数理解析研究所講究録
第 1903 巻 2014 年 82-89

Sierpiński gasket 上の測度論的 Riemann 構造に対する解析・幾何

神戸大学・理学研究科　梶野　直孝*
Naotaka Kajino
Graduate School of Science
Kobe University

1 Introduction

本稿では，[8, 3] で考察された Sierpiński gasket 上の測度論的「Riemann 構造」に関して，対応する Laplacian の固有値の Weyl 型漸近挙動，及び最短測地線の構造について得られた結果を報告する．より詳しい説明や関連する結果については概説論文 [4] とその参考文献を参照のこと．

K を $V_0=\{q_1,q_2,q_3\}\subset\mathbb{R}^2$ を 3 頂点とする Sierpiński gasket（図 1 左）とする．すなわち，q_1,q_2,q_3 は $\mathbb{R}^2$ 内の正 3 角形の 3 頂点であり，$i=1,2,3$ に対し $f_i(x):=(x+q_i)/2$, $x\in\mathbb{R}^2$ とするとき，K は $K=\bigcup_{i=1}^{3}f_i(K)$ を満たす唯 1 つの空でない $\mathbb{R}^2$ のコンパクト部分集合である．木上 [8] は，K の $\mathbb{R}^2$ への「調和な埋め込み」$\Phi:K\to\mathbb{R}^2$ を通して K を $\mathbb{R}^2$ の「部分多様体」とみなすことにより，K 上に一種の「Riemann 構造」が定まり，さらに対応する熱核 $p_{\mathcal{H}}(t,x,y)$ が Riemann 多様体の場合に類似の Gauss 型評価を満たすことを示した．埋め込みの像 $\Phi(K)=:K_{\mathcal{H}}$ はこの「Riemann 構造」の幾何学的実現であり，調和 Sierpiński gasket（図 1 右）と呼ばれる．これを受けて筆者は [3] において，Varadhan 型漸近挙動

$$\lim_{t\downarrow 0}4t\log p_{\mathcal{H}}(t,x,y)=-\rho_{\mathcal{H}}(x,y)^2,\qquad x,y\in K \tag{1.1}$$

を初めとする，熱核 $p_{\mathcal{H}}(t,x,y)$ のより詳細な漸近挙動を示した．ここで $\rho_{\mathcal{H}}$ は木上 [8] により定義された，$K_{\mathcal{H}}$ 内での最短線の長さにより定まる K 上の自然な測地距離であり，調和測地距離と呼ばれる．

本稿ではこの「Riemann 構造」に対応する Laplacian の Weyl 型固有値漸近挙動について述べ，さらに距離空間 $(K,\rho_{\mathcal{H}})$ における最短測地線の構造について [4] で得られた結果を紹介する．以下に見るように，そこには空間のフラクタル的特異性が反映される．

*本研究は German Research Council (DFG) SFB 701 の助成を受けたものである．

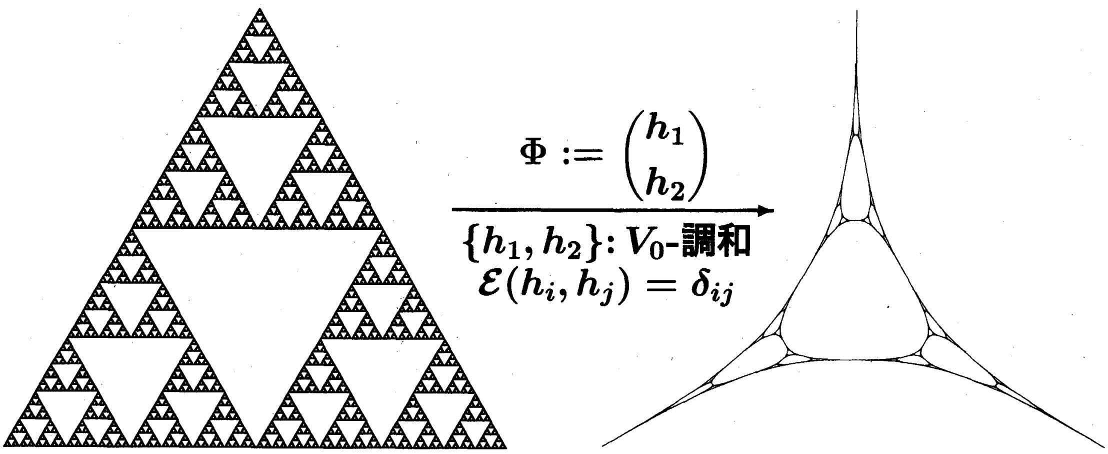

図 1: Sierpiński gasket と調和 Sierpiński gasket

記号. 以下本稿では次の記号を用いる.
(1) $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, すなわち $0 \notin \mathbb{N}$.
(2) $a, b \in [-\infty, \infty]$ に対し $a \vee b := \max\{a, b\}$, $a \wedge b := \min\{a, b\}$, $a^+ := a \vee 0$, $a^- := -(a \wedge 0)$ とおく. また関数に対しても同じ記号を用いる.
(3) 位相空間 E に対し $C(E) := \{f \mid f : E \to \mathbb{R}, f$ は連続 $\}$ とおく.

2 Sierpiński gasket とその上の標準 Dirichlet 形式

まず本節では Sierpiński gasket 上の標準 Dirichlet 形式の定義と基本性質を述べる. 詳細は [4, Section 2] とその参考文献, 特に [7, Chapter 2 and Section 3.3], [9, Part I] を参照のこと. また Dirichlet 形式の一般論については [1] を参照のこと.

定義 2.1. $V_0 = \{p_1, p_2, p_3\} \subset \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ 内の正 3 角形の 3 頂点とし, $i \in \{1, 2, 3\} =: S$ に対し $f_i(x) := (x + p_i)/2$, $x \in \mathbb{R}^2$ とする. このとき, $\{f_i\}_{i \in S}$ から決まる自己相似集合 K, すなわち $K = \bigcup_{i \in S} F_i(K)$ を満たす $\mathbb{R}^2$ の唯 1 つの空でないコンパクト部分集合 K を **Sierpinski gasket** (図 1 左) と呼ぶ. $i \in S$ に対し $F_i := f_i|_K$ とおく. また $m \in \mathbb{N}$ に対し帰納的に $V_m := \bigcup_{i \in S} F_i(V_{m-1})$ と定め, $V_* := \bigcup_{m \in \mathbb{N}} V_m$ とおく.

容易にわかるように, 各 $m \in \mathbb{N}$ に対し $V_{m-1} \subset V_m$ であり, また K は V_* の $\mathbb{R}^2$ における閉包に等しい. 各 $i \in S$ に対し F_i は K から K への連続写像であることに注意する.

定義 2.2. $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ と $w = w_1 \dots w_m \in S^m$ に対し $F_w := F_{w_1} \circ \cdots \circ F_{w_m}$, $K_w := F_w(K)$ とおく ($m = 0$ のとき w は空語 (empty word) $\emptyset$ であり, $F_\emptyset := \mathrm{id}_K$ と定める).

定義 2.3. 各 $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対し, V_m 上の非負定値対称双線型形式 $\mathcal{E}_m : \mathbb{R}^{V_m} \times \mathbb{R}^{V_m} \to \mathbb{R}$ を

$$\mathcal{E}_m(u, v) := \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{5}{3}\right)^m \sum_{x, y \in V_m, x \overset{m}{\sim} y} (u(x) - u(y))(v(x) - v(y)), \qquad u, v \in \mathbb{R}^{V_m} \tag{2.1}$$

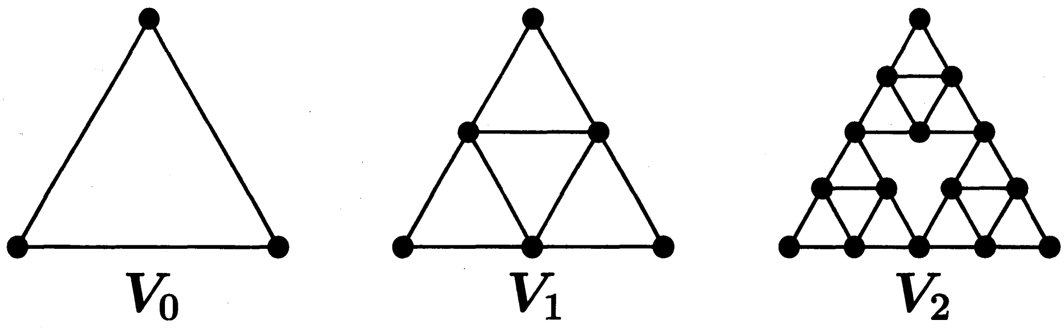

図 2: 集合 V_m とその上のグラフ構造 $(m = 0, 1, 2)$

により定義する．ここで $x, y \in V_m$ に対し，ある $w \in W_m$ に対し $x, y \in F_w(V_0)$ であってかつ $x \neq y$ のとき，またそのときに限り $x \overset{m}{\sim} y$ と定める（図2参照）．

(2.1) の右辺の最初の 1/2 は後に現れる幾つかの定数を簡単にするためのものであり，本質的なものではない（定義3.1とその後のコメント参照）．(2.1) における scaling factor $(5/3)^m$ は次の命題を成り立たせるためのものである．

命題 2.4. $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $m < n$ とし，$u \in \mathbb{R}^{V_m}$ とする．このとき

$$\mathcal{E}_m(u, u) = \min\{\mathcal{E}_n(v, v) \mid v \in \mathbb{R}^{V_n},\ v|_{V_m} = u\} \tag{2.2}$$

であり，かつ (2.2) 中の最小値を達成する $v \in \mathbb{R}^{V_n}$ は唯 1 つである．

命題2.4より特に，V_* 上の関数 $u : V_* \to \mathbb{R}$ に対し $\{\mathcal{E}_m(u|_{V_m}, u|_{V_m})\}_{m \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ は $[0, \infty)$-値の非減少列であり，したがって $[0, \infty]$ において極限を持つ．また $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ と $u \in \mathbb{R}^{V_m}$ が与えられると，$v|_{V_m} = u$ なる $v : V_* \to \mathbb{R}$ が唯 1 つ存在して任意の $n \geq m$ に対し $\mathcal{E}_n(v|_{V_n}, v|_{V_n}) = \mathcal{E}_m(u, u)$ となる．さらにもう少し解析を行うと，この $v : V_* \to \mathbb{R}$ は V_* 上で Euclid 距離に関して一様連続であり，従って K 上の連続関数に一意的に拡張できることを示すことができる．これらの事実を根拠として次の定理が証明される．

定理 2.5. $\mathcal{F} := \{u \in C(K) \mid \lim_{m \to \infty} \mathcal{E}_m(u|_{V_m}, u|_{V_m}) < \infty\}$ とし，$u, v \in \mathcal{F}$ に対し $\mathcal{E}(u, v) := \lim_{m \to \infty} \mathcal{E}_m(u|_{V_m}, v|_{V_m}) (\in \mathbb{R})$ と定めると，$\mathcal{F}$ は $C(K)$ の稠密な部分多元環，$\mathcal{E} : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ は非負定値対称双線型形式であり，さらに $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ は次の性質を持つ．
(1) $\{u \in \mathcal{F} \mid \mathcal{E}(u, u) = 0\} = \{c\mathbf{1} \mid c \in \mathbb{R}\} =: \mathbb{R}\mathbf{1}$, かつ $(\mathcal{F}/\mathbb{R}\mathbf{1}, \mathcal{E})$ は Hilbert 空間をなす．
(2) 任意の $x, y \in K$ に対し $R_\mathcal{E}(x, y) := \sup\{|u(x) - u(y)|^2 \mathcal{E}(u, u)^{-1} \mid u \in \mathcal{F} \setminus \mathbb{R}\mathbf{1}\} < \infty$. また $R_\mathcal{E} : K \times K \to [0, \infty)$ は K 上の距離関数であり，$R_\mathcal{E}$ が定める K の位相は元の位相（$\mathbb{R}^2$ からの相対位相，すなわち Euclid 距離による位相）に一致する．
(3) 任意の $u \in \mathcal{F}$ に対し $u^+ \wedge 1 \in \mathcal{F}$ かつ $\mathcal{E}(u^+ \wedge 1, u^+ \wedge 1) \leq \mathcal{E}(u, u)$.
(4) $\mathcal{F} = \{u \in C(K) \mid$ 任意の $i \in S$ に対し $u \circ F_i \in \mathcal{F}\}$ であり，また任意の $u, v \in \mathcal{F}$ に対し

$$\mathcal{E}(u, v) = \frac{5}{3} \sum_{i \in S} \mathcal{E}(u \circ F_i, v \circ F_i). \tag{2.3}$$

定理 2.5 の $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ を Sierpiński gasket 上の**標準抵抗形式** (standard resistance form) という．定理 2.5 から，木上による抵抗形式の一般論 [9, Corollary 6.4, Theorems 9.4 and 10.4] が適用できることが分かり，その結果として次が得られる．

定理 2.6. ν を K 上の有限 Borel 測度とし，その台は K 全体である，すなわち K の任意の空でない開集合 U に対し $\nu(U)>0$ を満たすとする．このとき $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ は $L^2(K,\nu)$ 上の強局所的正則 Dirichlet 形式であり，さらに対応する $L^2(K,\nu)$ 上の Markov 的な対称強連続縮小半群 $\{T_t^\nu\}_{t\in(0,\infty)}$ は連続な積分核 p_ν を持つ，すなわち連続関数 $p_\nu=p_\nu(t,x,y):(0,\infty)\times K\times K\to\mathbb{R}$ が存在して任意の $f\in L^2(K,\nu)$ と任意の $t\in(0,\infty)$ に対し

$$T_t^\nu f=\int_K p_\nu(t,\cdot,y)f(y)d\nu(y)\qquad \nu\text{-a.e.}\tag{2.4}$$

容易に分かるように，上記のような p_ν は一意的であり，任意の $(t,x,y)\in(0,\infty)\times K\times K$ に対し $p_\nu(t,x,y)=p_\nu(t,y,x)\geq 0$ を満たす．p_ν を $(K,\nu,\mathcal{E},\mathcal{F})$ に対応する（連続な）**熱核**という．p_ν のその他の基本性質については [9, Theorem 10.4] を参照のこと．

定理 2.6 により $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ はコンパクトな状態空間 K 上の強局所的正則 Dirichlet 形式とみなせるため，そのエネルギー測度が次で定義できることが [1, (3.2.13) and (3.2.14)] より分かる．これは Riemann 多様体における $\langle\nabla u,\nabla v\rangle d\mathrm{vol}$ に相当する測度である．

定義 2.7. $u\in\mathcal{F}$ とするとき，K 上の Borel 測度 $\mu_{\langle u\rangle}$ で任意の $f\in\mathcal{F}$ に対し

$$\int_K f d\mu_{\langle u\rangle}=\mathcal{E}(uf,u)-\frac{1}{2}\mathcal{E}(u^2,f)\tag{2.5}$$

を満たすものが唯 1 つ存在する．この $\mu_{\langle u\rangle}$ を u の **$\mathcal{E}$-エネルギー測度**という．さらに $u,v\in\mathcal{F}$ に対し $\mu_{\langle u,v\rangle}:=(\mu_{\langle u+v\rangle}-\mu_{\langle u\rangle}-\mu_{\langle v\rangle})/2$ と定める．容易に分かるように，$\mu_{\langle u,v\rangle}$ は K 上の有限 Borel 符号付き測度で $\mu_{\langle u,v\rangle}(K)=\mathcal{E}(u,v)$, $\mu_{\langle u,u\rangle}=\mu_{\langle u\rangle}$ を満たし，また $\mathcal{F}\times\mathcal{F}\ni(u,v)\mapsto\mu_{\langle u,v\rangle}$ は対称双線型である．

次節で Sierpiński gasket 上の測度論的 Riemann 構造を定義するために必要になるので，$(\mathcal{E},\mathcal{F})$ に関する調和関数の定義をここで与えておく．

定義 2.8. (1) 各 $B\subset K$ に対し $\mathcal{F}_B:=\{u\in\mathcal{F}\mid u|_{K\setminus B}=0\}$ とおく．
(2) F を K の閉集合とする．$h\in\mathcal{F}$ が

$$\mathcal{E}(h,h)=\inf_{u\in\mathcal{F},\,u|_F=h|_F}\mathcal{E}(u,u)\qquad \text{あるいは同値な条件}\qquad \mathcal{E}(h,u)=0,\quad {}^\forall u\in\mathcal{F}_{K\setminus F}\tag{2.6}$$

を満たすとき，h は **F-調和**(F-harmonic) であるという．
$\mathcal{H}_F:=\{h\in\mathcal{F}\mid h\text{ は }F\text{-調和}\}$, $\mathcal{H}_0:=\mathcal{H}_{V_0}$ とおく．

容易に分かるように $\mathcal{H}_F$ は $\mathcal{F}$ の線型部分空間であり，また [9, Lemma 8.2 and Theorem 8.4] により $\mathcal{H}_F\ni u\mapsto u|_F\in\{v|_F\mid v\in\mathcal{F}\}$ は線型同型である．特に F が K の空でない有限部分集合ならば $\mathcal{H}_F$ は $\mathbb{R}^F$ に線型同型である．

さて，(2.3) により $h\in\mathcal{H}_0$ と $w\in W_*$ に対し $h\circ F_w\in\mathcal{H}_0$ であることに注意する．次の命題は $h\in\mathcal{H}_0$ から $h\circ F_w\in\mathcal{H}_0$ を求める具体的な計算規則を与える．

命題 2.9 ([7, (3.2.3) and Example 3.2.6]). 3×3 実行列 A_1, A_2, A_3 を

$$A_1 := \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_2 := \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_3 := \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \tag{2.7}$$

で定める．これらを $\mathbb{R}^{V_0}$ の標準基底 $\{\mathbf{1}_{q_1}, \mathbf{1}_{q_2}, \mathbf{1}_{q_3}\}$ により $\mathbb{R}^{V_0}$ から $\mathbb{R}^{V_0}$ への線型写像とみなすとき，任意の $u \in \mathcal{H}_0$ と任意の $w = w_1 \ldots w_m \in W_*$ に対し

$$u \circ F_w|_{V_0} = A_{w_m} \cdots A_{w_1}(u|_{V_0}). \tag{2.8}$$

3 Sierpiński gasket 上の測度論的 Riemann 構造

本節では Sierpiński gasket 上の測度論的 Riemann 構造の正確な定義を与える．詳細は [4, Section 3 and Subsection 8.1] とその参考文献，特に [11, 6, 2, 10] を参照のこと．

定義 3.1. (0) $h_1, h_2 \in \mathcal{F}$ を，$h_1(q_1) = h_2(q_1) = 0$, $h_1(q_2) = h_1(q_3) = 1$, $-h_2(q_2) = h_2(q_3) = 1/\sqrt{3}$ を満たす V_0-調和関数として定める．
(1) 連続写像 $\Phi : K \to \mathbb{R}^2$ を $\Phi(x) := (h_1(x), h_2(x))$ により定義し，$K_{\mathcal{H}} := \Phi(K)$, また各 $i \in S$ に対し $\hat{q}_i := \Phi(q_i)$ と定める．$K_{\mathcal{H}}$ を**調和 Sierpiński gasket**（図 1 右）という．
(2) K 上の有限 Borel 測度 μ を $\mu := \mu_{\langle h_1 \rangle} + \mu_{\langle h_2 \rangle}$ で定義する．μ を Sierpiński gasket 上の**楠岡測度**という．

命題 2.4 と (2.6) より $u, v \in \mathcal{H}_0$ に対し $\mathcal{E}(u,v) = \mathcal{E}_0(u|_{V_0}, v|_{V_0})$ であることが分かるので，$\mathcal{E}(h_1, h_1) = \mathcal{E}(h_2, h_2) = 1$, $\mathcal{E}(h_1, h_2) = 0$ であり（(2.1) の右辺の 1/2 倍に注意），(2.8) より $h_1 \circ F_1 = (3/5)h_1$, $h_2 \circ F_1 = (1/5)h_2$ である．また $\{\hat{q}_1, \hat{q}_2, \hat{q}_3\} = \Phi(V_0)$ は正 3 角形の 3 頂点である．さらに (2.8) を用いた具体的な計算により次の命題を示すことができ，その帰結として以下の定理 3.3 と命題 3.4 が従う．

命題 3.2 ([6, §3]). 2×2 実行列 T_1, T_2, T_3 を

$$T_1 := \begin{pmatrix} 3/5 & 0 \\ 0 & 1/5 \end{pmatrix}, T_2 := \begin{pmatrix} 3/10 & -\sqrt{3}/10 \\ -\sqrt{3}/10 & 1/2 \end{pmatrix}, T_3 := \begin{pmatrix} 3/10 & \sqrt{3}/10 \\ \sqrt{3}/10 & 1/2 \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

で定義し，$w = w_1 \ldots w_m \in W_*$ に対し $T_w := T_{w_1} \cdots T_{w_m}$ ($T_\emptyset := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$) とおく．また各 $i \in S$ に対し $H_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を $H_i(x) := \hat{q}_i + T_i(x - \hat{q}_i)$ で定める．このとき次が成り立つ．
(1) $\theta \in \mathbb{R}$ に対し $R_\theta := \left(\begin{smallmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{smallmatrix}\right)$ と定めると $T_2 = R_{\frac{2}{3}\pi} T_1 R_{-\frac{2}{3}\pi}$, $T_3 = R_{-\frac{2}{3}\pi} T_1 R_{\frac{2}{3}\pi}$.
(2) 各 $w \in W_*$ に対し，$F_w^* h := h \circ F_w$ で与えられる線型写像 $F_w^* : \mathcal{H}_0/\mathbb{R}\mathbf{1} \to \mathcal{H}_0/\mathbb{R}\mathbf{1}$ の基底 $\{h_1, h_2\}$ に関する表現行列は T_w の転置行列 $T_w^* := (T_w)^*$ に等しい．
(3) 各 $i \in S$ に対し $H_i \circ \Phi = \Phi \circ F_i$ であり，従って特に $K_{\mathcal{H}} = \bigcup_{i \in S} H_i(K_{\mathcal{H}})$ である．

定理 3.3 ([6, Theorem 3.6]). $\Phi : K \to K_{\mathcal{H}}$ は同相写像である．

命題 3.4. 各 $w \in W_*$ に対し $\mu(K_w) = (5/3)^{|w|}\|T_w\|^2$ である．但し 2×2 実行列 $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ に対し $\|A\|$ はその Hilbert-Schmidt ノルム $\|A\| := \sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$ を表す．

以上の準備の下，K 上の測度論的 Riemann 構造の定義を与えることができる．$x \in K \setminus V_*$, $m \in \mathbb{N}$ に対し $x \in K_{[x]_m}$ を満たす $[x]_m \in S^m$ が唯 1 つ存在することに注意する．

命題 3.5 ([11, §1], [6, Proposition B.2])．K の部分集合 K_Z を

$$K_Z := \left\{ x \in K \setminus V_* \;\middle|\; \text{極限}\, Z(x) := \lim_{m\to\infty} \frac{T_{[x]_m} T_{[x]_m}^*}{\|T_{[x]_m}\|^2}\ \text{が存在する} \right\} \tag{3.2}$$

で定める．このとき K_Z は K の Borel 集合，$\mu(K \setminus K_Z) = 0$ であり，任意の $x \in K_Z$ に対し $Z(x)$ は階数 1 の直交射影である．そこで $x \in K \setminus K_Z$ に対し $Z(x) := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ とおくことにより 2×2 実行列に値をとる K 上の Borel 可測写像 $K \ni x \mapsto Z(x)$ が定まる．

定理 3.6 ([6, §4])．$C^1_\Phi(K) := \{v \circ \Phi \mid v \in C^1(\mathbb{R}^2)\}$ とおく．このとき各 $u \in C^1_\Phi(K)$ に対し $\nabla u := (\nabla v) \circ \Phi$ は $u = v \circ \Phi$ を満たす $v \in C^1(\mathbb{R}^2)$ の取り方に依らずに定まる．また $C^1_\Phi(K) \subset \mathcal{F}$, かつ $C^1_\Phi(K)/\mathbb{R}\mathbf{1}$ は $(\mathcal{F}/\mathbb{R}\mathbf{1}, \mathcal{E})$ において稠密であって，さらに任意の $u, v \in C^1_\Phi(K)$ に対し $d\mu_{\langle u,v\rangle} = \langle Z\nabla u, Z\nabla v\rangle d\mu$ が成り立つ．

定理 3.6 により，行列値写像 Z は μ-a.e. $x \in K$ に対し「$\mathbb{R}^2$ からの誘導計量の入った，x における $K_{\mathcal{H}}$ の 1 次元の接空間」$\mathrm{Im}\, Z_x$ を定めているとみなせ，このとき μ が「Riemann 体積測度」，$Z\nabla u$ が $u \in C^1_\Phi(K)$ の「勾配ベクトル場」に相当する．この「Riemann 構造」を K 上の**測度論的 Riemann 構造**という．定理 3.6 より $u, v \in C^1_\Phi(K)$ に対し $\mathcal{E}(u,v)$ が $\mathcal{E}(u,v) = \int_K \langle Z\nabla u, Z\nabla v\rangle d\mu$ と表されるので，この「Riemann 構造」に対応する Dirichlet 空間としては $(K, \mu, \mathcal{E}, \mathcal{F})$ を考えるのが自然ということになる．

実は次の定理に述べるように，$C^1_\Phi(K)$ に属する関数だけでなく任意の $u \in \mathcal{F}$ に対し，u の各点での微分係数として μ-a.e. で自然な「勾配ベクトル場」$\widetilde{\nabla} u$ が定まる．その主張を述べる為，K 上の測度論的 Riemann 構造に対応する自然な測地距離を定義する．

定義 3.7 ([8, Section 5], cf. [3, Section 3])．連続写像 $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ に対しその Euclid ノルムに関する弧長を $\ell_{\mathbb{R}^2}(\gamma)$ で表すものとし，各 $x, y \in K$ に対し $\rho_{\mathcal{H}}(x,y) \in [0,\infty)$ を

$$\rho_{\mathcal{H}}(x,y) := \inf\{\ell_{\mathbb{R}^2}(\Phi\circ\gamma) \mid \gamma : [0,1] \to K,\ \gamma\ \text{は連続},\ \gamma(0) = x,\ \gamma(1) = y\} (< \infty) \tag{3.3}$$

で定める．(3.3) の右辺の下限は実は最小値であり，$\rho_{\mathcal{H}} : K \times K \to [0,\infty)$ は K の元の位相に適合した K 上の距離関数である．$\rho_{\mathcal{H}}$ を K 上の**調和測地距離**という．

定理 3.8 ([10, Theorem 4.2], cf. [2, Theorem 5.4], [3, Theorem 2.17])．$u \in \mathcal{F}$ とする．このとき μ-a.e. $x \in K$ に対し，$\widetilde{\nabla} u(x) \in \mathrm{Im}\, Z(x)$ が存在して $y \to x$ のとき

$$u(y) - u(x) = \langle \widetilde{\nabla} u(x), \Phi(y) - \Phi(x)\rangle + o(\rho_{\mathcal{H}}(x,y)). \tag{3.4}$$

各 $x \in K_Z$ に対し (3.4) を満たす $\widetilde{\nabla} u(x) \in \mathrm{Im}\, Z(x)$ は一意的であり，$d\mu_{\langle u\rangle} = |\widetilde{\nabla} u|^2 d\mu$.

$(K, \mu, \mathcal{E}, \mathcal{F})$ に対応する熱核 p_μ を $p_{\mathcal{H}}$ とおくとき，Introduction で述べたように距離 $\rho_{\mathcal{H}}$ を用いて Gauss 型評価や (1.1) をはじめとする熱核 $p_{\mathcal{H}}$ の種々の漸近挙動を記述することができる．詳細は [8, 3, 10] もしくは概説論文 [4, Section 5] を参照のこと．

4 LaplacianのWeyl型固有値漸近挙動

dを調和測地距離$\rho_{\mathcal{H}}$に関するKのHausdorff次元，$\mathcal{H}^d_{\rho_{\mathcal{H}}}$を$\rho_{\mathcal{H}}$に関する$K$上の$d$次元Hausdorff測度とする．[3, Theorem 7.2]により$d \in (1, 1.52)$である．Kの空でない開集合Uに対し，$(U, \mu|_U, \mathcal{E}|_{\mathcal{F}_U \times \mathcal{F}_U}, \mathcal{F}_U)$の生成作用素（$U$上のDirichlet Laplacian）を$\Delta_{\mu,U}$，$-\Delta_{\mu,U}$の固有値の全体を$\{\lambda^U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$（各固有値は重複度分繰り返す）とし，$\lambda \in \mathbb{R}$に対し$\mathcal{N}_U(\lambda) := \#\{n \in \mathbb{N} \mid \lambda^U_n \leq \lambda\}$とする．次が本稿の主定理である．

定理 4.1 ([5], cf. [4, Theorem 7.2])．定数$c_{\mathcal{N}} \in (0, \infty)$が存在して，$\mathcal{H}^d_{\rho_{\mathcal{H}}}(\overline{U} \setminus U) = 0$なる任意の$K$の空でない開集合$U$に対し

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{\mathcal{N}_U(\lambda)}{\lambda^{d/2}} = c_{\mathcal{N}} \mathcal{H}^d_{\rho_{\mathcal{H}}}(U) \in (0, \infty). \tag{4.1}$$

(4.1)ではRiemann多様体の場合と異なり，$\mathcal{N}_U$の漸近挙動に「Riemann体積測度」μではなく，$\rho_{\mathcal{H}}$に関するHausdorff測度$\mathcal{H}^d_{\rho_{\mathcal{H}}}$が現れている．そこで$\mu$と$\mathcal{H}^d_{\rho_{\mathcal{H}}}$の関係が問題になるが，これに関し次が成り立つ．$B_r(x, \rho_{\mathcal{H}}) := \{y \in K \mid \rho_{\mathcal{H}}(x, y) < r\}$とおく．

定理 4.2 ([3, Theorem 6.1], [5], cf. [4, Theorems 5.12 and 6.7])．定数$d^{\mathrm{loc}} \in (1, d)$が存在して，$\lim_{r\downarrow 0}(\log \mu(B_r(x, \rho_{\mathcal{H}})))/\log r = d^{\mathrm{loc}}$が$\mu$-a.e. $x \in K$に対し成立する．

$\{x \in K \mid \lim_{r\downarrow 0}(\log \mu(B_r(x, \rho_{\mathcal{H}})))/\log r = d^{\mathrm{loc}}\}$の$\rho_{\mathcal{H}}$に関するHausdorff次元は$d^{\mathrm{loc}}$であることが，距離球による被覆を用いた幾何学的測度論の初等的な議論から容易に分かるので，$\boldsymbol{d^{\mathrm{loc}} < d}$と合わせて次の系を得る．

系 4.3 ([5], cf. [4, Corollary 6.8])．μと$\mathcal{H}^d_{\rho_{\mathcal{H}}}$は互いに特異である．

5 最短測地線の構造とRicci曲率の下からの非有界性

最後に本節ではK上の測度論的Riemann構造に関して，[4]で得られた最短測地線の構造についての筆者の結果を紹介する．応用として，Ricci曲率の下限についての条件であるSturm, Lott-Villaniによる**曲率次元条件**CD(k, N)と太田慎一，Sturmによる**測度の縮小性**MCP(k, N)をK上の測度論的Riemann構造が満たさないことを示す．

$x, y \in \mathbb{R}^2$に対し$\overline{xy} := \{x + t(y - x) \mid t \in [0, 1]\}$とする．次が本節の主結果である[1]．

定理 5.1 ([4, Theorem 4.19])．$\gamma : [0, 1] \to K$は連続で$\rho_{\mathcal{H}}(\gamma(0), \gamma(1)) = \ell_{\mathbb{R}^2}(\Phi \circ \gamma) > 0$を満たすとする．このとき$\gamma$は線分$\overline{F_w(q_i)F_w(q_j)}$, $w \in \bigcup_{m\in\mathbb{N}}\{1, 2, 3\}^m$, $i, j \in \{1, 2, 3\}$, $i \neq j$, たちの（可算無限個の）「つなぎ合わせ」により得られる．

定理5.1は，$w \in \bigcup_{m\in\mathbb{N}}\{1, 2, 3\}^m$と$i, j \in \{1, 2, 3\}$, $i \neq j$に対し$\Phi(\overline{F_w(q_i)F_w(q_j)}) \cup \overline{\Phi(F_w(q_j))\Phi(F_w(q_i))}$が$\mathbb{R}^2$のコンパクト凸集合の境界になっていることから従う．

[1] [4, Theorem 4.19]の最短測地線の特徴付けはもう少し具体的であるが，煩雑になるので詳細は略す．

系 5.2. $\gamma : [0,1] \to K$ は連続で $\rho_{\mathcal{H}}(\gamma(0),\gamma(1)) = \ell_{\mathbb{R}^2}(\Phi \circ \gamma) > 0$ を満たすとする．このとき $\gamma([0,1]) \setminus \{\gamma(0),\gamma(1)\} \subset \triangle_* := \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \bigcup_{w\in\{1,2,3\}^m} F_w(\overline{q_1q_2} \cup \overline{q_2q_3} \cup \overline{q_3q_1})$.

系 5.2 より，$A,B \subset K$ と $t \in (0,1)$ に対し A,B の $\rho_{\mathcal{H}}$ に関する ***t*-断面**$[A,B]_t^{\rho_{\mathcal{H}}}$ を

$$[A,B]_t^{\rho_{\mathcal{H}}} := \{z \in K \mid {}^{\exists}(x,y) \in A \times B,\ \rho_{\mathcal{H}}(x,z) = t\rho_{\mathcal{H}}(x,y),\ \rho_{\mathcal{H}}(z,y) = (1-t)\rho_{\mathcal{H}}(x,y)\}$$

で定めると，$[A,B]_t^{\rho_{\mathcal{H}}} \subset \triangle_* \cup (A \cap B)$ であることがわかる．また $\mu(\triangle_*) = 0$ であることは容易に示せる．これらの事実から次の系が直ちに得られる．

系 5.3 ([4, Theorem 8.25])**.** $k \in \mathbb{R}$, $N \in [1,\infty)$ とするとき，測度距離空間 $(K,\rho_{\mathcal{H}},\mu)$ は曲率次元条件 $\mathsf{CD}(k,\infty)$, $\mathsf{CD}(k,N)$, 測度の縮小性 $\mathsf{MCP}(k,N)$ のいずれも満たさない．

$\mathsf{CD}(k,N)$, $\mathsf{MCP}(k,N)$ は「$\mathrm{Ric} \geq k$, $\dim \leq N$」に相当する条件を測度距離空間の枠組みで定式化したものである．詳細は [4, Subsection 8.2] とその参考文献を参照されたい．

参考文献

[1] M. Fukushima, Y. Oshima and M. Takeda, *Dirichlet Forms and Symmetric Markov Processes*, 2nd ed., de Gruyter Stud. Math., vol. 19, Walter de Gruyter, Berlin, 2011.

[2] M. Hino, Energy measures and indices of Dirichlet forms, with applications to derivatives on some fractals, *Proc. London Math. Soc.* **100** (2010), 269–302.

[3] N. Kajino, Heat kernel asymptotics for the measurable Riemannian structure on the Sierpinski gasket, *Potential Anal.* **36** (2012), 67–115.

[4] N. Kajino, Analysis and geometry of the measurable Riemannian structure on the Sierpiński gasket, *Contemp. Math.*, vol. 600, 2013, pp. 91–133.

[5] N. Kajino, *Weyl's Laplacian eigenvalue asymptotics for the measurable Riemannian structure on the Sierpiński gasket*, 2014, in preparation.

[6] J. Kigami, Harmonic metric and Dirichlet form on the Sierpinski gasket, in: K. D. Elworthy and N. Ikeda (eds.), *Asymptotic Problems in Probability Theory: Stochastic Models and Diffusions on Fractals (Sanda/Kyoto, 1990)*, Pitman Research Notes in Math., vol. 283, Longman Sci. Tech., Harlow, 1993, pp. 201–218.

[7] J. Kigami, *Analysis on Fractals*, Cambridge Tracts in Math., vol. 143, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2001.

[8] J. Kigami, Measurable Riemannian geometry on the Sierpinski gasket: the Kusuoka measure and the Gaussian heat kernel estimate, *Math. Ann.* **340** (2008), 781–804.

[9] J. Kigami, Resistance forms, quasisymmetric maps and heat kernel estimates, *Mem. Amer. Math. Soc.* **216** (2012), no. 1015.

[10] P. Koskela and Y. Zhou, Geometry and analysis of Dirichlet forms, *Adv. Math.* **231** (2012), 2755–2801.

[11] S. Kusuoka, Dirichlet forms on fractals and products of random matrices, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **25** (1989), 659–680.