数理解析研究所講究録
第1920巻 2014年 121-127

算数・数学におけるある教材の背景について

中部大学現代教育学部　金光三男 (Mitsuo Kanemitsu)
College of Contemporary Education
Chubu University

§1. はじめに

松沢要一 ([2]) に記載してある教材の一寸した補足及びそれと関連している数学の背景について考察する。

[3] によると、小学校2年生では、「4位数までについて、十進位取り記数法による数の表し方及び数の大小や順序について理解すること」、「2位数の加法及びその逆の減法の計算の仕方を考え、それらの計算が1位数などについての基本的な計算を基にしてできることを理解し、それらの計算が確実にできること。また、それらの筆算の仕方について理解すること」、「簡単な場合について、3位数などの加法及び減法の計算の仕方を考えること」などが記載されている。

第3学年では、「3位数や4位数の加法及び減法の計算の仕方を考え、それらの計算が2位数などについての基本的な計算を基にしてできることを理解すること。また、それらの筆算の仕方について理解すること」、「加法及び減法の計算が確実にでき、それらを適切に用いること」などと記載されている。1位数の加減の計算を基本にして、2位数の計算を、また2位数の計算を基本にして3位数や4位数の計算を行えばそれ以上の桁数の加減の計算が出来るようになる。一般的に言えば、ここまでやっておけば、それより後は自分一人でできることを目指してそこまでの内容について学習するようにしていると言えよう。

ここでは、松沢要一 ([2]) の教材 :「1から9までの数字の書いてあるカードから2枚選んで、並び方を変えて一番数字の並び方を大きくした数と一番小さくした数とを引き算し、これを繰り返して答が1桁になったところで終了する」。

これは上記の目標に合い、不思議さや発展性を持っている教材であることが分かる。先にも述べたように、この教材の補足と数学的な背景など考察することを目標としよう。整数の四則計算は第1学年から第4学年まで4年間に渡って指導されている。また、十進位取り記数法の理解が重要で色々な所で必要となる。

§2. ２桁の場合の松沢要一氏の教材の背景

さて、教材は、１から９までの９枚のカードが並べてあり、その中から異なる２枚を選び出す。それを並び替えて、一番大きい数と一番小さい数の差を取る。これを繰り返すと９にたどり着く。ここで、９枚のカードから異なる２枚のカードを選ぶ組み合わせの個数は、${}_9C_2$の３６通りある。高等学校の数学の内容である組み合わせにも繋がっていく。

例 1：上記のカードの問題で、８と６を選んだとする。並び替えて一番大きい数８６と一番小さい数６８を作る。この２数の差を取ると１８、更に繰り返して８１と１８の差を取ると６３。三度繰り返すと、６３−３６＝２７となるが、更に繰り返す。７２−２７＝４５。更に５４−４５＝９で１桁になったので終了する。５回で９になった。どの引き算にも繰り下がりがあり、小学生の引き算の練習と数の大小の理解の指導に適している。

例 2：７と３のカードを選ぶ。７３−３７＝３６、繰り返して６３−３６＝２７、更に７２−２７＝４５、更に５４−４５＝９となり４回で１桁の９に到達した。８と１のときも同様にすると４回で９に到達する。

実際の小学校での授業では、児童の人数は多いので、何回で９になったかを個々の児童に聞くと多くの結果が出てきて、各回数ごとにまとめて黒板に書いてみる。

何回目で９になるかは、予想できる。この理由を示そう。

２枚のカードの数字をａとｂとする。$a > b$と仮定して良い。この２枚を並べた数は、$10a + b\ (a > b)$である。$0 < a - b < 9$である。

$a - b = 1$のとき、$(10a + b) - (10b + a) = 9(a - b) = 9$。１回で９に到達する。

同様に$a - b = 2$のとき、$(10a + b) - (10b + a) = 9(a - b) = 18$。２回目は８１−１８＝６３である。３回目は６３−３６＝２７。４回目は７２−２７＝４５。５回目は５４−４５＝９。よって$a - b = 2$のときは5回目で９に達する。

$a - b = 3$のときは、$9(a - b) = 27$。２回目は、７２−２７＝４５。３回目は、５４−４５＝９。よって3回で９になる。

$a - b = 4$のときは、$9(a - b) = 36$。2回目は、６３−３６＝２７。3回目は７２−２７＝４５。4回目は、５４−４５＝９。よって4回で9になる。

$a-b=5$ のときは、$9(a-b)=45$。2回目は、５４－ ４５＝９。よって2回で9になる。

$a-b=6$ のときは、$9(a-b)=54$。2回目で５４－ ４５＝９。

$a-b=7$ のとき、$9(a-b)=63$。2回目は、６３－ ３６＝２７。3回目は、７２－ ２７＝４５。4回目は、５４－ ４５＝９。よって4回目で9になる。

$a-b=8$ のときは、$9(a-b)=72$。2回目は、７２－ ２７＝４５。3回目は、５４－ ４５＝９．よって3回で9になる。

勿論、[2] にはこの計算は結果のみ記載してある。九九の復習も含まれた教材である。[1] にも述べてあるように、九九を指導するとき、日常生活で「に、し、ろ、は、とう、…」や「ご、じゅう、じゅうご、…」に関連した２の段や５の段から始めると理解し易い。九九は中国から伝来し、万葉集の頃使用されるようになったと言われている。「三五月」を「もちづき」と読み、もちづきは満月のことで「じゅうごや」とも呼ばれた。

先の問題で「９」になるまでの引き算の回数は次のようである。

引き算の回数：１回（カードの差：１）、２回（カードの差：５と６）、３回（カードの差：３と８）、４回（カードの差：４と７）、５回（カードの差：２）。

§３．桁数の多い場合の松沢要一氏の教材の背景

(3-1) ３桁の場合

２桁の場合は、５回以内で「９」に到達した。３桁の場合：6回以内で「４９５」に到達。

[2] には、「４桁の場合：７回以内で「６１７４」に到達」と記載してある。

３桁の数を、$100a+10b+c$ とする。ここで、$a>b>c$ と仮定してよい。最小の並び方にすると、$100c+10b+a$ となる。この２数の差は、$(100a+10b+c)-(100c+10b+a)=100(a-c)-(a-c)=99(a-c)$。$2\leqq a-c<9$ だからこれについて考察する。

1) $a-c=2$ の場合。

$99\times 2=198$ が第１回目。２回目は、９８１－ １８９＝７９２。3回目は、９７２－ ２７９＝６９３。4回目は、９６３－ ３６９＝５９４。5回目は、９５４－ ４５９＝４９５だから、５回目で「４９５」になる。

2) $a-c=3$の場合。

１回目は２９７、２回目は６９３で、$a-c=2$の場合の3回目に一致し、以後は$a-c=2$のループと一致する。即ち、3回目は５９４．４回目は「４９５」になる。

3) $a-c=4$の場合。

１回目は３９６。２回目から$a-c=2$のループに入る。３回で「４９５」になる。

4) $a-c=5$のとき。

１回目で４９５になる。

5) $a-c=6$のとき。

１回目で５９４。即ち、１回目で$a-c=2$のループに入る。２回で「４９５」になる。

6) $a-c=7$のとき。

１回目は６９３になり、$a-c=2$のループに入る。３回で「４９５」になる。

7) $a-c=8$のとき。

１回目は７９２で$a-c=2$のループに入る。４回で「４９５」になる。

8) $a-c=9$の場合、

１回目は８９１、２回目に$a-c=2$のループに入り、７９２となる。このループを進んで行き、５回で「４９５」になる。

(3-2) ４桁の場合

[2]によれば、「７回以内」に「６１７４]になる。これを検証しよう。

４桁の数は、$1000a+100b+10c+d$ $(a>b>c>d)$とできる。この数字を並び替えて最小の数字を作ると、$1000d+100c+10b+a$となる。

この２数の差を取ると、$1000(a-d)+100(b-c)+10(c-b)+(d-a)=1000(a-d)+100(b-c)-10(b-c)-(a-d)=999(a-d)+90(b-c)$ $(a-d>b-c,\ a-d \geqq 3)$ $(\cdots\ \diamondsuit)$ と記載できる。

(i) $a-d=3$ のとき、$b-c=1$。

$a-d=3, b-c=1$ の場合、この値を $\diamondsuit$ に代入すると、$999\times3+90\times1=2997+90=3087$。２回目は、８７３０－ ３７８＝８３５２、３回目は、８５３２－ ２３５８＝６１７４となり、３回で「６１７４」に到達した。

(ii) $a-d=4, b-c=2,1$ の場合。

$a-d=4, b-c=2$ のとき、１回目は４１７６、２回で「６１７４」に到達する。
$a-d=4, b-c=1$ のとき、９９９×４＋９０×１＝４０８６。２回目は、８６４０－ ４６８＝８１７２、３回目は、８７２１－ １２７８＝７４４３、４回目は、７４４３－ ３４４７＝３９９６、５回目は、９９６３－ ３６９９＝６２６４、６回目は、６６４２－ ２４６６＝４１７６ ($a-d=4, b-c=2$ の場合)、７回目は、７６４１－ １４６７＝６１７４となる。よって、７回で「６１７４」に到達する。

(iii) $a-d=5, b-c=3,2,1$ の場合。

$a-d=5, b-c=3$ のとき、１回目は５２６５、２回目は３９９６で、$a-d=4, b-c=1$ のループに入る。５回で「６１７４」に到達する。
$a-d=5, b-c=2$ のとき、１回目は５１７５、第２回目で、５９９４、第３回目は５３５５で $a-d=5, b-c=4$ のループに入る。７回で「６１７４」に到達する。
$a-d=5, b-c=1$ のとき、１回目は５０８５、第２回目は７９９２、第３回目は７１７３で $a-d=7, b-c=2$ のループに入る。７回で「６１７４」に到達する。

(iv) $a-d=6, b-c=4,3,2,1$ の場合。

$a-d=6, b-c=4$ のとき、１回目は６３５４、第２回目は３０８７、第３回目は３０８７で $a-d=3, b-c=1$ のループに入る。以後、８３５２を経て、第４回で「６１７４」。

$a-d=6, b-c=3$のとき、１回目は６２６４、第２回目は４１７６。３回で「６１７４」に到達する。

$a-d=6, b-c=2$のとき、１回で「６１７４」に到達する。

$a-d=6, b-c=1$のとき、１回目は６０８４、第２回目は８１７２。第３回目は７４４３。第４回目は３９９６。第５回目は６２６４で$a-d=6, b-c=3$のループにに入る。第６回目で４１７６。７回で「６１７４」に到達する。

(v) $a-d=7, b-c=5,4,3,2,1$の場合。

$a-d=7, b-c=5$のとき、第１回目は７４４３、第２回目は３９９６、第３回目は６２６４である。第４回目で４１７６。５回で「６１７４」に到達する。

$a-d=7, b-c=4$のとき、１回目は７３５３。第２回目は４１７６。第３回目で「６１７４」。

$a-d=7, b-c=3$のとき、１回目は７２６３で、第２回は５２６５、これは$a-d=5, b-c=3$。以下、３９９６、６２６４、４１７６、最後に第６回で「６１７４」になる。

$a-d=7, b-c=2$のとき、第１回目は、７１７３、以下６３５４、３０８７、８３５２、最後は５回目で「６１７４」になる。

$a-d=7, b-c=1$のとき、１回目は７０８３、以後８３５２、最後に３回目で「６１７４」になる。

(vi) $a-d=8, b-c=6,5,4,3,2,1$の場合。

$a-d=8, b-c=5$のとき (途中、$a-d=8, b-c=1$が出てくる)、１回目は８４４２で、以下、５９９４、５３５５、１９９８、８０８２ ($a-d=8, b-c=1$の場合)、８５３２ ($a-d=8, b-c=6,4$の場合)、最後の第７回目は６１７４である。

$a-d=8, b-c=2$の場合。第１回目は８１７２。以後、７４４３、３９９６、６２６４、４１７６、第６回目の６１７４。

$a-d=8, b-c=3$の場合。第１回目は８２６２、６３５４、３０８７、８３５２、最後は５回目の６１７４である。

まとめ

a) 6084 ($a-d=6, b-c=1$), 8172 ($a-d=8, b-c=2$), 7443 ($a-d=7, b-c=5$), 3996, 6264 ($a-d=6, b-c=3$), 4176, 6174。

b) 4086 $(a-d=4, b-c=1)$, 8172 で、a) の２番目に入る。

c) 5085 $(a-d=5, b-c=1)$, 7992, 7173 $(a-d=7, b-c=2)$, 6354$(a-d=6, b-c=4)$, 3087 $(a-d=3, b-c=1)$, 8352 $(a-d=8, b-c=4)$, 6174。

d) 7263 $(a-d=7, b-c=3)$, 5265 $(a-d=5, b-c=3)$, 3996, 6264$(a-d=6, b-c=3)$, 4176, 6174。

e) 8262 $(a-d=8, b-c=3)$, 6354 (c) のループの４番目に入る。

f) 7353 $(a-d=7, b-c=4)$, 4176 $(a-d=4, b-c=2)$, 6174。

g) 7083 $(a-d=7, b-c=1)$, 8352 $(a-d=8, b-c=4)$, 6174。

h) 8442 $(a-d=8, b-c=5)$, 5994, 5355, 1998, 8082 $(a-d=8, b-c=1)$, 8532 $(a-d=8, b-c=6)$, 6174。

i) 5275 $(a-d=5, b-c=2)$, 5994 (h) の２番目のループに入る。

５桁以上の場合：決まった数に到達することはない。これは、５桁の数は $10000a+1000b+100c+10d+e$ $(a>b>c>d>e)$ とすると、$9999(a-e)+990(b-d)=99(101(a-e)+10(b-d))$ が複雑であることによると思われる。詳しくは課題とする。

参考文献

[1] 黒木哲徳、入門　算数学 [第２版]、日本評論社、2009 年
[2] 松沢要一、こんな教材が算数・数学好きにした、東洋館出版社, 2006 年

[3] 文部科学省、小学校学習指導要領解説 算数編、東洋館出版、2008 年