_{\mathrm{cus}}(\mathfrak{n})$は$L^2_{\mathrm{cusp}}(Z(\mathbb{A})GL(2,F)\backslash GL(2,\mathbb{A}))^{\mathbf{K}_\infty\mathbf{K}_0(\mathfrak{n})}$の正規直交基底, $\nu_{\varphi,S}$はφのSでの“スペクトルパラメーター”であり, $P^\eta(\varphi)$はカスプ形式φのトーラスに沿ったη-周期積分である (明示式は [3] で与えられている)．$\mathbb{I}^\eta_{\mathrm{eis}}(\mathfrak{n}|\alpha)$, $\mathbb{D}^\eta(\mathfrak{n}|\alpha)$はそれぞれ連続スペクトルと留数スペクトルから生じる項である ([4] を参照)．$\mathbb{J}^\eta_{\mathrm{u}}(\mathfrak{n}|\alpha)$と$\mathbb{J}^\eta_{\mathrm{hyp}}(\mathfrak{n}|\alpha)$は Green 関数の積分から生じる項である ([4] を参照)．

この相対跡公式を変形すると,

$$C(\mathfrak{n},S)\mathbb{I}^\eta_{\mathrm{cus}}(\mathfrak{n}|\alpha) - \mathbb{J}^\eta_{\mathrm{u}}(\mathfrak{n}|\alpha) = \mathbb{J}^\eta_{\mathrm{hyp}}(\mathfrak{n}|\alpha) - C(\mathfrak{n},S)\{\mathbb{I}^\eta_{\mathrm{eis}}(\mathfrak{n}|\alpha) + \mathbb{D}^\eta(\mathfrak{n}|\alpha)\}$$

となる．ここで$\delta > 0$が存在して，

$$|\mathbb{J}^{\eta}_{\mathrm{hyp}}(\mathfrak{n}|\alpha)| \ll \mathrm{N}(\mathfrak{n})^{-\delta},$$
$$|C(\mathfrak{n}, S)\mathbb{I}^{\eta}_{\mathrm{eis}}(\mathfrak{n}|\alpha)| \ll \mathrm{N}(\mathfrak{n})^{-\delta},$$
$$|C(\mathfrak{n}, S)\mathbb{D}^{\eta}(\mathfrak{n}|\alpha)| \ll \mathrm{N}(\mathfrak{n})^{-1+\delta}$$

という評価が成り立つので, $\mathrm{N}(\mathfrak{n}) \to \infty$としてやることで主定理を得ることができる．実際, $C(\mathfrak{n}, S)\mathbb{I}^{\eta}_{\mathrm{cus}}(\mathfrak{n}|\alpha)$は$L$関数の中心値のレベルに関する平均になっており, $\mathbb{J}^{\eta}_{\mathrm{u}}(\mathfrak{n}|\alpha)$は佐藤-Tate測度から得られる測度に関して$\alpha$を積分したものになっている．証明の詳細は [4] を参照せよ．

最後にレベルを一般化する上で生じた困難について少し言及する．保型表現の導手がsquare freeの場合は非アルキメデス局所成分に現れる表現は不分岐主系列表現または不分岐誘導表現の部分表現（Steinberg表現を不分岐指標$F_v^{\times} \to \{\pm 1\}$で捻ったもの）になるので, 計算の上で球的Whittaker関数を使えば十分であった．しかし保型表現の導手が一般の場合は局所成分に現れる表現は決定されない．そこでlocal new formに着目してみると, これはadmissible表現に対して定数倍を除いて一意的に決定されるので, local new formを用いて相対跡公式を計算するに至った．この際new formだけでなくold formもすべて組み込んで計算する必要がある．old formの明示的構成は [3] を参照せよ．

5. Acknowledgements

今回講演の機会と報告集執筆の機会を与えて下さった世話人の市野篤史先生, 石井卓先生にはこの場を借りて大変感謝致します．

References

[1] B. Feigon, D. Whitehouse, *Averages of central L-values of Hilbert modular forms with an application to subconvexity*, Duke. Math. J., **149**, 347–410, 2009.

[2] D. Ramakrishnan, J. Rogawski, *Average values of modular L-series via the relative trace formula*, Pure and Appl. Math. Q. **1** No.4, 701–735, 2005.

[3] S. Sugiyama, *Regularized periods of automorphic forms on GL(2)*, to appear in Tohoku Math. J.

[4] S. Sugiyama, *Asymptotic behaviors of means of central values of automorphic L-functions for GL(2)*, preprint.

[5] M. Tsuzuki, *Spectral means of central values of automorphic L-functions for GL(2)*, preprint.

Department of Mathematics, Graduate School of Science, Osaka University, Toyonaka, Osaka 560-0043, Japan

E-mail address: s-sugiyama@cr.math.sci.osaka-u.ac.jp