数理解析研究所講究録
第 1873 巻 2014 年 7-11

自由バーンサイド半群について

島根大学大学院総合理工学研究科　遠藤篤
Atsushi Endo
Interdisciplinary Graduate Shcool of Science and Engineering,
Shimane University

1 Introduction

A を有限 alphabet の集合、A^* を A 上の全ての word の集合とする。このとき、自然数 $m,\ n$ に対して $\mathbb{B}(A,m,n)=\langle A|T^m=T^{m+n},\ \forall T\in A^*\rangle$ を自由バーンサイド半群という。

本稿では、$m\geq 3,\ n\geq 1$ における自由バーンサイド半群に対する word problem の decidability について述べる。そのために、次の定理を考える。

Theorem 1.1. $m\geq 3,\ n\geq 1$ とする。このとき、$\mathbb{B}(A,m,n)$ に対する word problem は decidable である。つまり、A 上の二つの word が $\mathbb{B}(A,m,n)$ において等しいかどうかを決定する algorithm が存在する。

2 Inductive Definitions

はじめに、k に関する 5 つの定義を帰納的に与える。

Definition 2.1. (period of rank k)
以下を満たすとき、T を rank k の period であるという。
(i) T は simple である。
(ii) $|T|=k$
(iii) T^3 は、任意の reducible l-periodic subword を含まない ($l<k$)。

Definition 2.2. (long k-periodic)
W が long k-periodic であるとは、以下の条件を満たす $X,\ Y$ と、rank k の period T が存在することである。
(i) XWY は T-periodic である。
(ii) $XW(WY)$ は W の left(right) $(k-1)$-extension である。
(iii) $|XWY|\geq|T^m|$
(iv) $|W|>|T|$

Definition 2.3. (reducible k-periodic)
W が reducible k-periodic であるとは、以下の条件を満たす rank k の period T が存在することである。
(i) W は T-periodic である。
(ii) $W = W_1W_2$ ($|W_1| = |T^n|$ かつ、W_2 は long k-periodic である。)

Definition 2.4. (immediate k-extension)
YX が X の immediate left k-extension であるとは、以下の条件を満たす Z, W が存在することである。
(i) $X = WZ$
(ii) W は long k-periodic である。
(iii) YW は k-periodic である。

Definition 2.5. (k-extension)
YX が X の left k-extension であるとは、以下の条件を満たす $V_1, \ldots, V_{k+1}$ が存在することである。
(i) $V_{k+1} = X$
(ii) $V_1 = YX$
(iii) 任意の $j \in \{1, \ldots, k\}$ に対して、$V_j = V_{j+1}$ または、V_j は V_{j+1} の immediate left j-extension である。

さらに、もう1つ重要な定義を与える。

Definition 2.6. (equal on the rank k)
X と Y が rank k において等しいとは、$\mathbb{B}_k(A, m, n) = \langle A | T^m = T^{m+n}, T$ は rank k 以下の任意の period$\rangle$ で与えられるモノイドにおいて、X と Y が等しいことである。

3 A Reduced Form of the Word

ここでは、任意の X に対して、X の k-reduced form の定義を与える。

X の k-reduced form な word を、$k \geq 0$ において帰納的に定義する。

X の 0-reduced form は X とする。

$k > 0$ とする。Y を X の $(k-1)$-reduced form とする。ここから、Y における rank k に関する削除の過程を述べる。この削除の結果として、X の k-reduced form を得る。

Σ を Y の maximal k-periodic かつ k-reduced な subwod 全体の集合とする。

Σ が empty のとき、Y は X の k-reduced form であるとする。

Σ を nonempty とする。Σ の任意の異なる word は、長さ k 以上の common part を持たない。

$P \subset \Sigma$ とする。P の beginning Q に、次の性質を与える。
(i)$|Q| = |T^{ns}| (s > 0)$
(ii)$P = QR$ (R は long k-periodic)
(iii)Q は最大の長さを持つ。

k-reducible の定義より、任意の $P \subset \Sigma$ に対して、この Q は存在する。この Q を marked word と呼ぶ。
任意の二つの marked word は disjoint であることを示す。そうでなければ、marked part が not disjoint であり、それぞれが T-, S-periodic な異なる二つの word が Σ に存在すると仮定する。Σ の任意の word は、Σ の他の word に含まれないので、period T の word は、period S の word の左側から始まるとする。最初の word の marked part Q は、次の word と重なる。また、最初の word は QR に等しい (R は long k-periodic)。よって、$|R| > k$ なので、次の word は R を含み、二つの word は k より長い common part を持つ。これは矛盾するので、任意の二つの marked word は disjoint である。

ここで、左から順に Y から全ての marked word を取り除くことで、X の k-reduced form を得る。

Lemma 3.1. 任意の X の k-reduced form を Y とすると、$X \stackrel{k}{=} Y$ である。

Lemma 3.2. 長さ k の任意の X に対して、次が成り立つような rank l $(\leq k)$ の period T、word B, C, 整数 $d > 0$ が存在する。

$$\forall j \geq 2,\ X^j \stackrel{k-1}{=} BT^{dj}C$$

Lemma 3.3. $|X| = k$ ならば $X^m \stackrel{k}{=} X^{m+n}$ である。

Lemma 3.4. 次は同値である。
(a) $X \stackrel{k}{=} Y$
(b) X と Y の k-reduced form は等しい。

4 Inductive Lemmas

ここでは、Lemma 4.1 から Lemma 4.10 を rank k に関する連立帰納法で示す。

Lemma 4.1. T を rank k の period、W を T-periodic、XWY を T-periodic、$XW(WY)$ を W の left(right) $(k-1)$-extension とする。このとき、以下が成り立つ。
(a) $|X| < |T|,\ |Y| < |T|$
(b) $|XWY| \geq |T^m|$ ならば $|W| > |T^{m-2}|$ である。

Definition 4.1. (sufficient T-periodic)
T を rank k の period、W を T-periodic とする。このとき、W が sufficient T-periodic であるとは、WC が long T-periodic ($|C| \leq |T|$) となる C が存在することである。

Lemma 4.2. W を long (sufficient) T-periodic、$W = XYZ$、Y を long l-periodic、XY を l-periodic $(l < k)$ とする。このとき、YZ も long (sufficient) T-periodic である。

Lemma 4.3. W を long k-periodic、V を W の beginning とする。このとき、V が long l-periodic ($l < k$) ならば、$|V| < |W| - k$ である。
ゆえに、W の period T による、V の right shift V^+ が存在して、この V^+ は W に完全に含まれる。

Lemma 4.4. W を long k-periodic とする。このとき、$l < k$ ならば W は l-periodic でない。

Lemma 4.5.
(a) XW を W の left k-extension、V を XW の long k-periodic subword (V は W に含まれない) とする。このとき、W は long k-periodic subword U で始まり、U と V は k-agreed である。
(b) XW を W の left l-extension (W は long l-periodic, $l \leq k$) とする。このとき、XW が long s-periodic subword V を含む ($s \leq k$) ならば、$s \leq l$ である。

Definition 4.2. (basic subword)
T を simple、W を T-periodic とする。このとき、W が T^∞ における basic subword であるとは、T の power における shift を法とした、T^∞ における unique な subword W が存在するということである。(つまり、任意の T-periodic word X に対して、$X = BWC = DWE$ ならば、$|T|$ は $|B| - |D|$ を割り切る。)
　また、W が T-periodic、$|W| \geq |T|$ ならば、W は T^∞ における basic subword である。

Lemma 4.6. W が sufficient T-periodic ならば、W は T^∞ における basic subword である。

Lemma 4.7. W を long k-periodic、XW を W の left k-extension とする。このとき、rank l ($\leq k$) の period U に対して、XW が long l-periodic U' を含むならば、W も long U-periodic を含む。

Lemma 4.8. T を rank k の period、W を sufficient T-periodic とする。このとき、T^∞ が long U-periodic subword を含み、$|U| < k$ ならば、W は U-periodic でない。

Lemma 4.9. T を rank k の period、W を T-periodic かつ long l-periodic ($l \leq k$) とする。このとき、XW が W の left l-extension であり、sufficient T-periodic subword V を含むならば $l = k$ であり、subword V, W は k-agreed である。

Lemma 4.10. W を long k-periodic、$XW(WY)$ を W の left(right) k-extension とする。このとき、XWY は simple word S の 2 乗にならない ($|S| > k$)。

　これらの Lemma を用いることで、Theorem 1.1 は示される。

References

[1] J. McCammond, The solution to the word problem for the relatively free semigroups satisfying $T^a = T^{a+b}$ with $a \geq 6$, *Internat. J. Algebra and Comput.(1)*,**1**(1991),1-32.

[2] A. de Luca and S. Varricchio, One non counting regular classes, *Proc. of the 17 ICALP Int. Symp.,ed. M. S. Paterson,Lecture Notes in Comp. Sci.*, **443**,Springer Verlag,(1990),74-87.

[3] V.S.Guba, The word problem for the relatively free Burnside semigroup satisfying $T^m = T^{m+n}$ with $m \geq 4$ or $m = 3, n = 1$, *Internat. J. Algebra and Comput*,**2**(1993),125-140.

[4] V.S.Guba, The word problem for the relatively free Burnside semigroup satisfying $T^m = T^{m+n}$ with $m \geq 3$, *Intarnat. J. Algebra and Comput*,**3**(1993),335-347.

[5] V.S.Guba, Some properties of periodic words, *Mathematical Notes*,**3**(2002),301-307.