数理解析研究所講究録
第 1874 巻 2014 年 125-134

自己相反多項式の零点と微分方程式

東京工業大学 大学院理工学研究科 数学専攻　鈴木正俊 (Suzuki, Masatoshi)
Department of Mathematics, Tokyo Institute of Technology

1. はじめに

RIMS 研究集会で発表した内容は, 直接的には講究録 [11] の続きで, 主要な結果は既に [12] にまとめてある. それを書き終えたのは研究集会からひと月ほど経った頃だった. その後にわかに新しい結果が得られて, [12] の主定理の記述を大幅に簡略化する事が可能になったので, 結果だけは証明抜きで [13] にアップした.

さて, [11] でも少し述べたが, このような研究を行うに至った動機は, Riemann ゼータ関数や Dirichlet L 関数などの数論的なゼータ・L 関数に対して, ある種の正準系 [1] (canonical system) を対応させる試み ([8, 9, 10]) にあった. したがって当然 [12] の結果をこれに応用したくなるのだが, 研究集会で発表したような結果 (つまり [12] のような結果) だと, [11] の末尾にある様な数値実験的な応用以外はなかなか難しい. そういった状況を打開するため, [12] で帰納的に構成した量に単純な閉じた式を与える事を試みた. そうして得られたのが [13] の結果である. 現時点 (2013 年 3 月) では [13] はアナウンスに過ぎないが, 後に詳しい証明などを追加する.

とはいえ, [13] で [8, 9, 10] などとの繋がりを述べるつもりはない. そこでこの小論では, そういった事柄を [11] から [13] へ至る経緯なども交えて述べる事とした. こういった内容は論文などには書きづらいが, 講究録の記事としては悪くないと思う [2].

2. 自己相反多項式に関する結果

まず [13] の結果を述べる所から始める.

定義 1. 実数係数の多項式 $P(x)$ が自己相反多項式 (self-reciprocal polynomial) であるとは, $P(x) = x^n P(1/x)$ $(n = \deg P)$ が成り立つ事を言う. これは

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i\, x^{n-i} \quad (c_0 \neq 0)$$

であるとき, 任意の $0 \leqslant i \leqslant n$ について $c_i = c_{n-i}$ が成り立つ事と同値である.

自己相反多項式の根は単位円周上にあるか, 単位円周に対して対称に分布している. 我々は全ての根が単位円周上にあるような自己相反多項式を, 係数に関する条件によって特徴付けることを考える. 既存の結果や多項式の根に関する一般論については, [12, 13] やこれらの参考文献を見て頂きたい.

---

[1] 著者の無知により [11] では “canonical system” が “標準系” と標記されているが, これは正準系と書くべきだった.

[2] 「講究録作成上の注意」には「萌芽的アイディアの紹介, 未解決問題の提起, 意味ありと思われる失敗の報告, 理論の背景にある哲学あるいは実験結果, 将来の展望等, その形態の故に, 一般の (数理科学の) 学術誌への投稿になじまないものも (研究代表者が学術的価値ありと判断する限り) 歓迎します. 」とある.

以下では偶数次の自己相反多項式のみを考える事とし, $2g$ 次の自己相反多項式を $P_g(x)$ で表す. $2g$ 次の自己相反多項式は

$$P_g(x) = \sum_{k=0}^{g-1} c_k(x^{2g-k} + x^k) + c_g x^g \quad (c_0 \neq 0,\ c_i \in \mathbb{R},\ 0 \leqslant i \leqslant g)$$

と表せるので, これと $(g+1)$ 次元ベクトル

$$\underline{c} = (c_0, c_1, \cdots, c_g) \in \mathbb{R}^{g+1} \quad (c_0 \neq 0)$$

を同一視する. 根を考えるときには $c_0 = 1$ の場合のみを扱えば十分だが, 記法上の都合で $c_0 = 1$ は仮定しない.

ここで $q > 1$ を任意に固定し, $\underline{c} = (c_0, c_1, \cdots, c_g) \in \mathbb{R}^{g+1}$ $(c_0 \neq 0)$ に対して

$$E_q^{\pm}(\underline{c}) := \begin{bmatrix} c_0(1 \pm \log q^g) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ c_1(1 \pm \log q^{g-1}) & c_0(1 + \log q^g) & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ c_1(1 \mp \log q^{g-1}) & c_2(1 \mp \log q^{g-2}) & \ddots & c_0(1 \pm \log q^g) & 0 \\ c_0(1 \mp \log q^g) & c_1(1 \mp \log q^{g-1}) & \cdots & c_1(1 \pm \log q^{g-1}) & c_0(1 \pm \log q^g) \end{bmatrix}$$

と定める (復号同順). これは $(2g+1) \times (2g+1)$ の下三角行列である. さらに各 $1 \leqslant n \leqslant 2g$ に対して $(2g+1) \times (2g+1)$ 行列 J_n を

$$J_n := \left[\begin{array}{c|c} j_n & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right], \quad j_n := \begin{bmatrix} & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & \end{bmatrix}$$

で定める. ここで j_n は $n \times n$ の反対角行列である. これらを用いて

$$\Delta_n(\underline{c}) := \frac{\det(E_q^+(\underline{c}) + E_q^-(\underline{c})J_n)}{\det(E_q^+(\underline{c}) - E_q^-(\underline{c})J_n)} \times \begin{cases} 1 & n\text{ が偶数のとき}, \\ g \log q & n\text{ が奇数のとき} \end{cases}$$

と定義すると, 次が成り立つ.

補題 1. $(\Delta_1(\underline{c}), \cdots, \Delta_{2g}(\underline{c}))$ は $q > 1$ によらない. 但し, $\det(E_q^+(\underline{c}) - E_q^-(\underline{c})J_n) = 0$ のときは $\Delta_n(\underline{c}) = \infty$ とみなす.

定理 1. $\underline{c} = (c_0, c_1, \cdots, c_g) \in \mathbb{R}^{g+1}$ $(c_0 \neq 0)$ から定まる自己相反多項式

$$P_g(x) = \sum_{k=0}^{g-1} c_k(x^{2g-k} + x^k) + c_g x^g$$

の根が全て単位円周上にあり, しかも単根であるためには, 全ての $1 \leqslant n \leqslant 2g$ に対して

$$0 < \Delta_n(\underline{c}) \neq \infty$$

が成り立つことが必要十分である.

上記の定義を若干変更する事で, $P_g(x)$ の根は全て単位円周上にあるが単根とは限らない場合の必要十分条件を述べる事もできる. それには $q>1$, $\omega>0$ に対して

$$E^{\pm}_{q,\omega}(\underline{c}) := \begin{bmatrix} c_0\,q^{\pm g\omega} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ c_1\,q^{\pm(g-1)\omega} & c_0\,q^{\pm g\omega} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ c_1\,q^{\mp(g-1)\omega} & c_2\,q^{\mp(g-2)\omega} & \ddots & c_0\,q^{\pm g\omega} & 0 \\ c_0\,q^{\mp g\omega} & c_1\,q^{\mp(g-1)\omega} & \cdots & c_1\,q^{\pm(g-1)\omega} & c_0\,q^{\pm g\omega} \end{bmatrix},$$

$$\Delta_n(\underline{c}\,;q^\omega) := \frac{\det(E^{+}_{q,\omega}(\underline{c}) + E^{-}_{q,\omega}(\underline{c})J_n)}{\det(E^{+}_{q,\omega}(\underline{c}) - E^{-}_{q,\omega}(\underline{c})J_n)} \times \begin{cases} 1 & n\text{が偶数のとき}, \\ \dfrac{q^{g\omega}-q^{-g\omega}}{q^{g\omega}+q^{-g\omega}} & n\text{が奇数のとき}. \end{cases}$$

と定義すればよい. このとき次が成り立つ.

定理 2. $q>1$ を任意に固定する. $\underline{c}=(c_0,c_1,\cdots,c_g)\in\mathbb{R}^{g+1}$ $(c_0\neq 0)$ から定まる自己相反多項式 $P_g(x)=\sum_{k=0}^{g-1}c_k(x^{2g-k}+x^k)+c_gx^g$ の根が全て単位円周上にあるためには, 全ての $1\leqslant n\leqslant 2g$, $\omega>0$ に対して

$$0<\Delta_n(\underline{c}\,;q^\omega)\neq\infty$$

が成り立つことが必要十分である. この条件は $q>1$ の選び方によらない.

各 $\Delta_n(\underline{c}\,;q^\omega)$ は $\underline{c}$ の成分と q^ω の $\mathbb{Q}$ 上の有理式で, $\Delta_n(\underline{c})$ と次のように関係する.

定理 3. $\underline{c}=(c_1,\cdots,c_g)$ の有理式として

$$\lim_{q^\omega\to 1^+}\Delta_n(\underline{c}\,;q^\omega)=\Delta_n(\underline{c})$$

が各 $1\leqslant n\leqslant 2g$ について成り立つ.

定理 1–3 は [12] で帰納的に構成した量 $R_n(\underline{c})$, $R_n(\underline{c};q^\omega)$ がそれぞれ $\Delta_n(\underline{c})$, $\Delta_n(\underline{c};q^\omega)$ に一致するという結果から従う. したがって $\Delta_n(\underline{c})$ などの符号と $P_g(x)$ の根の分布が関係する仕組みは [12] と同一で, それはある種の正準系の理論に基づく.

多項式の係数を用いた必要十分条件としては, 定理 1 はかなり単純な部類に属すと思われるので, 「全ての根が単位円周上にあるような自己相反多項式を係数によって特徴付ける」という問題はこれで一区切りついたと言える.

以下では, ゼータ関数に関する考察 [8, 9, 10] が定理 1 の導出に関わってきた経緯などについて述べる.

3. ゼータ関数と自己相反多項式

有限体上の種数 g の非特異射影代数曲線のゼータ関数の分子は, 適当な変数変換によって $2g$ 次の自己相反多項式になるので, この意味で自己相反多項式はゼータ関数に関係している. しかしこの節で述べるのは, Riemann ゼータ関数などの大域的なゼータ関数と自己相反多項式との関連である.

3.1. **起.** まず [10] の概略を述べよう. $\zeta(s)$ を Riemann ゼータ関数とし,

$$\xi(s) = \frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-s}\Gamma(s/2)\zeta(s)$$

とする. このとき $\omega > 1/2$ を一つ固定するごとに, 整関数 $E^{\omega}(z) := \xi(\frac{1}{2}+\omega-iz)$ から de Branges 空間 $B(E^{\omega})$ が定まる. de Branges 空間の一般論 ([1, 5]) によれば, この $B(E^{\omega})$ に対して, ある区間 $I \subset \mathbb{R}$ 上で定義された正準系と, そのハミルトニアン $H_{\omega} : I \to \mathrm{Sym}(2,\mathbb{R})$ が定まる. 重要なことは, $H_{\omega}(a)$ は殆ど全ての $a \in I$ に対して半正定値であり, この性質が $\xi(s)$ の $\Re(s) > 1/2+\omega$ での零点の非存在に対応しているという事実である. 実際, これらの事柄は Riemann 予想を仮定すれば $\omega > 0$ で成り立つ. したがって $H_{\omega}(a)$ が具体的にどう表示できるのかが気になる.

ところが, 与えられた de Branges 空間に対応するハミルトニアンの存在は一般論から従うが, それを分かり易い形で表示するのは難しいのが殆どである ([1]). [10] では Burnol [2] を参考にして, $\omega > 1$ という条件の下, $H_{\omega}(a)$ がある積分作用素 $\mathsf{H}_{\omega,a}$ の Fredholm 行列式を用いて

$$H_{\omega}(a) = \mathrm{diag}\left(\left(\frac{\det(1-\mathsf{H}_{\omega,a})}{\det(1+\mathsf{H}_{\omega,a})}\right)^2, \left(\frac{\det(1+\mathsf{H}_{\omega,a})}{\det(1-\mathsf{H}_{\omega,a})}\right)^2\right) \quad (a \in I = [1,\infty)) \tag{3.1}$$

と表示できる事を示した. これは det の意味を適当に修正すれば, 少なくとも Riemann 予想の下では, $0 < \omega \leqslant 1$ でも成り立つ事が期待される.

以上が [10] の概略であるが, 積分作用素 $\mathsf{H}_{\omega,a}$ の積分核は $\xi(s)$ を用いてかなり具体的に書き下せるものの, $H_{\omega}(a)$ の ω や a に関する挙動はよく分からない. 特に ω が 1 より小さい場合を考えようとすると, 数値実験的にもあまり精度や効率が良くない. (著者の計算機に対する知識や技術の不足による所もあるが.)

3.2. **承.** そこで [11] の 5 節にあるように, $\xi(s)$ の積分表示を Riemann 和 (指数多項式) で近似して, 変数変換によって Riemann 和を自己相反多項式に変換することにより, $\xi(s)$ の話を自己相反多項式に帰着する事を考えた. これが存外上手くいって, $H_{\omega}(a)$ の挙動が観察できる程度の数値実験はできるようになった (例えば [11] の最後にある図など) のだが, 以下で述べる通りすんなりとできた訳ではない.

積分表示の Riemann 和による近似

$$\begin{gathered}\xi(\tfrac{1}{2}-iz) = \int_1^{\infty} \phi(x)(x^{iz}+x^{-iz})\frac{dx}{x} = \lim_{T\to\infty}\lim_{q\to 1^+} \log q \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{\log T}{\log q}\rfloor} \phi(q^k)(q^{ikz}+q^{-ikz}) \\ \left(\phi(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x}\frac{d}{dx}\Big(x^2\frac{d}{dx}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\exp(-\pi n^2x^2)\Big)\right)\end{gathered} \tag{3.2}$$

を踏まえて, $2g$ 次の自己相反多項式 $P_g(x)$ $(\in \mathbb{R}[x])$ に対して, $q > 1$ を一つ固定して

$$A_q(z) = q^{-giz}P_g(q^{iz})$$

とおく. これを $\xi(\frac{1}{2}-iz)$ の類似物と考える. そして $\xi(\frac{1}{2}+\omega-iz)$ の代わりに $A_q(z+i\omega)$ について, [10] の要領で de Branges 空間 $B(A_q(z+i\omega))$ に対応するハミルトニアン $H_{A,\omega}(a)$ を計算する事を考える. これが上手くいけば (3.2) を経由して, $B(\xi(\frac{1}{2}+\omega-iz))$ に対応するハミルトニアン $H_{\omega}(a)$ の近似的な計算が可能になると期待できるからである.

ちなみに $H_{A,\omega}$ が定義される区間は $[1,q^g)$ となるため, $q>1$ はこれが空でないために必要なだけで, 具体的な値は本質的ではない.

ここで [10] の方針に沿って考えると, まず $A_q(z+i\omega)$ から de Branges 空間を定める事に問題はない. しかしハミルトニアン $H_{A,\omega}(a)$ の表示に必要な積分作用素を定義する段階では, $\Im(z)>0$ が十分大きいとき

$$\frac{\overline{A_q(\bar{z}+i\omega)}}{A_q(z+i\omega)}=\int_0^\infty K_\omega(x)\,x^{\frac{1}{2}+iz}\,\frac{dx}{x}$$

が成り立つような関数 $K_\omega(x)$ を取らねばならない. ところが $\xi(s)$ の場合とは異なり, このような $K_\omega(x)$ はどんな $\omega>0$ に対しても $(0,\infty)$ 上の「関数」ではないため, これを核とする積分作用素の行列式を考える事は難しい. そこで代替策として, [2, (130)] (や [10, (4.29)]) を踏まえて, 積分方程式

$$\phi_a^\pm(x)\pm\int_0^a K_\omega(xy)\phi_a^\pm(y)\,dy=K_\omega(ax)\quad(a>0) \tag{3.3}$$

の解から $H_{A,\omega}(a)$ を計算する事を試みたが, 筆者にはこの方程式が全然解けなかった. こうして, 自己相反多項式を経由して $H_\omega(a)$ を計算するという戦略は敗色濃厚となり, この方針は暗礁に乗り上げた. 2012 年 3 月頃の事である.

3.3. **転.** どうしようもないので放っておいて他の仕事をしていたのだが, GW 明け頃, 何だか変てこな行列たちから成るある線形方程式の族を解けば $H_{A,\omega}(a)$ が計算できる事が分かった. この変てこなものが [12] の§2.3 にある線形方程式の族である. この族は先に述べたような積分作用素や積分方程式 (3.3) の話とは全く無関係に, かつ唐突に得られたので,「何だか分からないが, これを解けば辻褄は合うらしい」という謎の状態がしばらく続く. [11] を書いた 6 月時点はもちろん, いくつかの研究集会における講演を経て, [12] を書き上げた 11 月中頃でさえそうだった. 12 月中頃に [13] の結果に至って, ようやく上記の変てこな行列たちの意味が見えてきた. とはいえ, 何故ああいった行列を考えたのかは, 当時のノートなどを見直しても全く分からない.

桂田・松本 [4] の §5–7 に Dark Method という手法が出てくるが, [11] から [12] にかけてやった事はそれに非常に近いものだったと思う.

ともあれ謎の手法で $H_{A,\omega}(a)$ が帰納的に計算できるようになった. さらにこの副産物として, 自己相反多項式の根がすべて単位円周上にある事の必要十分条件も得られた. ここで心に余裕ができて, 結果の一部を [11] に書いたり, もともとの動機である [10] を見直したりしていた. その時, そもそも [10] で $\xi(\frac{1}{2}+\omega-iz)$ を生成関数とする de Branges 空間を扱ったのは,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{\overline{\xi(\frac{1}{2}+\omega-i\bar{z})}}{\xi(\frac{1}{2}+\omega-iz)}\,x^{-\frac{1}{2}-iz}\,dz\quad(c>0\text{ は十分大})$$

という積分が具体的に計算可能だったからであって, $\xi(s)$ の Riemann 予想の立場からは, $\xi(\frac{1}{2}+\omega-iz)$ よりも $\xi(\frac{1}{2}-iz)+\xi'(\frac{1}{2}-iz)$ を生成関数とする de Branges 空間を考える方が自然だった事 ([5]) を思い出した.

$\xi(\frac{1}{2}+\omega-iz)$ の類似物を $A_q(z+i\omega)$ とすれば, $\xi(\frac{1}{2}-iz)+\xi'(\frac{1}{2}-iz)$ の類似物は $A_q(z)+iA_q'(z)$ である. 例えば, ω が小さいとき,

$$\begin{aligned}\xi(\tfrac{1}{2}+\omega-iz)&=\xi(\tfrac{1}{2}-iz)+\omega\cdot\xi'(\tfrac{1}{2}-iz)+\cdots\\ A_q(z+i\omega)&=A_q(z)+\omega\cdot A_q'(z)+\cdots\end{aligned} \tag{3.4}$$

ここで上で述べた謎の方法には, 積分作用素も積分方程式 (3.3) も不要だった事が幸いして, それは $A_q(z)+iA_q'(z)$ を生成関数とする de Branges 空間に付随するハミルトニアン $H_A(a)$ の計算にもそのまま使える事が分かった. そして実際にやってみると, 結果として, $H_A(a)$ は $H_{A,\omega}(a)$ で $\omega\to 0^+$ としたような形になっていた (!) ([12, Theorem 2.9]). この事は (3.4) に注意するといかにも辻褄が合っている.

この結果に伴い, 自己相反多項式の根がすべて単位円周上にある事の必要十分条件もより簡潔な形になった ([12, Theorem 2.4, 2.7]). しかもこの結果から, $\xi(\frac{1}{2}-iz)+\xi'(\frac{1}{2}-iz)$ を生成関数とする de Branges 空間に付随するハミルトニアン $H_\xi(a)$ の予想される形を数値実験で観察する事もできるようになった. これらの事が分かったのは 7 月下旬〜8 月の間だったと思う.

3.4. **結⇒序.** こうして自己相反多項式を経由して $H_\xi(a)$ や $H_\omega(a)$ を計算する手がかりは得られたが, 数値実験以上の事はまだ出来ていなかったので, 10 月の RIMS 集会では自己相反多項式の根に話題を限定して話した.

しかし先にも述べたように, RIMS 集会の時点でも使っている手法が何故上手くいくのかは謎であったし, しかもその手法では $H_A(a)$ や $H_{A,\omega}(a)$ は帰納的に計算されるので, 数値実験的にはともかく, それを $H_\xi(a)$ や $H_\omega(a)$ の理論的計算に応用するのは困難だった. とはいえ, これ以上どうにか出来そうなアイディアも出なかったので, とりあえず得られた結果を [12] にまとめた.

しかし不思議なもので, まとめ終えて昔のノートや計算用紙を眺めていると, $H_A(a)$ は第 2 節の記号を用いて

$$\begin{aligned}H_A(a)=\mathrm{diag}\Biggl(&(g\log q)\frac{\det(1-H_q(\underline{c})J_{n-1})\det(1-H_q(\underline{c})J_n)}{\det(1+H_q(\underline{c})J_{n-1})\det(1+H_q(\underline{c})J_n)},\\ &(g\log q)^{-1}\frac{\det(1+H_q(\underline{c})J_{n-1})\det(1+H_q(\underline{c})J_n)}{\det(1-H_q(\underline{c})J_{n-1})\det(1-H_q(\underline{c})J_n)}\Biggr)\\ &(q^{(n-1)/2}\leqslant a<q^{n/2},\ 1\leqslant n\leqslant 2g)\end{aligned} \tag{3.5}$$

と表示できることが分かった ([13]). ここで $H_q(\underline{c}):=E_q^+(\underline{c})^{-1}E_q^-(\underline{c})$ であり, $n=1$ のときは J_0 を含む因子は無いものと考える.

この (3.5) も先の謎の手法と同様に, 理論的に得られたものではなかったが, 形を見ると (3.1) と非常に似ている. この事から, 一度は投げ出した (3.3) のような方程式はちゃんと解けて, その解から $H_A(a)$ は計算できるはずだと思い直し, (3.5) を手がかりに試行錯誤してみると, 果たして解けた. そして [12] の変てこな線形方程式の族も, そこでしっかり役割を果たしている事がわかった. この辺りの事は [13] の改訂版で述べる予定だが, この講究録が出版される頃には既に改訂済みかもしれない.

こうした紆余曲折を経て $H_A(a)$ の closed formula の一つが (3.5) として得られた. 当初の目的からすれば, これを (3.2) の右辺から得られる自己相反多項式に適用して, $H_\xi(a)$ や $H_\omega(a)$ を計算する事が次の段階である. これらのハミルトニアンに対して期待

される性質は [11] から予測されるので, その段階ではそういった結果を導くのが目標となる. 期待通りの結果が得られるのかはこれからの研究次第である.

4. 残された問題

最後に自己相反多項式の根について, 面白いと思われる問題を2つ挙げておく. どちらについても筆者には現時点で何のアイディアもないので, ただ挙げるだけになってしまうが. 後者は重要そうだが, 前者はそうではないかもしれない.

4.1. Chebyshev 変換との関連. 自己相反多項式の根を複素共役で組にすることで

$$P_g(x) = \sum_{k=0}^{g-1} c_k(x^{2g-k} + x^k) + c_g x^g = c_0\, x^g \prod_{j=1}^{g}((x + x^{-1}) - 2\lambda_j)$$

という表示が得られる. ここで $2\lambda_j \in \mathbb{R}$ $(1 \leqslant j \leqslant g)$ であり, これらは $P_g(x)$ の Chebyshev 変換 $Q_g(x)$ [6, Definition 2] の根になっている. 明らかに $P_g(x)$ の根がすべて単位円周上の単根である事の必要十分条件は, $|\lambda_j| < 1$ $(1 \leqslant j \leqslant g)$ かつ $\lambda_i \neq \lambda_j$ $(i \neq j)$ であり, これは $Q_g(x)$ の根が全て $(-2, 2)$ 内の単根である事と同値である.

この $(\lambda_1, \cdots, \lambda_g) = (\lambda_1(\underline{c}), \cdots, \lambda_g(\underline{c}))$ を用いると, g が小さいとき $\Delta_n(\underline{c})$ は次のように表される:

- $g = 1$ のとき, $\quad \Delta_2(c_0, c_1) = \dfrac{1-\lambda_1}{1+\lambda_1},$
- $g = 2$ のとき,

$$\Delta_2(c_0, c_1, c_2) = \frac{(1-\lambda_1) + (1-\lambda_2)}{(1+\lambda_1) + (1+\lambda_2)},$$

$$\Delta_3(c_0, c_1, c_2) = 2\,\frac{(1-\lambda_1^2) + (1-\lambda_2^2)}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2},$$

$$\Delta_4(c_0, c_1, c_2) = \frac{(1-\lambda_1)(1-\lambda_2)}{(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)},$$

- $g = 3$ のとき,

$$\Delta_2(c_0, c_1, c_2, c_3) = \frac{(1-\lambda_1) + (1-\lambda_2) + (1-\lambda_3)}{(1+\lambda_1) + (1+\lambda_2) + (1+\lambda_3)},$$

$$\Delta_3(c_0, c_1, c_2, c_3) = 3\,\frac{(1-\lambda_1^2) + (1-\lambda_2^2) + (1-\lambda_3^2)}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2 + (\lambda_1 - \lambda_3)^2 + (\lambda_2 - \lambda_3)^2},$$

$$\Delta_4(c_0, c_1, c_2, c_3) = \frac{\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 3}(1-\lambda_i)(1-\lambda_j)(\lambda_i - \lambda_j)^2}{\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 3}(1+\lambda_i)(1+\lambda_j)(\lambda_i - \lambda_j)^2},$$

$$\Delta_5(c_0, c_1, c_2, c_3) = 3\,\frac{\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 3}(1-\lambda_i^2)(1-\lambda_j^2)(\lambda_i - \lambda_j)^2}{\prod_{1\leqslant i<j\leqslant 3}(\lambda_i - \lambda_j)^2},$$

$$\Delta_6(c_0, c_1, c_2, c_3) = \frac{(1-\lambda_1)(1-\lambda_2)(1-\lambda_3)}{(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)(1+\lambda_3)}.$$

($\Delta_1(\underline{c}) = 1$ なので $n = 1$ の場合は省略した.)

これらの表示を見ると, $\Delta_n(\underline{c})$ を $(\lambda_1, \cdots, \lambda_g) = (\lambda_1(\underline{c}), \cdots, \lambda_g(\underline{c}))$ により表す一般的な式がありそうに思える. それがどういったものなのかは今のところ分からないが, も

しそれが分かれば, 定理1を正準系の理論によらずに直接証明することが可能になるかもしれない.

4.2. **数論的解釈, 数理物理的解釈.** 種数 g の非特異射影代数曲線 $X/\mathbb{F}_q$ のゼータ関数

$$Z_X(T) = \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} |X(\mathbb{F}_{q^m})| \frac{T^m}{m}\right) = \frac{Q_X(T)}{(1-T)(1-qT)}$$

から得られる $2g$ 次自己相反多項式 $P_X(x) := Q_X(q^{-1/2}x)$ の係数から定義される $\Delta_n(\underline{c}; q^\omega)$ を $\Delta_n(X; q^\omega)$ と書こう. Weil により証明された $Z_X(s)$ の Riemann 予想と定理2から $0 < \Delta_n(X; q^\omega) \neq \infty$ $(1 \leqslant n \leqslant 2g,\ \omega > 0)$ が成り立つ.

他方, $S = (s_{i,j})$ を m 次実対称行列で非対角成分が $|s_{i,j}| \leqslant 1$ を満たすものとする.

$$P_S(x) = \sum_{k=0}^{m} \left\{ \sum_{\substack{I \sqcup J = \{1,2,\cdots,m\} \\ |I| = k}} \prod_{i \in I, j \in J} s_{i,j} \right\} x^k$$

と定義すると m 次の自己相反多項式が得られる. これは数理物理における Ising 模型の分配関数になっている. $m = 2g$ のとき, $q > 1$ と $P_S(x)$ の係数から定義される $\Delta_n(\underline{c}; q^\omega)$ を $\Delta_n(S; q^\omega)$ と書こう. Lee-Yang の円定理と定理2から $0 < \Delta_n(S; q^\omega) \neq \infty$ $(1 \leqslant n \leqslant 2g,\ \omega > 0)$ が成り立つ.

これらの結果を Weil や Lee-Yang の結果を用いずに直接証明できるだろうか. また $\Delta_n(X)$ や $\Delta_n(S)$ を利用することで, Weil や Lee-Yang の結果を精密化できるだろうか. これらの問題を解決するには, 特殊な $\underline{c} \in \mathbb{R}^{g+1}$ に対して $\Delta_n(\underline{c})$ や $\Delta_n(\underline{c}; q^\omega)$ を全く別方向から意味付ける必要があるだろう. どういったものかは予想もつかないが.

5. 後日談

やっている事が一区切りついてくると, 思わぬところで既知の結果との関連が判明する事がよくある. 定理1を2013年3月の学会で発表した折, 筑波大の秋山茂樹氏より高木 [14] の第10章に, これと関連した面白い手法がある事を教えて頂いた. 定理1と [14] から導かれる結果を比較してみると以下の通りである.

まず, 多項式 $P(x) \in \mathbb{C}[x]$ の根が全て単位円周上にあるためには, $P(x)$ が self-inversive (即ち, $P(x) = x^{\deg P}\overline{P(1/\bar{x})}$) かつ $P'(x)$ の根が全て単位円の内部にある事が必要十分である (Cohn [3]). 一方, 多項式 $P(x)$ が self-inversive なら, $P(x)$ の単位円周上の重根を除いて, $P'(x)$ は単位円周上に根をもたない ([7, Lemma (45.2)]). したがって, self-inversive な多項式 $P(x) \in \mathbb{C}[x]$ の根が全て単位円周上にある単根であるためには, $P'(x)$ の根が全て単位円の内部にあることが必要十分である.

上記を踏まえると, 与えられた多項式の根が全て単位円の内部にあるのはどの様な場合かが問題となる. これに対して次の結果が知られている. (この記事の内容に合わせて記述は若干変更した.)

定理 4. $Q(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$ を（実係数とは限らない）n 次多項式とする．$2n \times 2n$ 行列 $D_n(Q)$ を Q と $Q^\sharp$ の終結式とする：

$$D_n(Q) = \left[\begin{array}{cccc|cccc} a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_n & & & \\ & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_n & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_n \\ \hline \bar{a}_n & \bar{a}_{n-1} & \cdots & \cdots & \bar{a}_0 & & & \\ & \bar{a}_n & \bar{a}_{n-1} & \cdots & \bar{a}_1 & \bar{a}_0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \bar{a}_n & \bar{a}_1 & \cdots & \cdots & \bar{a}_0 \end{array}\right].$$

$D_n(Q)$ の n 行と $2n$ 行，および n 列と $2n$ 列を除いて $2(n-1) \times 2(n-1)$ 行列 $D_{n-1}(Q)$ を作り，$D_{n-1}(Q)$ から同じようにして $D_{n-2}(Q)$ を作り，これを繰り返して

$$D_2(Q) = \left[\begin{array}{cc|cc} a_0 & a_1 & a_n & \\ & a_0 & a_{n-1} & a_n \\ \hline \bar{a}_n & \bar{a}_{n-1} & \bar{a}_0 & \\ & \bar{a}_n & \bar{a}_1 & \bar{a}_0 \end{array}\right], \quad D_1(Q) = \begin{bmatrix} a_0 & a_n \\ \bar{a}_n & \bar{a}_0 \end{bmatrix}$$

に至るものとする．このとき $Q(x)$ の根が全て単位円の内部にあるためには，全ての $1 \leqslant k \leqslant n$ について $(-1)^k \det D_k(Q) > 0$ が成り立つことが必要十分である．

Proof. 高木 [14, §75] の問題 4, 5, もしくは Marden [7, §43, Th. (43,1), Exercise 2; §45, Exercise 3] を見よ． □

定理 4 を $Q(x) = P_g'(x)$ に適用すると，$P_g(x)$ の根が全て単位円周上の単根であるためには，全ての $1 \leqslant n \leqslant 2g-1$ について $(-1)^n \det D_n(P_g') > 0$ が成り立つことが必要十分であることが分かる．例えば $g=2$ のとき，

$$\begin{aligned} -\det D_1(P_2') &= (4c_0 - c_1)(4c_0 + c_1) \\ \det D_2(P_2') &= 4(8c_0^2 - 2c_1^2 + 4c_0c_2)(8c_0^2 + c_1^2 - 4c_0c_2) \\ -\det D_3(P_2') &= 16(2c_0 + 2c_1 + c_2)(2c_0 - 2c_1 + c_2)(8c_0^2 + c_1^2 - 4c_0c_2)^2 \end{aligned}$$

である．一方，$g=2$ のとき，定理 1 の量は

$$\Delta_2(P_2) = \frac{4c_0 + c_1}{4c_0 - c_1}, \quad \Delta_3(P_2) = \frac{8c_0^2 - 2c_1^2 + 4c_0c_2}{8c_0^2 + c_1^2 - 4c_0c_2}, \quad \Delta_4(P_2) = \frac{2c_0 + 2c_1 + c_2}{2c_0 - 2c_1 + c_2}$$

である．定理 1 も定理 4 から導かれる条件も，どちらも必要十分条件だから，$\Delta_{n+1}(P_g)$ がみな正である事と $(-1)^n \det D_n(P_g')$ がみな正であることは同値である．しかも Δ_n の計算に現れる行列式は n 毎に更に簡約できて，D_n と Δ_{n+1} のどちらを用いるにしても，計算量は変わらないことも分かる．結局，計算量という面では，$P_g(x)$ の根がみな単位円周上の単根であるか否かの判定について，定理 1 と既知の結果であまり変るところはない事が分かる．ただし，Δ_n と異なり，D_n が Riemann ゼータ関数などの零点の研究に自然な形で応用できるかは不明である．

REFERENCES

[1] L. de Branges, Hilbert spaces of entire functions, *Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J.* 1968.

[2] J.-F. Burnol, Scattering, determinants, hyperfunctions in relation to $\Gamma(1-s)/\Gamma(s)$, *Rejecta Mathematica* **2** (2011), no. 1, 59–118, 出版前版は `http://arxiv.org/abs/math/0602425`

[3] A. Cohn, Über die Anzahl der Wurzeln einer algebraischen Gleichung in einem Kreise, *Math. Z.* **14** (1922), no. 1, 110–148.

[4] 桂田昌紀, 松本耕二, Hurwitz ゼータ関数の導関数の二乗平均値に関するある漸近公式, 数論とその応用, 66–90, 数理研講究録 No.1060, RIMS, 1998.

[5] J. C. Lagarias, Hilbert spaces of entire functions and Dirichlet L-functions, *Frontiers in number theory, physics, and geometry. I*, 365–377, *Springer, Berlin*, 2006.

[6] P. Lakatos, On zeros of reciprocal polynomials, *Publ. Math. Debrecen* **61** (2002), no. 3-4, 645–661.

[7] M. Marden, Geometry of polynomials, Second edition, Mathematical Surveys, No. 3, *American Mathematical Society, Providence, R.I.*, 1966.

[8] M. Suzuki, On subspaces of the Hardy space related to zeros of zeta functions, 数理研講究録「解析数論–複素関数の値の分布と性質を通して」, 掲載予定

[9] ———, On monotonicity of certain weighted summatory functions associated with L-functions, *Comment. Math. Univ. St. Pauli*, **60** (2011), no. 1-2, 211–226.

[10] ———, A canonical system of differential equations arising from the Riemann zeta-function, *Functions in Number Theory and Their Probabilistic Aspects*, 397–436, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, **B34**, *Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto*, 2012.

[11] ———, 自己相反多項式と微分方程式の標準系, 解析的整数論–数論的関数の多重性に関連して, 176–185, 数理研講究録 No.1806, RIMS, 2012.

[12] ———, On zeros of self-reciprocal polynomials, 投稿中, `http://arxiv.org/abs/1211.2953`.

[13] ———, On zeros of self-reciprocal polynomials. II, 準備中, アナウンス版が `http://www.math.titech.ac.jp/~msuzuki/index.html` に置いてある.

[14] 高木貞治, 代数学講義, 共立出版, 1965.