

産業計算における近似代数演算の有用性

Usefulness of Approximate Algebra in Industrial Computations

佐々木 建昭 (Tateaki Sasaki) *

筑波大学 名誉教授

稲葉大樹 (Daiju Inaba) †

財団法人 日本数学検定協会

加古富志雄 (Fujio Kako) ‡

奈良女子大学 理学部

Abstract

本稿では、3変数多項式を要素とする 9×9 行列の固有値の特異点 (critical point) での Hensel 級数展開を対象に、近似無平方分解、有効浮動小数 (計算中の桁落ち誤差を推定するため筆者らが考案した)、および近似因数分解の有用性を具体的に示す。

1 本研究の動機と概要

産業計算とはいえ基礎になるのは物理や化学法則で、そこでは定数や状態変数等は全て記号で表される。さらに、工学等でもモデル変量等を記号で表すのが当たり前で、それらを見ると浮動小数の出番はないように思える。しかし、ある段階から定数やモデル変量に実際の数値を代入して状態の変化を確認することが必要になる。その際にも数式を計算機で扱うならば (それは当然の願望だ)、途端に近似代数が必要になる。近似代数は産業分野では不可欠な演算だと確信しており、応用の道を開拓していこうと思っている。

2章で実際に見ることになるが、定数や一部のモデル変量に現実の数値を代入すると、結果式は大抵、大きさが非常に異なる係数を持つものになる。そのような扱い難い数式に対して、大きな桁落ち誤差が発生し得る代数演算を安定かつ精度よく行うのが近似代数の使命である。決して容易ではないが、逆にやり甲斐があると言える。

Hensel 級数の計算自体は産業応用とは言えないが、浮動小数で特異点における計算を行うのは際どく、扱う数式には大きさが非常に異なる係数が同居している。その意味で、産業的計算と言えなくもない。昨年度の数理研究集会で、近似代数の産業応用として、Hensel 級数を用いて過酷事故時の航空機を制御したいと言ったのだが、線形制御理論の枠組みでは使えないと分った。それでは半年間の研究が無駄になるので、Hensel 級数の計算で近似代数の幾つかの算法の有用性を示そうと考えた次第である。本稿は、国際会議 [5] で発表した内容を解り易く解説したものである。

*sasaki@math.tsukuba.ac

†d.inaba@su-gaku.net

‡kako@ics.nara-wu.ac.jp

2 Hensel 級数と計算対象の代数方程式

既約な多項式 $F(x, \mathbf{u}) \stackrel{\text{def}}{=} F(x, u_1, \dots, u_\ell)$ が与えられたとき、 F の x に関する根 $\phi(\mathbf{u}) \stackrel{\text{def}}{=} \phi(u_1, \dots, u_\ell)$ の級数展開を計算したい。展開点を $\mathbf{s} \stackrel{\text{def}}{=} (s_1, \dots, s_\ell) \in \mathbb{C}^\ell$ とする。 $F(x, \mathbf{s})$ が重根を持つとき、 $\mathbf{s}$ を $F(x, \mathbf{u})$ の特異点 (critical point) と言う。展開点が特異点でないとき、 $\phi(\mathbf{u})$ の展開は通常の Taylor 展開に他ならない。展開点が特異点で 1 変数 ($\ell = 1$) の場合、展開級数はよく知られた Puiseux 級数 (u_1 に関する分数べきの級数; 1676 年に Newton が導入し、1850 年に Puiseux が再発見した) である。一方、 $\ell \geq 2$ の場合が本稿で扱う Hensel 級数である。Hensel 級数という名称は初耳という読者も多いと思われるので、簡単に説明する。

$\ell = 1$ の場合を $\ell \geq 2$ に一般化すれば、欲しい級数展開が得られると思われるだろう。実際、それは可能である。Puiseux 級数の計算は Newton による逐次算法で計算できるが、その算法は係数が代数的閉体に属すれば実行できる。1 変数の Puiseux 級数全体は代数的閉体を成すから、係数に関する数学的帰納法により、 $\ell \geq 2$ の場合の Puiseux 級数が計算できるのである。しかし、得られる級数は応用面での使用に全く不向きで、数学的性質の解明さえ容易ではない。Puiseux 級数は元々が負べきも含む級数のため、多変数 Puiseux 級数は各変数に関する分数べきの単項式の和となり、しかも $-\infty$ べきも含むからである。たとえば、その収束領域はどうか、ほとんど解明されていない。 $-\infty$ べきを回避するため 1995 年、McDonald は $u_i \rightarrow u_i t^{r_i}$ ($i = 1, \dots, \ell$)、ただし t は人為的変数で $r_1, \dots, r_\ell$ は互いにその比が無理数となる正の実数、なる変換で t に関する分数べきの Puiseux 級数を定義したが [1]、余りに無理な方法であると言えよう。

それに対して筆者らは、多変数 Hensel 構成を特異点でも可能なように拡張し (拡張 Hensel 構成と命名)、拡張 Hensel 構成を用いて多変数代数関数の特異点での “級数展開” を得ることに成功した [6]。得られる級数は、多変数 Puiseux 級数とは全く異なり、コンパクトにまとまった形で表現されるため、収束性も簡単に解明できるもので (ただし、収束領域公式の導出には未だ成功していない) [7, 8, 9, 10]、Hensel 級数と命名した。さらに各項を位数づけするため、係数が浮動小数でも安定に計算できるというメリットもある。

次章以降に必要なので、Hensel 級数の計算法を簡単に復習しておく。一般性を失うことなく $F(x, \mathbf{s})$ は $x = 0$ に n 重根 ($n \geq 2$) を持つとする: $F(x, \mathbf{s}) = x^n \tilde{F}_0(x)$ 。 x^n と $\tilde{F}_0(x)$ は互いに素なので、これらを初期因子にして $F(x, \mathbf{u})$ を Hensel 構成することができる; 以下、簡単のため、 $\mathbf{u} = \mathbf{s} + \mathbf{v}$ とおく。

$$F(x, \mathbf{s} + \mathbf{v}) \equiv H_k(x, \mathbf{v}) T_k(x, \mathbf{v}) \pmod{(v_1, \dots, v_\ell)^{k+1}}, \quad H_k(x, \mathbf{0}) = x^n. \quad (2.1)$$

言うまでもないが、 T_∞ の根が Taylor 級数根を与え、 H_∞ の根が Hensel 級数根を与える。以下、 H_∞ を H と表し、 $H(x, \mathbf{v})$ を x の 1 次因子へ分解することを考える。

仮定より $H(x, \mathbf{0}) = x^n$ であるから、 $H(x, t\mathbf{v})$ に対し、横軸に x の指数 e_x を、縦軸に t の指数 e_t を選べば、 $H(x, t\mathbf{v})$ の各項は下図のようにプロットされる (変数 t は $v_1, \dots, v_\ell$ の全次数を表すが、以下にみるように Hensel 構成の法 (modulus) にも使われる)。図で、異なる複数個のプロット点を通る直線で、その直線より下にはどの項もプロットされない

ものがただ一つ存在する。それを Newton 線と呼び、Newton 線上にプロットされた全ての項の和を Newton 多項式と呼び、 $H_{\text{New}}(x, v)$ と表す。

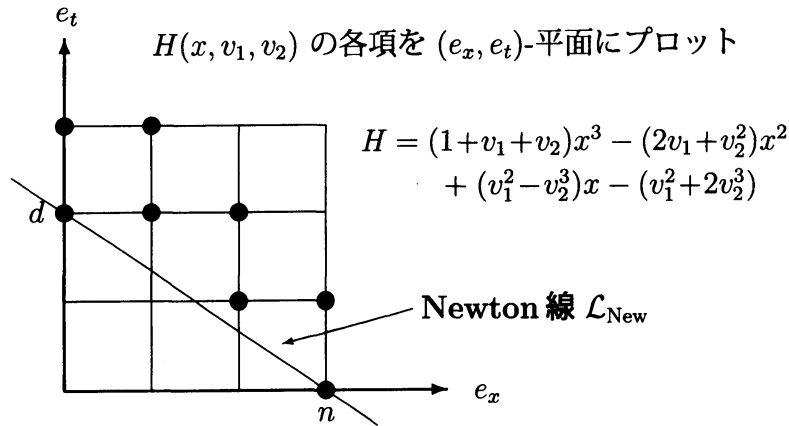


図1 Newton 多項式: $H_{\text{New}} = x^3 - v_1^2$

Newton 多項式の根を $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ とする。これらの根は v の代数関数であることに注意されたい。さらに、各根は単根とは限らないが、ここでは α_1 が単根である場合を扱う：

$$H_{\text{New}}(x, v) = (x - \alpha_1(v)) \cdots (x - \alpha_n(v)). \quad (2.2)$$

単根の仮定より、 $G_0(x, v) \stackrel{\text{def}}{=} (x - \alpha_1(v))$ と $H_0(x, v) \stackrel{\text{def}}{=} H_{\text{New}}(x, v)/(x - \alpha_1(v))$ は互いに素な x の多項式ゆえ、初期因子を $G_0(x, v)$ と $H_0(x, v)$ とする $H(x, v)$ の Hensel 構成が可能である。ここで、Hensel 構成の法は次のように定める。Newton 線と e_x 軸、 e_t 軸との交点をそれぞれ $(n, 0)$, $(0, d)$ とする； n は整数だが d は整数とは限らない。正の 2 整数 $\hat{n}$, $\hat{d}$ は、 $\hat{d}/\hat{n} = d/n$ かつ $\gcd(\hat{n}, \hat{d}) = 1$ を満たすとする。このとき、法 I_i を

$$I_i = (x^n t^0, x^{n-1} t^{\hat{d}/\hat{n}}, \dots, x^0 t^{\hat{d}}) \times (x^{1/\hat{d}}, t^{1/\hat{n}})^i, \quad (i = 1, 2, \dots), \quad (2.3)$$

と定める；ここで、 $(a, b, \dots, c)$ は $a, b, \dots, c$ を生成元とするイデアルである。このとき、 $H(x, v) \equiv H_{\text{New}}(x, v) \pmod{I_1}$ が成立し、通常の Hensel 構成と同じ手順により

$$H(x, v) \equiv G_i(x, v) H_i(x, v) \pmod{I_{i+1}} \quad (i = 1, 2, \dots, k) \quad (2.4)$$

を満たす $G_i(x, v)$ と $H_i(x, v)$ が計算できる。この算法が 拡張 Hensel 構成 である。このとき、 $G_\infty(x, v) = x - \phi(v)$ となっている。 α_1 が重根の場合には、その根の位置まで原点を平行移動し、再び拡張 Hensel 構成を行えばよい。

以上の構成法が示すように、Hensel 級数はその初項 α_1 が既に v の代数関数で $H(x, s+v)$ の根の様子をある程度取り込んでいるので、展開次数を上げれば十分に近似がよくなると期待できる。また、第 k 次展開に対する一般項を $(k-1)$ 次以下の項で表現する漸化式も簡単に書き下すことができる。有限次で打ち切った級数がどれくらい近似がよいか、その収束領域はどうであるか、などについては文献 [8, 9] を参照されたい。

我々は(産業界的な)具体例で Hensel 級数を計算したくて、『航空機の線形制御理論』を自作した；詳細は昨年度の数理研研究集会の報告書 [4] を参照されたい。航空機の位置を (x, y, z) とし、速度を (v_x, v_y, v_z) とする。飛行中の機体は傾いており、その傾斜角は主翼を貫く翼軸が水辺面から上下に ϕ 、機体を貫く機軸が上下に θ 、進行方向から左右に ψ 、であるとする。我々が興味あるのは航空機の数と傾斜角の時間変化なので、状態変数 $(v_x, v_y, v_z, \psi, \theta, \phi, \omega_\psi, \omega_\theta, \omega_\phi)$ に対して、時間 t に関する微分方程式として運動方程式を立てる；ここで、 $(\omega_\psi, \omega_\theta, \omega_\phi)$ は角速度、すなわち (ψ, θ, ϕ) の時間微分である。機体に働く力は速度や角度に関して非線形 ($\sin(\theta)$ や $\cos(\psi)$ などが現れる) だが、機体の傾斜角度は小さいとして線形近似を行えば、9 連立の 1 階線形常微分方程式が得られる。線形常微分方程式系の解は係数行列の固有値で特徴づけられる。そこで、パラメータ行列の固有値である多変数代数関数を特異点で Hensel 級数展開するのである。

線形常微分方程式系の係数行列は次式の $A_0 + A_F$ となる。

$$A_0 = \begin{pmatrix} -2D & 0 & 0 & 0 & -\alpha_{m0}L_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -D-P_v & 0 & -\alpha_{m0}L_0 & 0 & T+P_v & 0 & 0 & 0 \\ 2\alpha_{m0}L_0 & 0 & -D-L_0-P_h & 0 & L_0+T+P_h & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha_{m0}\Lambda+Q_{vv} & 0 & 0 & 0 & -\alpha_{m0}\Lambda-Q_{vv} & 0 & 0 & -\alpha_{m0}Q_o \\ 0 & 0 & Q_h & 0 & -Q_h & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_v & 0 & 0 & 0 & -Q_v & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -f_+F_{ac} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -f_+F_{ac} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -f_+F_{as} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

幾つかの重要な記号の意味を簡単に説明する。 T, L, D はそれぞれ推力 (thrust), 揚力 (lift), 抗力 (drag) を表す。機体には $-(v_x, v_y, v_z)$ の速さで空気流が吹き付けるが、これが揚力を産む。機軸が空気流となす上下角度を迎え角 (angle of attack) と言い、 α で表す。揚力は $|\alpha| \lesssim 15^\circ$ の範囲でほぼ α に比例するが、水平飛行時でも必要な揚力を産むよう主翼が設計されているので、揚力を $(\alpha_m + \alpha)L_0 = \alpha_{m0}L_0$ と近似する。推力は平均推力 T_0 に e_+ の割合で増減するエンジン出力が加わったものとみなし $T = (1 + e_+)T_0$ と表す。重要な揚力発生装置にフラップ (flap) がある。フラップは主翼後部にあり、定常飛行時は主翼の一部となっているが、大揚力や減速用抗力が必要な場合には主翼からせり出し

て、主翼から最大角度 α_F 以内で傾斜することにより目的をはたす。フラップによる揚力は f_+F , $|f_+| \leq 1$ で、 $F_{ac} = F \cos(\alpha_F)$, $F_{as} = F \sin(\alpha_F)$ である。

上記行列の固有多項式はパラメータ 15 個の次の 9 次多項式である。

$$XC(X) = |XI_9 - (A_0 + A_F)|, \quad C(X) = X^8 + C_7X^7 + \cdots + C_2X^2 + C_1X + C_0.$$

後で用いるため、 C_0 , C_1 および C_2 を列挙する。

$$\left\{ \begin{array}{l} C_0 = 2 \times \alpha_{m0} Q_h Q_v Q_o \times (\alpha_{m0} L + f_+ F_{ac}) \\ \quad \times \{(2T_0 + T_0 e_+ - D)D - \alpha_{m0} L(\alpha_{m0} L + f_+ F_{ac}) - D f_+ F_{ac}\}, \\ C_1 = -\alpha_{m0} Q_h \times [16 \text{ terms}] + 2 \times D Q_h \times (2T_0 + T_0 e_+ - D - f_+ F_{as}) \\ \quad \times \{(2T_0 + T_0 e_+ - D)Q_v - f_+ Q_{vv} F_{ac}\}, \\ C_2 = \alpha_{m0} \times [22 \text{ terms}] \\ \quad + Q_h Q_v \times \{T_0^2(2 + e_+)^2 - D(12T_0 + 6T_0 e_+ - 5D)\} \\ \quad + f_+ F_{as} Q_h Q_v \times (-2T_0 - T_0 e_+ + 3D) \\ \quad + f_+ F_{ac} Q_h Q_{vv} \times (-2T_0 - T_0 e_+ + 3D + f_+ F_{as}), \end{array} \right. \quad (2.5)$$

注釈： $Q_h = 0$ の場合には C_0 , C_1 が共に 0 となるから、 $Q_h = 0$ は特異点である。 Q_h は水平尾翼によるトルク(回転力)を表すから、水平尾翼がもげてしまうと航空機は非常に不安定になる。このような状態をエンジン出力操作とフラップ操作でなんとか制御しようというのが当初の予定の一つだった。しかし、尾翼の破損度を変量として Hensel 級数を計算することが不自然なため、この予定は破棄した。

航空機の運動方程式は多くのパラメータで規定されるが、ほとんどは機体定数であり、パイロットによって制御されるパラメータは少なく、上記モデルでは e_+ と f_+ がそうである。また、 α_{m0} は状態変数の変化とともに時々刻々変化する。本稿ではこれら三つ以外のパラメータには標準的旅客機の機体定数を推定して代入し、さらに $\alpha_{m0} \rightarrow \alpha_{m0}/100$ とスケーリングし、その結果式を $\bar{C}(X, \alpha_{m0}, e_+, f_+) = \bar{C}(X, \mathbf{u})$ と表す。

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{C}(X, \mathbf{u}) = X^8 + \bar{C}_7(\mathbf{u})X^7 + \cdots + \bar{C}_2(\mathbf{u})X^2 + \bar{C}_1(\mathbf{u})X + \bar{C}_0(\mathbf{u}), \\ \bar{C}(X, \mathbf{0}) = X^8 + \cdots + 182.2 \cdot X^4 + 1.383 \cdot X^3 + 0.00028 \cdot X^2 + 1.41 \cdot e^{-8} X. \end{array} \right. \quad (2.6)$$

次章以降では、 $\bar{C}(X, \mathbf{u})$ が $X = 0$ に重根を持つように展開点 $\mathbf{s}$ を探索し(したがって $\mathbf{s}$ は特異点である)、特異点 $\mathbf{s}$ での Hensel 級数根を計算することにする。

3 特異点の探索… 近似無平方分解の利用

与えられた 1 変数多項式 $F(x)$ に対して

$$F(x) = F_1(x)F_2^2(x) \cdots F_m^m(x) + \delta F(x), \quad \|\delta F\|/\|F\| = \varepsilon \ll 1, \quad (3.1)$$

ただし、各 $F_i(x)$ は近接度 $O(\sqrt{\varepsilon})$ 以下の近接根を持たない、

と分解することを許容度 ε の近似無平方分解という。無平方分解は多項式とその導関数の GCD 演算の繰り返しで計算でき、近接根の中心は各 $F_i(x)$ の根として計算できる。

近似無平方分解は非常に単純な演算だが、多くの情報が得られ、計算の安定性が高い。 $F(x)$ の根は半径 1 の複素円盤内に広く分布しており、 m 個が近接度 δ の近接根とする。 $dF(x)/dx$ ではこれらの近接根は近接度 $O(\delta)$ の $m-1$ 重近接根となり、近接根クラスターの重心は $O(\delta^2)$ の範囲で一致する。そのため両者の近似 GCD の許容度は $O(\delta^2)$ となる。一方、 $F(x)$ と $G(x)$ は相互近接度 $O(\delta)$ の近接根を持つが、両者に特別な関係がないならば、両者の近接根クラスターの重心は一般に $O(\delta)$ 離れていて、そのため両者の近似 GCD の許容度は $O(\delta)$ となる。すなわち、近似無平方分解は近似 GCD より遥かに安定に計算できるのである。また、許容度を通して近接根クラスターのサイズが分る。

本題に戻り、一般に $F(x, \mathbf{u})$ の特異点を探すことを考えよう。 $\mathbf{s} \in \mathbb{C}^\ell$ が特異点である必要十分条件は $\gcd(F(x, \mathbf{s}), dF(x, \mathbf{s})/dx) \neq 1$ である。従変数の個数が ℓ なので、この条件を満たす点 $\mathbf{s}$ は一般に $\ell-1$ 次元多様体を成す。したがって、探索すべき領域を何らかの形で指定する必要がある。本稿では『 $\mathbf{u}$ の原点近傍の特異点 $\mathbf{s}$ を探す』との条件をつける。もちろん、前章の $\bar{C}(X, \mathbf{s}) \propto X^2$ との条件はそのままである。

我々は、 $\bar{C}(X, \alpha_{m0}, e_+, f_+)$ の従変数に関する原点近傍の特異点を探すのだから、1 変数多項式 $\bar{C}(X, 0, 0, 0)$ を許容度 $10^{-3}, 10^{-4}, \dots, 10^{-15}$ で近似無平方分解してみた。すると、次の三つの異なる分解が得られた：

$$\left\{ \begin{array}{ll} (X + 0.0019239 \dots)^4 \times (X^4 + 1.73 \dots X^3 + \dots + 182 \dots) & (\text{tol } 0.01793 \dots), \\ (X + 6.5961 \dots \text{e-}5)^3 \times (X^5 + 1.74 \dots X^4 + \dots + 1.41 \dots) & (\text{tol } 3.63 \dots \text{e-}6), \\ (X - 9.9999 \dots \text{e-}5)^2 \times (X^6 + 1.74 \dots X^5 + \dots + 1.41 \dots) & (\text{tol } 0.00000 \dots). \end{array} \right. \quad (3.2)$$

この近似無平方分解から、 $\mathbf{u}$ の原点近傍には、2 個の近接根を含む非常に小さいクラスターと、3 個の近接根を含むやや大きいクラスターがあることがわかる。このことは $\mathbf{u}$ の原点近傍に求める特異点があることを示唆している。

$F(X, \mathbf{s}) \propto X^2$ を満たす特異点を探索するのだから、 $\bar{C}_1(\mathbf{s}) = \bar{C}_0(\mathbf{s}) = 0$ を満たす $\mathbf{s} \in \mathbb{C}^3$ を求める。この系は過少決定系ゆえ $\alpha_{m0} = 0$ とすると、 $\bar{C}_0 = 0$ となるので、さらにもう一つの変数を 0 とおいて特解を求める。すると次の三つの解が得られる。

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{s}_1 : (\alpha_{m0}, e_+, f_+) = (0, 0, 0.0081397 \dots), \\ \mathbf{s}_2 : (\alpha_{m0}, e_+, f_+) = (0, 0, 0.0149253 \dots), \\ \mathbf{s}_3 : (\alpha_{m0}, e_+, f_+) = (0, 0.0500000 \dots, 0). \end{array} \right. \quad (3.3)$$

$\bar{C}_2(\mathbf{s}_2) \neq 0$ だが $\bar{C}_2(\mathbf{s}_3) = 0$ なので、 $\mathbf{s}_2$ は 2 次の特異点だが $\mathbf{s}_3$ は 3 次の特異点である。なお、(2.5) より $\bar{C}_1(0, e_+, f_+)$ は因数分解されることが分かり、 $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3$ は $(e_+, f_+) = (0, (2T_0 - D)Q_v/Q_{vv}F_{ac})$, $(e_+, f_+) = (0, (2T_0 - D)/F_{as})$, $(e_+, f_+) = (2T_0 - D)/T_0, 0)$ にそれぞれ対応することが分る。

産業分野や科学分野で現れる数式は、定数やモデル変量を記号で表すと気付かないが、実際に数値を代入すると大きさが非常に異なる係数が混在するのが普通である。既に我々

は $\alpha_m 0 \rightarrow \alpha_{m0}/100$ として“正規化”したが、(3.2)の第一式は $\bar{C}(X, \mathbf{u})$ の更なる正規化に使える。 $\bar{C}(X, 0)$ は4近接根を持つから、 $\bar{C}(X, 0)$ をスケール変換して、 X^4 の係数を1にするのである。具体的には次のスケール変換を行う。

$$\begin{cases} \bar{C}(X, \mathbf{u}) \rightarrow \tilde{C}(X, \mathbf{u}) \stackrel{\text{def}}{=} \bar{C}(\bar{s}X, \mathbf{u})/\bar{s}^8, & \bar{s} = \{\text{coef}(\bar{C}(X, 0), X^4)\}^{1/4}, \\ \tilde{C}(X, 0) = X^8 + \cdots + X^4 + 0.0020 \cdots X^3 - \cdots + 1.57 \cdots e^{-12}X. \end{cases} \quad (3.4)$$

ここで、 $\text{coef}(F(X), X^k)$ は多項式 $F(X)$ の X^k の係数を表す。

上記では条件 $\bar{C}(X, \mathbf{s}) \propto X^2$ をつけたから関係式 $\bar{C}_1(\mathbf{s}) = \bar{C}_0(\mathbf{s}) = 0$ が使えた。この条件がない場合には次のようにすればよい。まず、 $F(X, 0)$ の近似無平方分解から近接根クラスタの中心値 X_c を決め、次に X の原点を X_c に移動し、近接根クラスタのサイズを最小化する値として $\mathbf{s}$ を決める。そして、 $\mathbf{s}$ を元に X_c を補正し、という具合に逐次的に決めていけばよい。

4 特異因子の分離と有効浮動小数の利用

Hensel 級数計算の次の手順は第2章の算式 (2.1) により、 $\tilde{C}(X, \mathbf{v})$ から一般 Hensel 構成で特異因子 $H(X, \mathbf{v})$ を分離することである。下記の例のため与式を $F(x, \mathbf{v})$ とし、 $F(x, 0)$ を互いに素な多項式 $H_0(x), T_0(x)$ の積に因数分解する。そして、

$$\begin{cases} A_i(x)H_0(x) + B_i(x)T_0(x) = x^i & (i = 1, 2, \dots, k), \\ \deg(A_i) < \deg(T_0), & \deg(B_i) < \deg(H_0), \end{cases} \quad (4.1)$$

を満たす1変数多項式 $A_i(x), B_i(x)$ を計算し、 H_0, T_0 を初期因子として $F(x, \mathbf{v})$ の Hensel 構成を実行するのである。しかし、ここに大きな落とし穴がある。 H_0 と T_0 が相互近接根を持てば Hensel 構成で桁落ちが発生し [11]、多数の 完全誤差項(係数が誤差のみからなる項) が現れるのである。完全誤差項は筆者らが考案した 有効浮動小数 で除去できる(区間数を使えば除去は完璧だが、区間幅が急速に増大する欠点がある)。

まず、有効浮動小数 (effective float、eFLOAT と略す) を説明する；詳細については [2] を参照されたい。有効浮動小数は $\#e(f, e)$ と表現される。ここで、 f は従来の浮動小数そのものであり(演算も従来どおり実行される)、 e は次の算式で計算される。

$$\begin{cases} \#e(f_a, e_a) + \#e(f_b, e_b) \implies \#e[f_a + f_b, \max\{e_a, e_b\}], \\ \#e(f_a, e_a) - \#e(f_b, e_b) \implies \#e[f_a - f_b, \max\{e_a, e_b\}], \\ \#e(f_a, e_a) \times \#e(f_b, e_b) \implies \#e[f_a \times f_b, \max\{|f_b e_a|, |f_a e_b|\}], \\ \#e(f_a, e_a) \div \#e(f_b, e_b) \implies \#e[f_a \div f_b, \max\{|e_a/f_b|, |f_a e_b/f_b^2|\}]. \end{cases} \quad (4.2)$$

実際に演算してみると分ると思うが、 e は f に発生する桁落ち誤差を近似的に表すように計算される。 e の初期値は、 f が入力時に浮動小数精度以上の誤差を持つ場合にはその誤差に設定されるが、そうでない場合には浮動小数精度より幾分大きい値に設定される；

筆者らのシステムでは、倍長浮動小数 (resp. 多倍長浮動小数) に対しては $10^{-15}|f|$ (resp. $100 \times [f \text{ の初期精度}]$) に設定している。さらに、 $e < |f|$ となった場合にはその数を直ちに 0 としているが、このことが完全誤差項を除去しているのである。

例 (完全誤差項の出現と有効浮動小数による除去) H_0, T_0 を下記の多項式とする。

$$\begin{aligned} H_0(x) &= (x - 0.0001) \cdot (3x^2 + x - 2)/3.0 \\ T_0(x) &= (x^2 + 0.0002x) \cdot (7x^2 - 5x + 3)/7.0 \end{aligned}$$

上記 H_0, T_0 に対し A_i, B_i を拡張互除法で計算し、 $A_i H_0 + B_i T_0$ (答は x^i になるはず) を浮動小数 (FLOAT) と有効浮動小数 (eFLOAT) で計算した結果 ($i = 1, 3, 5$) を表に示す。

i	表 1 : FLOAT による計算
1	$+ 2.24\text{e-}8 x^5 + \cdots + 0.9999999999998 x$
3	$- 7.75\text{e-}9 x^6 + \cdots + 1.000000001092 x^3 + \cdots$
5	$- 1.66\text{e-}9 x^6 + 0.9999999967943 x^5 + \cdots$

i	表 2 : eFLOAT による計算
1	$\#e(0.9999999999998, 5.43\text{e-}12) x$
3	$\#e(1.000000001092, 0.000121) x^3$
5	$\#e(0.9999999967943, 0.000258) x^5$

表 1 をみると、通常の浮動小数による計算では $2.24\text{e-}8 x^5$, $7.75\text{e-}9 x^6$, $1.66\text{e-}9 x^6$ などの現れるべきではない項が現れていることが分る。これらの項は、正確な計算では打ち消し合って 0 となるはずだが、浮動小数の機械誤差のため 0 とはならずに残ったものであり、全く意味のない項である。(2.6) をみると、元々の多項式も微小項 (こちらは係数の全桁が意味がある) を持つが、同じ程度の大きさの無意味な項が頻繁に現れるようでは、計算は非常に危険と言わざるをえず、完全誤差項は是非とも除去しなければならない。

一方、有効浮動小数による計算では、完全誤差項はすべて除去されていることが分る。なお、有効浮動小数は桁落ち誤差の大きさを推定してくれるが、桁落ちを除去してくれる訳ではなく、桁落ち対策は別に必要であることを表 2 は改めて示している。□

話を元に戻し、 $\tilde{C}(X, \mathbf{u})$ から特異因子を分離することを考えよう。前章では原点近傍で 2 次と 3 次の特異点を発見したが、簡単のため、本章では 2 次の特異点 s_2 のみを扱う。最初の操作は特異点を原点に移動することである：

$$\begin{cases} \tilde{C}(X, \mathbf{u}) \rightarrow D(X, \mathbf{v}) \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{C}(X, \mathbf{v} + \mathbf{s}_2), & \mathbf{v} = \mathbf{u} - \mathbf{s}_2, \\ D(X, \mathbf{0}) = X^8 + \cdots + 0.00214 \cdots X^3 + 4.81 \cdots \text{e-}8 X^2. \end{cases} \quad (4.3)$$

2 次の特異因子を分離するのだからと、 $H_0(X) = X^2$, $T_0(X) = D(X, \mathbf{0})/X^2$ を初期因子として Hensel 構成を実行すれば落とし穴に落ちる ($H_0(X) = X^2$ ゆえ、桁落ち量はかなり

減少する)。そこで、まず $D(X, v)$ から原点近傍の 4 近接根に対応する因子を分離する。

$$\begin{cases} D(X, v) \equiv \bar{H}_k(X, v)T_k(X, v) \pmod{(v)^{k+1}}, \\ \bar{H}_k(X, 0) = X^4 + \bar{s}_3 X^3 + \cdots \quad (4 \text{ 近接根に対応}). \end{cases} \quad (4.4)$$

$\bar{H}_k(X, v)$ を分離したあと、経験則に基づき次の規格化を行う。

$$\begin{cases} \bar{H}_k(X, v) \rightarrow \tilde{H}_k(X, v) \stackrel{\text{def}}{=} \bar{H}_k(\bar{s}X, v)/\bar{s}^4, \quad \bar{s} \simeq 0.0021, \\ \tilde{H}_k(X, 0) = X^4 + X^3 + 0.01046283125455X^2. \end{cases} \quad (4.5)$$

その後、 $\hat{H}_0(X) = X^2$, $T_0(X) = \tilde{H}_k(X, 0)/X^2$ を初期因子にして $\tilde{H}_k(X, v)$ を Hensel 構成すれば、特異因子 $\hat{H}_k^{(2)}$ が大きな桁落ちを受けることなく分離できる。

$$\begin{aligned} \hat{H}_2^{(2)} = & X^2 + X^1 (-46.00 \cdot \alpha_{m0} - 0.2537 \cdot e_+ + 0.8499 \cdot f_+ \\ & + 202961 \cdot \alpha_{m0}^2 - 1106 \cdot \alpha_{m0}e_+ + 3715 \cdot \alpha_{m0}f_+ \\ & + 4.86 \cdot e_-5e_+^2 - 0.00033 \cdot e_+f_+ + 0.00055 \cdot f_+^2 + \cdots) \\ & + X^0 (-5.665 \cdot \alpha_{m0}^2 - 11.70 \cdot \alpha_{m0}e_+ - 39.20 \cdot \alpha_{m0}f_+ \\ & + 24745 \cdot \alpha_{m0}^3 - 51624 \cdot \alpha_{m0}^2e_+ + 172562 \cdot \alpha_{m0}^2f_+ \\ & + 280.7 \cdot \alpha_{m0}e_+^2 - 1880 \cdot \alpha_{m0}e_+f_+ + 3150 \cdot \alpha_{m0}f_+^2 + \cdots). \end{aligned} \quad (4.6)$$

5 Newton 多項式の近似因数分解の利用

$\hat{H}_k^{(2)}$ と同様に計算すると、特異点 s_3 での特異因子 $\hat{H}_k^{(3)}$ は次式となる。

$$\begin{aligned} \hat{H}_k^{(3)} = & X^3 + X^2 (+0.7532 \cdot \alpha_{m0} - 0.5128 \cdot e_+ + 2.434 \cdot f_+ \\ & + 4.011 \cdot \alpha_{m0}^2 - 7.81 \cdot e_-5\alpha_{m0}e_+ + 8.387 \cdot \alpha_{m0}f_+ \\ & + 6.24 \cdot e_-5e_+^2 - 0.00049 \cdot e_+f_+ + 0.00105 \cdot f_+^2 + \cdots) \\ & + X^1 (-15.96 \cdot \alpha_{m0}^2 - 0.1931 \cdot \alpha_{m0}e_+ + 0.0657 \cdot e_+^2 \\ & + 1.352 \cdot f_+^2 + 2.993 \cdot \alpha_{m0}^3 - 1.027 \cdot \alpha_{m0}^2e_+ + \cdots) \\ & + X^0 (+4.093 \cdot \alpha_{m0}^2e_+ - 13.71 \cdot \alpha_{m0}^2f_+ + 8.559 \cdot \alpha_{m0}e_+f_+ \\ & - 28.67 \cdot \alpha_{m0}f_+^2 - 0.0020 \cdot \alpha_{m0}e_+^2f_+ + 0.0152 \cdot \alpha_{m0}e_+f_+^2 \\ & - 0.027 \cdot \alpha_{m0}f_+^3 - 0.00099 \cdot \alpha_{m0}^2e_+^2 + \cdots). \end{aligned} \quad (5.1)$$

これらの Newton 多項式 $\hat{H}_{\text{New}}^{(2)}$, $\hat{H}_{\text{New}}^{(3)}$ はそれぞれ次式となる。

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\text{New}}^{(2)} = & X^2 \\ & + X^1 (-46.00100771767\alpha_{m0} - 0.2536988065195e_+ + 0.8498910018404f_+) \\ & + X^0 (-5.664934365224\alpha_{m0}^2 + 11.70156007615\alpha_{m0}e_+ - 39.20022625510\alpha_{m0}f_+), \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\text{New}}^{(3)} = & X^3 \\ & + X^2 (+0.7532833020638\alpha_{m0} - 0.5128205128205e_+ + 2.434021263290f_+) \\ & + X^1 (-15.96482577252\alpha_{m0}^2 - 0.1931495646317\alpha_{m0}e_+ - 32.73394830102\alpha_{m0}f_+ \\ & + 0.06574621959237e_+^2 - 0.6241080162281e_+f_+ + 1.352924904989f_+^2) \\ & + X^0 (+4.093545069876\alpha_{m0}^2e_+ - 13.71337598409\alpha_{m0}^2f_+ \\ & + 8.559230600651\alpha_{m0}e_+f_+ - 28.67342251218\alpha_{m0}f_+^2). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Hensel 級数を計算するにはこれらを 1 次因子に因数分解しなければならない。明示的に分解できない場合には、代数関数 $\alpha_1(v), \dots, \alpha_n(v)$ を記号として導入し、Newton 多項式を定義多項式として計算することになる。しかし、それは計算量が大きく、明示的に因数分解できればそれに越したことはない。

我々は、 $\hat{H}_{\text{New}}^{(2)}$ は近似因数分解可能と予想したが $\hat{H}_{\text{New}}^{(3)}$ は無理だろうと思った。しかし、我々の数式処理システム GAL にかけてところ、両者とも見事に近似因数分解できた：

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\text{New}}^{(2)} = & (X - 46.12382784406\alpha_{m0}) \times \\ & (X + 0.1228201263873\alpha_{m0} - 0.2536988065195e_+ \\ & + 0.8498910018404f_+) \quad (\text{tol } 1.07\text{e-}12), \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\text{New}}^{(3)} = & (X - 0.2564102564101e_+ + 0.8589743589743f_+) \times \\ & (X^2 + 0.7532833020638X\alpha_{m0} - 0.2564102564104Xe_+ \\ & + 1.575046904316Xf_+ \\ & - 15.96482577252\alpha_{m0}^2 - 33.38099934254\alpha_{m0}f_+) \quad (\text{tol } 1.82\text{e-}13). \end{aligned} \quad (5.5)$$

こうして計算した $\hat{H}^{(2)}$ の Hensel 級数根 $\phi_i^{(2)}(v)$ ($i = 1, 2$) を 1 次まで記す。

$$\begin{aligned} \phi_1^{(2)}(v) = & -0.1228201263873\alpha_{m0} + 0.2536988065195e_+ - 0.8498910018404f_+ \\ & - (182.7\alpha_{m0}^3 - 2.461\alpha_{m0}^2e_+ + 388.8\alpha_{m0}^2f_+ - 4.918\text{e-}11\alpha_{m0}^2 \\ & + 7.401\text{e-}3\alpha_{m0}e_+^2 - 2.156\alpha_{m0}e_+f_+ - 1.781\text{e-}12\alpha_{m0}e_+ \\ & + 7.109\alpha_{m0}f_+^2 - 2.943\text{e-}16\alpha_{m0}f_+ - 1.234\text{e-}5e_+^3 \\ & + 1.240\text{e-}4e_+^2f_+ - 4.155\text{e-}4e_+f_+^2 + 4.640\text{e-}4f_+^3) \\ & / (46.25\alpha_{m0} - 0.2537e_+ + 0.8499f_+) + \dots, \\ \phi_2^{(2)}(v) = & +46.12382784406\alpha_{m0} \\ & - (9.386\text{e6}\alpha_{m0}^3 - 1.027\text{e4}\alpha_{m0}^2e_+ + 3.439\text{e5}\alpha_{m0}^2f_+ \\ & + 1.741\text{e-}10\alpha_{m0}^2 + 280.7\alpha_{m0}e_+^2 - 1.881\text{e3}\alpha_{m0}e_+f_+ \\ & + 1.096\text{e-}12\alpha_{m0}e_+ + 3.151\text{e3}\alpha_{m0}f_+^2 + 2.295\text{e-}12\alpha_{m0}f_+) \\ & / (46.25\alpha_{m0} - 0.2537e_+ + 0.8499f_+) + \dots. \end{aligned}$$

高次項は一般に有理式になるのが Hensel 級数の特徴である。なお、上記の Hensel 級数 $\phi_i^{(2)}(v)$ は Mathematica にインプリメントしたプログラムで計算したので、完全誤差項の除去は行われてない。上記の 2 式には $O(10^{-11}) \sim O(10^{-16})$ の微小項がいくつかあるが、多分それらは完全誤差項であろう。

6 あとがき

第 1 章で述べたように、産業分野や科学分野の浮動小数係数多項式は近似代数計算にとって非常に危険である。しかし、そのような数式も、桁落ちの発生メカニズムを解明して桁落ち誤差を大幅に低減し、有効浮動小数などで完全誤差項を除去すること等により、

かなり実用的レベルに達したと思う。Hensel 級数自体については、変数の個数が多い場合に特異点が多次元多様体をなすので、ある 1 点で展開するという方法自体に無理がある。もっと使い易い形で再定義するべきであると思っている。

産業分野の計算での近似無平方分解の有用性は昨年度の発表時に既に気付いていたが、今回の研究では近似因数分解の有用性を実感した。産業分野の計算とはいえ物理や化学の法則に基づいているのだから、多項式が絶対因数分解 ($\mathbb{C}$ 上での因数分解) できることは頻繁にあると思う。それなのに、係数が浮動小数で近似された途端に、非常に有用な演算である因数分解をユーザが諦めてしまうのは惜しい限りである。

最近、旧来の知人から相談をうけた。「グレブナー基底パッケージを利用して研究しているが、近似的に計算した数値根を代入してグレブナー基底を計算せざるをえない場合がある。パッケージでは浮動小数が使えないので、根を有理数で近似して計算したのだが、全くオカシイ結果になる」と。近似グレブナー基底を研究してきた者としては、オカシイ結果が出るのは至極尤もなことで、どうすれば望みの結果が出るかも分る。しかし、筆者の開発した近似グレブナー基底パッケージは十分安定とは言えないので、早く安定化して提供しなければ、と考えている。近似代数の産業応用の次のターゲットは近似グレブナー基底であろう。

謝辞 本研究は日本学術振興会・科学研究費 (23500003) で支援された。

参 考 文 献

- [1] J. McDonald. Fiber polytopes and fractional power series. *J. Pure Appl. Algebra*, 104:213–233, 1995.
- [2] F. Kako and T. Sasaki. Proposal of “effective” floating-point number. Preprint of Univ. Tsukuba, May 1997 (unpublished).
- [3] T. Sasaki. Analysis of Cancellation Errors in Newton’s Method for Multivariate Polynomial. Preprint of Univ. Tsukuba, 1994 (unpublished).
- [4] 佐々木建昭, 稲葉大樹. 過酷事故に陥った航空機の制御を目指して – 多変数べき級数根の利用 –. 数理解析研究所講究録 1843, pp. 8 - 21. 2013.
- [5] T. Sasaki, D. Inaba and F. Kako. Towards industrial application of approximate computer algebra. *Proc. CASC2013 (Computer Algebra in Scientific Computing)*: LNCS 8136, 315-330, Springer, Heidelberg, 2013.
- [6] T. Sasaki and F. Kako. Solving multivariate algebraic equation by Hensel construction. Preprint of Univ. Tsukuba, March, 1993; *Japan J. Indust. Appl. Math.* **16** (1999), 257-285.
- [7] T. Sasaki and D. Inaba. Hensel construction of $F(x, u_1, \dots, u_\ell)$, $\ell \geq 2$, at a singular point and its applications. *ACM SIGSAM Bulletin* **34** (2000), 9-17.

- [8] T. Sasaki and D. Inaba. Convergence and many-valuedness of Hensel series near the expansion point. *Proc. SNC'09 (Symbolic Numeric Computation)*, 159-167, ACM Press, Aug. 2009.
- [9] T. Sasaki and D. Inaba. Series expansion of multivariate algebraic functions at singular points – nonmonic case –. *Proc. ASCM 2009 (Asian Symposium on Computer Mathematics)*, 177-186, Kyushuu University, 2009.
- [10] T. Sasaki and D. Inaba. A study of Hensel series in general cases. *Proc. SNC'11 (Symbolic Numeric Computation)*, 34-43, ACM Press, Aug. 2011.
- [11] T. Sasaki and T. Yamaguchi. An analysis of cancellation error in multivariate Hensel construction with floating-point number arithmetic. *Proc. ISSAC 98 (Intn'l Symposium on Symbolic and Algebraic Computation)*, 1-8, ACM Press, 1998.