

# 「共同研究の成果についての教育現場を交えての討論」 報告

鳴門教育大学 松岡 隆 (Takashi Matsuoka)  
鳴門教育大学 坂東久仁子 (Kuniko Bando)  
Naruto University of Education

## 1. はじめに

これまで5年間に渡って継続してきた本共同研究の目的は、数学教師になる大学生や大学院生を対象として、数学教師として身に付けておくべき、数学に関する理解・意識と能力の育成方法を開発することであった。本研究が実質的な意義をもつことを示すためには、研究の方針や成果が学校教育現場から見て妥当なものであり、開発した方法が現場に効果を及ぼしうるものであることを検証する必要がある。そこで、本年度の共同研究では、教育現場の数学教員や経験者を招いて討論を行い、本研究に対する意見や評価を求めるとした。

日時： 2012年12月19日 9:30-17:00

プログラム：(1) 各班の成果報告及び討論  
(2) 教育現場からの意見  
(3) 教育現場の現状に関する討論

数学教員・経験者（「(2) 教育現場からの意見」での発表者のみ記載）：

深川 久 先生（大阪府立大手前高校教諭）  
亀山 弘 先生（岐阜県教育委員会指導主事）  
牧下 英世先生（芝浦工業大学）  
三上いつみ先生（元大阪府立高校教諭）

プログラムの(1)では、これまでの成果を第0班から第4班の順に報告して、教育現場の参加者の方々からの意見を求め、それを元に議論を行った。

(2)では、教育現場の先生方から、現場が抱える課題と改善案や指導事例、数学教師に必要な数学能力などについての紹介・提言があった。なお、深川先生の意見は、高校の数学教師が身に付けておくべき数学内容に関する包括的な考察であるため、独立した論考として本講究録に収録することとした。

最後の(3)の議論では、最近の新任教師の傾向として、「間違いたくないという気持ちが強く消極的になっている」ことや、「まじめだがたくましさを感じられず、壁にぶち

当たったときにすぐにあきらめてしまう傾向がある。数学はある意味壁だらけであると考えているが、その壁を何とかしようとする気持ちが欠けているように感じる。数学に対してこのような認識を持った教員が、子どもの前に立って教えるということは、子どもに対して良い影響があるとは思えない。」ことなどが指摘された。

## 2. 共同研究の成果報告

最初に、過去5年間の共同研究全体の概要説明があり、続いて、各班から成果報告があった。以下で、これらの内容と、教育現場参加者からの質疑応答を中心とした議論の様子を紹介する。

### 2.1 全体説明：数理研共同研究の目的と研究進展状況

鳴門教育大学 松岡 隆

#### 1. 共同研究の目的と研究実施体制

現在、学校での算数・数学教育は様々な問題を抱えているが、その改善のためには、数学教師自身の数学力を向上させることが必要であろう。そのために大学の数学教員の果たすべき役割は、将来数学教師になる大学生、大学院生の数学に関する理解および能力を高めることであると考え。これを課題として、これまで5年間継続して共同研究を進めてきた。各年度のタイトルは以下の通りである。

平成20年度「数学教師に必要な数学能力形成に関する研究」

平成21年度「数学教師に必要な数学能力に関する研究」

平成22年度「数学教師に必要な数学能力に関連する諸問題」

平成23年度「数学教師に必要な数学能力とその育成法に関する研究」

平成24年度「数学教師に必要な数学能力の育成法に関する研究」

初年度は、以下のような項目について班に分かれて研究を行った。

第0班 数学の教育に数学者が関わるべき理念と実際の理論化

第1班 教員養成系における学部の教育内容の理想的モデルの構想

第2班 教科専門科目の内容を活用する教材研究の指導方法

第3班 学校数学の背景としての数学史：教師教育における事例研究

第4班 学校数学社会的意義・活用状況：教師教育における事例研究

第5班 学校教育専修における教育・研究のあり方の検討

第6班 教員養成にあるべき数学リテラシーの現状と目標に関するアンケート調査

この後、研究の進展に応じた班の再編があり、現時点の班分けは次の通りである。

- 第0班 全般的理論的基礎付け，教育数学
- 第1班 教科専門科目のあり方 — 体系化・具体化
- 第2班 教科専門科目の内容を活用する教材研究の指導方法
- 第3班 数学教師の数学観の醸成 — 数学の意義・数学史
- 第4班 教育学研究科のあり方

## 2. これまでの成果

各班の成果を簡単に紹介する。第0班については成果を簡略化して述べるのが難しかったため割愛した。第0班の報告をご覧いただきたい。

### 第1班

- ・ 教員養成大学・学部における中学・高校の数学教師養成のための数学専門科目の内容について全国調査を実施し，その結果を踏まえて，中学・高校の数学教師養成における標準的モデル案を作成した。
- ・ 教員養成大学・学部における算数専門科目の内容について全国調査を実施し，その結果を踏まえて，算数を内容とする数学専門科目のため標準的モデル案を作成した。
- ・ 中学・高校の数学教師養成の標準的モデルにおいて，単元をいくつか選び具体的な授業構成を行った。
- ・ 算数専門科目の標準的モデルを基にして，次の2つの方向に沿った授業構成案をそれぞれ作成した。
  - ① 算数科に関連する重点的な4～5のテーマに絞る。
  - ② 算数科の背景として知っておくべき数学的内容を，個々は浅くなるが広く網羅的に取り扱う。

### 第2班

- ・ 教科専門科目の内容を活用する教材の指導方法の題材として，以下のものを考察した。  
数概念の取り扱い，数と量の関係に対する見方，三角形の合同・相似，折って作る放物線，正多角形の作図，折り紙作図など。

### 第3班

- ・ 学校における高等数学の意義が分かる題材として，式の計算や図形問題における誤答に適切に対処するために必要な数学理論に関するものを開発した。
- ・ 教育において数学理論の有効性が分かる題材として，以下の題材を考察した。  
文字式，「組合せ」等の高校数学の発展的題材，三角錐の体積，関数の性質の背景，Farey 数列など規則性を見付ける問題，植木算をグラフ理論で捉えるものなど。
- ・ 数学が用いられる社会的，生活的事例を挙げた。

### 第4班

- ・ 大学院における数学科目と入試問題に関する全国調査を実施した。
- ・ 大学院における数学専門科目の理想的な内容として，以下のものを提案した。

- (1) 標準モデル案のうち学部で達成できなかった部分を完成させる。この基礎の上にさらに進んだ内容を積み上げていく。
- (2) モデル案の履修によって獲得した数学知識，論理的思考力，抽象能力，数学的センス等を，数学教師としての素養の向上に生かすため以下の内容を扱う。
  - ① 学校数学の内容を俯瞰的に捉え，表面には現れていない内容間の関連を明らかにする。
  - ② 教材研究を通じて，高度な数学を教育実践に繋げる具体例を示す。
  - ③ 自ら教材研究を行うことができる能力を養う内容
  - ④ 数学を用いた課題探究の方法

・ 上記③，④の具体例として，多面体の幾何を取り上げた。

なお，3年目までの成果は，日本数学会教育委員会主催・教育シンポジウム「教師に必要な数学能力形成に対する数学者の責任」（平成23年9月30日）において発表されている。

## 2.2 第0班の成果 — 教育数学の構築

三重大学教育学部 蟹江幸博 (Yukihiro Kanie)  
鳥羽商船高等専門学校 佐波 学 (Manabu Sanami)

### §1. 第0班の課題と取組み

一連の共同研究を開始するにあたって、第0班に与えられた最初の課題は、「数学研究者の“数学の教育”への関与における“原理的”な位置づけを明らかにすること」であった。

そこでまず「数学の教育に関与した数学研究者」の先行事例から始めることとし、フェリックス・クライン、ハンス・フロイデンタール、ハイマン・バス等々の数学者の教育関係の仕事について、調査・検討を行った。

そうした作業を進めるうち、彼らが、必ずしも数学研究者が生息する場としての“数学”ではなく、むしろある種の距離感をもつ“数学そのもの”を眺めながら、教育の問題に向かい合っていると感じるようになった。しかし、“数学そのもの”とは何かという議論は複雑多岐にわたり収拾がつかなくなる恐れがあり、そのことはひとまず措いて、こうした“数学を眺める姿勢”に着目し、このことを「教育の観点から数学を見る」と表現してみた。そして、この考え方を敷衍し掘り下げることが、第0班の課題の解決に向かう第一歩であろうと考えるようになった。

今回の研究集会では、第0班の活動成果として、“数学”を内側から見ること (§2)、外側から見ること (§3)、そして、数学を教育的観点から眺めることから導かれる“教育数学”という新たな営み (§4) について、簡単な報告を行なうこととした。

### §2. 内側から数学を見る

本節では、教育の対象としての“数学”についての見解をはっきりと語っている、二人の数学研究者の事例を見ていくことにする。

#### (1) ハンス・フロイデンタール

フロイデンタールは、1980年のICMI講演『数学教育の主要問題』において、数学教育で「(教科書の各章の内容という意味での)教材や教授法は主要な問題ではない」とし、「教える価値のあるものが何であるかが問題」と述べている。

この問題にフロイデンタール自身が与えた解答は、「人間を取り巻く現実(reality)を組織化したり構造化する営みの一種である“数学化(mathematising)”が教えるべき“数学”であり、学習者が数学化のプロセスを指導者の案内の下での追体

験 (guided reinvention) によって身につけることが“数学教育”である」というものであった。

ここには，“世界を認知する手段 (instrument) のひとつとしての数学”という見解が提出されていることがわかる。

## (2) ハイマン・バス

バスは、初等学校における数学の授業の徹底的な分析を行なった教育学者デボラ・ポールとの協同作業を通じて、数学のリーゾニング (mathematical reasoning) の重要性を“発見”した。

バスの立場は、「現役の数学者の視点から観るとき、リーゾニングは、数学的な合意を形成し、新しい数学的知識を構成するための、主要な手段のひとつ」であり、このリーゾニングは、「しかるべき状況や共同体の内部において許容され得る数学的リーゾニングの“粒度 (granularity)”を定める公有の知識の集積体」と「言葉 (記号、術語その他の表現、種々の定義) と、諸々の主張を定式化しその正当化を慣習化するような関係性のネットワークにおける使用法の有意味性を定めるための、論理法則および統語法」という二つの基盤の上に載っているというものである。

ここに見られる見解は，“数学と共同体”や“数学と言語”の関係性に対する認識の深化と呼んでも良いだろう。

## §3. 外側から数学を見る

### (1) 先行事例

フェリックス・クライン (1849-1925)、ジョン・ペリー (1850-1920)、藤澤利喜太郎 (1861-1931) の教育関係の仕事について概観すると、それぞれが、ドイツの高等・中等教育機関における“数学”、イギリスの技術者教育における“数学”、日本の中等教育機関における“算術”といった、“時空の限定された領域”において、それを取り巻く様々な社会的状況との相互作用の中でなされたことが見てとれる。

### (2) “数学”の多様性

(1) の事例検討で用いた“外側からの数学の見方”を敷衍するためには、“多様な数学”のあり方について、古代メソポタミア、古代中国、古代地中海世界 (ギリシアからヘレニズム世界)、素朴社会 (台湾アミ族)、インカ帝国、古代インド等々についても検討を行なう必要がある。それらについての調査検討を始めてはいるが、見えている部分と見えていない部分がある。

### (3) 数学教育の特異点

(1) や (2) の作業を行なっていると、しばしば、“数学の教育”が“相を転じる”場面に遭遇する。そうした場面を、仮に、“数学教育の特異点”と呼ぶこ

ととした。代表的な例（組織や集団や象徴的な人物）として、古バビロニアの粘土板の家（EDUBBA）、古代ギリシアのソフィスト集団、ヘレニズム期のムセイオン、近世西欧のアバクス学校（scuole d'abaco）、ペトルス・ラムスと出版、クラヴィウスとイエズス会のコレージュ、ガスパール・モンジェとエコール・ポリテクニク、カール・グスタフ・ヤコビのゼミナール等が挙げられる。

#### （4）類型から理念型へ

上述の実例に見られる様々な“共同体・数学・教育の相互依存性”から、一般的な“法則”を抽出し、現在の我々の現実的な活動に役立たせねばならない。そのためには、第一に具体例を“類型化”することが重要ではあるが、単なる類型では“現実”のもつ高度な複合性を十分に捉えることが困難である。そこで、類型ではなく、“マックス・ヴェーバー的な理念型（Ideal Typus）”への移行が必要になるだろうと考えている。

### §4. 教育数学の構築

#### （1）“教育数学”の必要性

以上に述べたように、“数学”を教育という観点から眺めると、数学者や数学史家の見る“数学の景色”とは異なる風景が見えてくるようになる。そこから目指すべきものとして、「数学を教育的な観点から眺めることにより、数学と教育に関する様々な知見を得ること、および、そうした知見を数学や教育の実践に役立てることを目的とする営み」というものの必要性を感じるようになった。

そうした営みの総称として、“教育数学”という言葉を提案している。

#### （2）参照枠としてのソシュール

しかし、素材だけは集められても、この「教育数学」を構築することはやさしくはない。この新しい研究対象（分野）の構築に、何かしらモデルがあって欲しいと考えた。現在のところ、「数学」が連想させる「言語」についての学問を構想したフェルデナン・ソシュールの仕事を、教育数学構築のための参照枠とすることを考えている。

ソシュールの仕事の要点をまとめると、[1]コミュニケーションの観点から言語を見ることで、「ランゲージュ = ラング + パロール」という枠組みを取り出し、[2]“ラング”を研究する学問として「言語学」を規定し、[3]言語学を、ラングの直接的な研究である「内的言語学」と、歴史・地理・文化・制度等々との関係の下でのラングの間接的研究である「外的言語学」に区分し、さらに、[4]ラングの“一般化”としての記号系の研究を志向する「記号学」を創始した、等となる。

#### （3）教育数学と言語学

現在、ソシュールの構想した言語学の類似として“教育数学”を構築することを試みている。その中で考えられる課題として、[1]教育という観点から数学を見

るときの“ラング”に相当するものの決定, [2] それを用いた「教育数学」の規定, [3] 「内的教育数学」と「外的教育数学」の区分, [4] 「教育数学」と「言語学」を統一的に包含する「一般化された記号学」の構想, 等々が挙げられる.

#### (4) 教師教育と教育数学

最後に注意しておくべきことは, この“教育数学”と, 本共同研究の主題である“教師教育”との関係についてである. それをひとことで述べるなら, 数学教師の教育課程において「教育数学」が占める位置が, 言語教師の教育課程における「言語学」と同等であることが期待されるということである.

## 2.3 第1班の活動と成果

滋賀大学名誉教授 丹羽 雅彦

### 1. 第1班の当初の目標と平成20～21年度の活動

平成20年5月の数理解析研究所の研究集会において、第1班は次の目標をもって発足した。

- ① (国立大学法人)教員養成大学・学部の数学専門科目の現状を把握すること
- ② 数学専門科目としてこれだけは学ばせたいという標準的なモデル案を作成すること

1年目の平成20年度には、チームメンバーの間で、現状調査とモデル案作りをどのような方法で実施したらよいかについて種々の議論を進めるとともに、さまざまな試行錯誤を行った。現状調査に関して、各大学のシラバスを集めてそれをまとめ分析するという仕方が考えられるが、実際に計画してみると多大な人員と労力(従って、多額の資金)を要するという事実が分かってきたのでこの方法は放棄することにした。そこで、同時に取り組んできていた適切な講義項目を挙げてモデル試案を作成する作業を進展させ、この試案をもとに教員養成大学・学部数学教員懇談会に参加している各大学・学部アンケートを行うことで①②の目標を同時にクリアすることを目指した。2年目(平成21年度)に、この作業を行い、多くの大学・学部の数学教員の協力をえて、調査は成功した。調査がうまく進んだ理由は、日本数学会の教員養成大学・学部数学教員懇談会の蓄積により協力いただける下地があったためだと思う。そして、これまで誰も調査していなかったし何も把握されていなかった

- ① 教員養成学部の数学専門科目の講義内容の現状、および
- ② 教員養成のための数学として、数学専門科目担当教員がどのような数学的な内容を学ばせたいと考えているか、

ということ、初めて把握できたと考えている。

この調査結果を基として、国立大学法人教員養成大学・学部の数学教員の考える「数学教師を目指す学生に学ばせるべき数学の内容の標準的モデル」をまとめた。

### 2. どのような調査を行ったか

<調査方法>

#### 調査①

各大学・学部の現状を聞きます。現時点の状況で、A, B, C いずれかを記入。

A: 必修科目等で免許取得者の大多数が受講する科目の中で扱っている。

B: 選択科目等で免許取得者の少数が受講する科目の中で扱っている。

C: 扱っていない。

## 調査②

(現免許法にしばられない)理想的標準モデル案に入れるべきかあなたの考えを聞きます。D, E いずれかを記入。

D: 理想としては大多数の免許取得者に学ばせたい内容だと考える。

E: 大多数の免許取得者に学ばせる必要はない内容だと考える。

## 調査③

各分野の末尾の空欄に, 大多数の免許取得者に修得させたい講義内容項目として追加すべきだと考えられる項目を自由記述で記入して下さい。

## &lt;調査内容と結果&gt;

調査①, ②における, 講義内容の項目の例とその集計の例は, [2] pp. 91-101 を参照。

## 3. どのように標準的モデルを作成したか

教員養成学部の数学専門教員が「優れた数学教師を育てること」を目的として, 種々の努力や工夫をしてきたこれまでの経験のなかに, どんな内容をどのように教えるべきかに答えるための重要なファクターがあると考えられるので, 標準的モデル案には主として調査②を反映させた方がよいと考えた。

数学教師を志望するすべての学生にぜひとも受けさせたい講義内容の項目として「数学専門科目の標準的モデル」を作成した ([3] pp. 109-113 参照)。

## 4. 3年目(平成22年度)の活動

2年間の成果を公開し, 広く知ってもらうためのいくつかの活動を行った。参考文献に挙げた数理解析研究所の講究録に掲載するのはプロジェクトの目的から当然として, 国立大学法人の教員養成系学部に対しては, 可能な限りすべての数学教員に調査結果とモデル案をメールで配布するように努力した。また, 名古屋大学数学教育セミナーおよび東京の大学を中心に開催されている数学教育の会において講演を行った。(東日本大震災のために平成23年度数学会年会が中止になり半年遅れの23年9月になったが) 日本数学会の数学教育シンポジウムにおいて, 教員養成学部の現状を中心に報告するとともに討論を行った。

さらに, 成功した中学校・高等学校教員のための数学専門科目の現状調査・モデル案作成と同様な方法によって, 小学校教科専門算数科(算数科内容学)の現状を調査し, 小学校算数科内容学の標準モデルを作成した。([4]参照)

また, 第4班と協力して, 大学院入試問題の調査・分析, 大学院開講科目の調査・分析などを行い, 大学院教育学研究科の今後の在り方について教員免許6年制を睨んだ検討を行った。([5]参照)

#### 5. 4～5年目（平成23～24年度）の活動

小学校免許のための初等算数科内容学の具体的なカリキュラムに関して、①小学校教員となるために知っておくべき数学の専門的知識と考え方を広く浅く網羅的に扱う授業と②4, 5のテーマを定めてもう少し深く扱う授業とについて個別に検討を進めた。中等数学科免許のための数学専門科目の具体的なカリキュラムについても、モデル案を進展させるために分野別に種々の試みに取り組んでいる。特に、教員養成大学・学部の数学教員の視点から求められる授業内容のモデル案であったという枠組みを乗り越えて、モデル案を理念的に構成する方向にも取り組みはじめた。

#### [参 考 文 献]

- [ 1 ] 丹羽雅彦, 松岡隆「教員養成学部の「数学」教科専門科目カリキュラムの現状把握と理想的モデル案に向けた調査検討の構想」, 数理解析研究所講究録 1657 (2009年7月) pp. 74-82
- [ 2 ] 丹羽雅彦, 松岡隆, 川崎謙一郎, 伊藤仁一「「教員養成大学・学部の数学専門科目の講義内容についての調査」の結果とその考察」, 数理解析研究所講究録 1711 (2010年9月) pp. 89-105
- [ 3 ] 丹羽雅彦, 松岡隆, 川崎謙一郎, 大竹博巳, 伊藤仁一「中学校・高等学校の数学教師の養成における数学専門科目の標準的なモデルの構想」, 数理解析研究所講究録 1711 (2010年9月) pp. 106-129
- [ 4 ] 丹羽雅彦, 松岡隆, 川崎謙一郎, 大竹博巳, 伊藤仁一「小学校算数科・教科専門科目の講義内容に関する現況調査の結果と標準モデルの提案」, 数理解析研究所講究録 1828 (2013年3月) pp. 50-60

## 2.4 第2班の活動と成果

島根大学名誉教授 青山 陽一  
(2013年6月執筆)

2008年度に開始された一連のRIMS共同研究「数学教師に必要な数学能力・・・」(cf. 脚注)の第一回の会合において, 幾つかのプロジェクトが提起され, 各々にチームを設けることになった. その一つとして「大学における教科専門科目の講義内容を, 有機的連携をもって小学校, 中学校, 高校の数学に生かす事例の研究」が挙げられ, 第2班 (Team2)として取組むこととなった. その後, チーム内の討議において,

チーム2のプロジェクトの理念・スローガンとして

「大学における教科専門科目の内容を体系的に把握して, 小学校・中学校・高等学校の数学を自ら構成し授業展開等を行える数学教師を養成する為に」  
を掲げ, 学生に備えさせるべき能力として

「小学校・中学校・高等学校の数学の内容全てを, 大学における教科専門科目の内容を機能的に連携させて, 捉え扱うことが出来る」

を目標にし, 具体的方策として

「大学における教科専門科目の内容を活用する教材研究の指導」

に取組む. 従って, プロジェクトの名称を

「教科専門科目の内容を活用する教材研究の指導方法」

と設定する.

ということになった.

その立場は, 教員養成系大学・学部における教科専門を担当する者としてのものである.

([0, 1.1]より「実際に児童・生徒を教えることより, 彼らを教える教師の数学的資質を向上させること, つまりは教師教育こそ, 数学者が関わるべき側面である」) (プロジェクトの理念・目標等の解説的なものについては, 冗長と為りかねないのでここでは述べないことにする. 次の部分にある記述を参照して頂きたい. [1] §0, §1.1, §2.1. [2] §0, §1.1.2. [4] §0. [S]2.2.)

### ——— 脚 注 ———

2008(平成20)年度「数学教師に必要な数学能力形成に関する研究」(代表: 蟹江幸博)

2009(平成21)年度「数学教師に必要な数学能力に関する研究」(代表: 蟹江幸博)

2010(平成22)年度「数学教師に必要な数学能力に関連する諸問題」(代表: 伊藤仁一)

2011(平成23)年度「数学教師に必要な数学能力とその育成法に関する研究」(代表: 松岡隆)

2012(平成24)年度「数学教師に必要な数学能力の育成法に関する研究」(代表: 松岡隆)

2013(平成25)年度「数学教師に必要な数学能力を育成する教材に関する研究」(代表: 大竹博巳)

チーム2は次の三名で発足した：中馬悟朗（岐阜大学名誉教授；幾何学），神直人（滋賀大学教育学部；解析学），青山陽一（島根大学教育学部；代数学）。青山がチーフを務めることになった。（でこの原稿を書いています。）RIMS 共同研究の会合以外に適宜討議の場を持ち，上述したプロジェクトの理念や取組むべき課題を確認し，中馬が考察していた作図問題に関する事柄と青山が行っていた方程式論の取扱に関する事を融合させて「正多角形の作図に関する教材研究の指導について」及び神が実践していた事柄から「折って作る放物線」の教材研究指導について」を考究することとした。これらの成果を纏めたものが[1]である。§2が前者で，§1が後者である。§0にはプロジェクトの理念や動機等が記されている。§3は，青山が附属中学校における教育実習時の学生による授業を参観して，学生に取組んで貰いたいと考えた教材研究の仕方を，思い付くままに書き綴ったような形で述べ，不完全なものであるがその粗略さを利用してプロジェクトへの取組の構想を提起するものとして脱稿したものである。なお，以降の年度においてもRIMS 共同研究の会合以外に適宜討議の場を持って活動を行っている。

2009年度は，前年度の二つの題材を引続き考察することとした。また，RIMS 共同研究第2回会合より新たに参加した曾布川拓也（岡山大学教育学部；解析学）がチーム2に加わり，数に関する事柄を考察することになった。それに伴い，曾布川の同僚である平井安久氏がRIMS 共同研究のメンバーでない共同研究者として関わることになった。この様な立場の人材を得たことはプロジェクトに幅を持たせることが出来，非常に有効であると判断している。[2]と[3]が当年度の成果である。[2]§1は，[1]§1が教師の持つべき数学の内容についての一般的知識を中心的課題としていたものに対し，教師としての特殊専門的な数学的知識に焦点を持たせたものである。[2]§2は，学生にユークリッド原論を読ませるという実践を基にしたものと，ユークリッド原論の精神に沿った正五角形の作図に関する事柄からなっている。[2]§3は，数に関する事柄をチーム2の課題に附加することの宣言様である。[3]はその最初の報告である。算数科における小数・分数の乗除の指導に関する事を中心に述べられている。

2010年度。[4]§0は，プロジェクトの理念に到らせた事項或いは教材研究指導への取っ掛けとなる事例のようなものを，大学の事業と市販の書物を材料に述べたものが含まれている。[4]§1は，神による高校入試問題を利用した教材研究指導の事例であり，学生にとっては動機付け等として有効なものであることが推察される。[4]§2は，青山・中馬の「正多角形の作図に関する教材研究の指導について」の続きであり，ユークリッド原論を学生に読ませた際の事例報告の体裁をとっている。最後にユークリッド作図以外の作図方法に触れてある。[5]は，数に関する事柄についての第2弾である。数をどう風捉えるか，算数科における比の取扱に関する事が中心的话题である。

また，これまでの成果を基に教育シンポジウム（2011年9月30日，日本数学会秋季総合分科会，信州大学）における基調講演の一つを担当した。（cf. [S]2.2.）

2011年度、教材研究指導方法論の考察に重きを置くべきかという問題も挙げられたが、観念的な方向に流れ易いこともあり、むしろ事例を多く集めることにはそれなりの重要な意義があるとの助言・提言があり、今までの取組みを継続して事例集のようなものを目指し、その中から教材研究の指導方法を提起して行く方向で了解することになった。新たな参加者濱中裕明（兵庫教育大学；幾何学）がチーム2に加わり、Researcher-like-activity (RLA) の視点からチーム2の課題に取り組むことになった。成果としては[6]と[7]である。[6]は、[4] §2 の最後に述べたユークリッド作図以外の方法の一つである折り紙作図について正五角形と正七角形を扱っている。[7]は、濱中と彼の共同研究者によるRLAの紹介と事例報告である。

2012年度については現在まとめ中であり、ここで報告し得る段階ではないので省略させていただく。

なお、2013年度もプロジェクトの理念に沿った事例を追究して行く方向である。

### [文献]

- [0] 蟹江幸博：教師教育における数学者の役割 - RIMS 共同研究の目標と現状 - , 京都大学数理解析研究所講究録 1657(2009.7), 1 - 22.
- [1] 青山陽一, 中馬悟朗, 神直人：教科専門科目の内容を活用する教材研究の指導方法, 京都大学数理解析研究所講究録 1657(2009.7), 105 - 127.
- [2] 青山陽一, 神直人, 曾布川拓也, 中馬悟朗：教科専門科目の内容を活用する教材研究の指導方法 II, 京都大学数理解析研究所講究録 1711(2010.9), 130 - 155.
- [3] 平井安久, 曾布川拓也：数学者からみた「算数教育」について, 京都大学数理解析研究所講究録 1711(2010.9), 156 - 165.
- [4] 青山陽一, 神直人, 曾布川拓也, 中馬悟朗：教科専門科目の内容を活用する教材研究の指導方法 III, 京都大学数理解析研究所講究録 1828(2013.3), 61 - 85.
- [5] 平井安久, 青山陽一, 曾布川拓也：数の概念の捉え方について, 京都大学数理解析研究所講究録 1828(2013.3), 86 - 100.
- [6] 青山陽一, 中馬悟朗：折り紙作図を用いた教材研究のために～正五角形と正七角形をベースとして～, 京都大学数理解析研究所講究録 1867(2013.12), 106 - 116.
- [7] 濱中裕明, 藤原司, 渡辺金治：中等数学科教員養成課程の教科専門科目としてのRLAの試み, 京都大学数理解析研究所講究録 1867(2013.12), 117 - 129.
- [S] 教育シンポジウム「教師に必要な数学能力形成に対する数学者の責任」の報告, 京都大学数理解析研究所講究録 1828(2013.3), 143 - 152.
- [6a] 青山陽一, 中馬悟朗：補遺 to [6], 本講究録所収.

## 2.5 第3班, 第4班の成果報告

### 第3班の成果報告

(報告者:河上 哲 (奈良教育大学), 安井 孜 (鹿児島大学), 金光 三男 (中部大学))  
 学校数学における数学の意義, 数学の社会的・科学的意義, 数学史に関する具体的な題材例が示された。

### 第4班の成果報告 (報告者:伊藤 仁一 (熊本大学))

大学院における研究指導や授業の実践事例が示された。

## 3. 成果報告に関する討論

班ごとの討論および全体討論の主要な部分を示す。

### 3.0 第0班

意見: 数学教師として, 大学時代に求めることは,

①「大学でどんな勉強をするのか」を知っておいてほしい。理系に進んだ大学生が普通に勉強する内容は知っておいてほしい。教員養成のためという全く別のものがあるという捉え方をするのは, 少なくとも高校の教師にはよくない。高校で扱っている内容に関して, 生徒よりも深く広がりを持って理解しておいてほしい。

②数学に向かう時の構えを広く経験しておいてほしい。例えば, 「公式にあてはめて解き, 答えさえ出せばよい」という考え方の是非を議論する以前に, ある程度, 数学をしてきた者は, 「このような考え方は嫌だ」という感覚を持っているし, 「覚えてしまう程, 繰り返し練習しなくては身に付かない」という感覚も持っている。しかし, このような2つの感覚がないままに, 一方に偏ってしまっている印象がある。分からないことに対して, がむしゃらに向き合うということがどういうことか, 「数学が分からない」という状態がどういう状態で, それを解決するにはどうすれば良いかを経験して, 生徒にそれを伝えることができる。そのような, 数学を学ぶ上での構えを身に付けてほしい。

成果報告者の意見: 数学を教えようとする学生に, どういうメッセージを伝えたいかという「数学の相対化」である。大学時代に学んだ数学が正しいからといって, 大学で学んだそのままを, 生徒に教えるというのではうまくいかない。大学で学ぶ数学と高校までの生徒に教える数学とを相対化したものを伝えていきたい。

質問: 数学教師と教育数学との関わりは, 数学の言語学的な類似ということだが, 実際にどう関わってくるのか。

回答: 国語教師や日本語教師のように言語を扱うことと, 数学という言語を, 言語という点で繋げて考えた。教えようとしている数学が, 言語としてどのような構造になっ

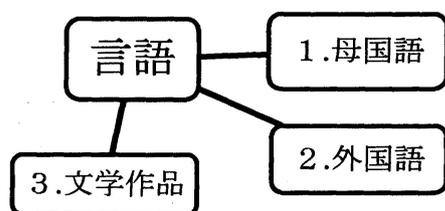
ているのかを意識することである。数学を教えようとしている学生が、大学で学んだ数学をそのままに受け取るのではなく、数学の構造を理解してもらうためにはどうしたら良いかを考えている。

「言語の教育がどうあるべきか」ということと数学の教育を、パラレルに考える視点を与えられるのではないかと考えている。言語の教育も、母国語を教育するときの観点と、外国語を教育するときの観点は異なる。数学・算数を教えるということも、算数を小学生に教えるということは母国語を教えるという感覚になり、中学生に数学を教えるというときは外国語を教えるように数学を教えるが、数学教師が、それをどの程度意識しているか、今はどのように教えるかを考えるのに、この考えをバックに持っていれば考えやすくなるのではないか。そういう意味で、言語と言語教育のアナロジーを見ていきたいと考えている。「実践」ということを数学者が語ると「実践が分からないのに、なぜ実践を語るのか」と現場の方に言われるが、そのように言われないうために、その基礎を作ろうとしている。

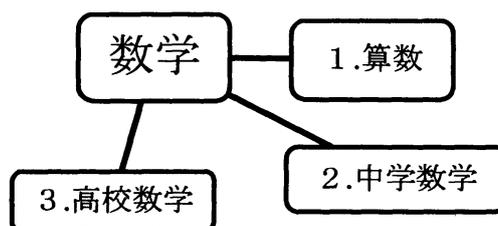
意見： 数学の教師になろうとする学生が、どうすれば大学で学ぶ数学と高校数学の内容を相対化して見られるようになるのかということが問題ではないのか。

意見： 大学で数学教師を養成する際に、数学科教育法や数学科指導法などは免許法上どうしても行わなくてはいけない。その上で教育数学を教える必要性を感じる。自分が大学時代に、教育数学という科目で藤澤の本や三千題を学び、卒業後に工業高校の教員になったが、全く役に立たなかった。しかし、徐々にそれらの話を、生徒たちに伝えることが出来るようになったと感じている。ペリーやクラインが、当時どのような数学が必要だったかを知ることが出来るように深く掘り下げた教材化ができれば、将来、教師になっていく学生にとって、有効なものになると思う。また、数学を学んでいて、 $\leq$  が  $\leq$  で表現されているだけで不安になる。このように、言葉が少し変わると戸惑ってしまうことがある。そのために、例えば、幾何的なアプローチや代数的なアプローチで表現するところなるというように、どのように構築されているかをはっきりと体系化してほしい。様々な角度からのアプローチが理解できるようなものにしてほしい。

意見： 大学で言語は3つに分類して考えられている。この考え方が、数学に役に立つのではないかと考えている。言語の考え方は、



数学の考え方をあてはめると、



数学という言葉として捉えれば、言語の考え方と一緒にではないか。

### 3.1 第1班

質問： 第0班は「あなたが大学で学んできた数学が絶対ではない」というメッセージを発したいとのことだったが、第1班の説明を聞くと、教員養成系の大学で扱う数学の専門内容を、理学部数学科が学ぶ内容に近づけようとしているように思える。これについてどう考えているか？また、第1班が提示した数学の内容はかなり多く、一部を除き理学部数学科で教えられている内容以上のように感じる。

回答： 提示したまとめ方が、なぜ理学部数学科の内容によく似ているかという点、教員養成系の大学で数学の専門科目を担当している先生は理学部数学科出身なので、教員養成系の形式で質問するとアンケートは成り立たなくなる。全ての先生に共通の言語は理学部数学科の内容なので、その項目で質問することになり、このような結果になる。例えば、初等整数論は理学部では扱われないし、初等幾何や解析幾何も普通、理学部では扱われないが、教員養成系の大学では広範に扱われているということが明らかになった。初等整数論について言えば、小中高の内容と密接に関わっているということで、そういう内容を理解するのに役立つので必要である。内容面で考えると、みんなが理解できるように工夫されているとは思いますが、実際にはなかなか難しい。

質問： それは、理学部数学科に近づけようとしていると言えるのでは？

回答： それは違う。理学部数学科とは逆向きの方向性で考えている。

意見： 理学部数学科に近づけるのが悪いと言っているのではなく、やはり教育にとって、本当に大切なことが理学部数学科の内容の中にあるということで考えられているものであるならば、良いことだと思う。私は、教員養成系だからといって、別の内容があってもあまり傾き過ぎるのは良くないと考える立場なので、第1班が提示した内容が悪いのではなく、それぞれの内容について細かく見ていけば、さらに議論ができるのではないかと思う。

成果報告者の意見： 免許の必要取得単位数が40単位から20単位になった影響もあるが、理学部数学科のように行うとなると入門ばかりをすることになってしまう。そういう授業では成果が上がらないので、学生がどういう動機を持って学ぶかということ考

えて、具体的なものをどう考えていくかという授業をしようとすると、どうしても理学部数学科とは離れざるを得ない。理学部数学科の入門内容ばかりをしても、学生にとって何も楽しみがない。

理学部数学科出身の先生達の共通言語で聞かなくてはならないし、もともと先生達に、教育というフィールドがない。今後、我々が提案していく場合には、教育との関わりを持って提案していきたい。

質問： 新任の先生達が教え難いことに初等整数論、初等幾何がある。大学で学んだことが現場で役立つことが大切なのではないか。

回答： そういう内容は、教員養成系において現実には広範に行われている。理学部数学科では教えないが教員養成系では教えるということは、教員養成系では、具体的なものや現場につながるような内容が重要になってくるのだと思うし、そういうつもりで、我々も考えている。

意見： 第1班が作成した資料は、どのような内容が教員養成系で行われているかが分かり、また、数学の構造や指導要領とどうつながるかを理解するためには何を学ぶべきかが分かる貴重な資料だと感じた。

### 3.2 第2班

討論は、報告で紹介された事例である正多角形の作図に関する教材についての次の質問から始まった。

質問： 折り紙を使えば角の3等分線が引けるというのはとても面白い。3次方程式が出てきてしまい作図では解けないという場合、折り紙でできるが方程式ではできないということを、実際にはどのように伝えるのか？

回答： 最初に、五角形だと2次方程式が出てきて解けるが、七角形になると3次方程式になり定規やコンパスで方程式が解けないということを示しておいてから、折り紙では出来るが何が違うのでしょうか？という流れで出来るのではないかと考えている。折り紙で放物線の共通接線が引けるということも、放物線の共通接線は習うのだから、勉強しておきましょうと言いたい。

質問： 大学生は、定規とコンパスを用いて作図できる限界というものを、どこまでわかっているのか？

回答： 恐らく分かっていないだろう。教員免許取得単位数が40単位だった頃は、ガロア理論を教えていたので、その頃はやっていた。しかし、20単位に減った今はガロア理論を教えられないし、学生のレベルもとても低下してしまっているのだから、理解できる状態ではない。学生は五角形くらいまでしかわかっていないと思う。七角形が定規とコンパスで作図できないということを知らないだろう。本来は、教えなくてはいけないのだ

ろうとは思っている。この折り紙の教材は、先生がちゃんと分かっていたら、中学生にさせることも可能だと思う。

意見： 折り紙を使った教材化は、高校と大学の交流の際によく話題に上がるが、中学校の先生には中学生にわかるように教えることが求められる。今回の折り紙の教材は、小中高大で扱う方法が異なるので、その具体例が積み上がっていけば、現場にとって本当にありがたいと思う。第0班、第1班と高度な内容が続いていたが、第2班になって、より具体的な内容になり、とても広い範囲に亘って研究されているのだと感じた。

回答： こういう事例をたくさん作ろうとしているのが現状である。ただ、実際に学生に対して行ってみると、反応がいま一つなのが現実である。

### 3.3 第3班

報告の中で紹介された奈良教育大学の高校との連携事業に対し、実施における具体的な事項に関する質疑応答があった。

### 3.4 第4班

意見： 第4班のような図形の問題は本当に面白い。私が中学校で教えていたときに、三角形の傍心の教材として、傍心で新たな三角形を作り、中学生には傍心三角形と呼ばせて、傍心三角形の傍心と元の三角形の傍心との関係を考えさせた。面白い図形の課題は、中学生には良い刺激になるのではないかなと思う。

回答： 最近では、お絵かきソフトがあるので、四角形を描いて1点を引っ張れば、辺が交差していきながら絵を描くことができ、どのような状態になるか予想が付きやすくなっていることも事実である。しかし、中学生や高校生が興味を持ってやってくれるのは良いが、それで数学のプロになれると思わないでほしい。このような幾何学の課題に対して、高校の数学の先生が、なにか新しいことに向けて一生懸命取り組んでおられる姿は、学生にとっても良い影響を与えらると思う。

### 3.5 全体を通しての質疑応答

○第2班と第3班の住み分けについて説明してほしいとの声があり、次のような回答があった。

第2班は、教員養成系での学生への教育における教材について考えており、大学教育に焦点を絞った題材を考えている。それに対して、第3班は、学校の教科内容の背景にある数学の事例研究であり、いろいろなところで使われる数学の事例研究を通して数学教師の養成をしたいと考えている。つまり、第3班は、広い範囲で数学があらゆるところにあるということを考えている。

第2班は、教員養成における教育の中で、教材研究の仕方を指導しようというかなり限定した形で考えている。第2班と第3班では、いろいろな事例を挙げることによって一般的なことを習得してほしいという願いは共通である。

これらの回答に関連し、次の意見があった。

- ・ これらは、教科の指導法でちょっと抜けがちな、直接的には学校教育の指導法ではない教材である。
- ・ 今までこういう内容のものは、大学で教える中では存在しなかった。そういう意味では、別の視点を当てているのではないかと思う。

○第1班の成果について、第1班の担当者から次の説明があった。

- ・ 標準モデルの内容としては大学院での教育も想定している。背景にある事例も内容に取り入れていこうと考えている。
- ・ 標準モデルは、授業時間のことを考えると制約がついてしまい、あくまでも理想論である。すべてを授業したら40時間でも難しいかもしれない。

○現場で数学を教えている先生が数学の何を学んでおきたかったかということの把握が必要かもしれないという意見が出た。これに対し、「よい意見がでない」、「自分達が良い先生だと思える人に意見を聞いていると、聞きたい人にだけ意見を聞いたものになる。」、「統計的に意味のある結果が出ないかもしれない」という否定的な感想とともに、次のような肯定的な意見が出された。

- ・ 聞いてみることは、決して悪いことではない。比較的年齢が高い先生達で大学院に来ている人たちの様子を見ると、大学で学んできたことが全然役に立たなかったというような意見は出てこないと思う。
- ・ 10年ほど前にSSHの学校出身の大学生を対象に、「高校までにどのような数学を勉強しておけばよかったか?」という調査を行った。理系の学生からは「高校までに微分方程式関係のことを学んでおきたかった」、また文系・理系に関係なく出てきたのが「統計をもう少しやっておきたかった」という結果であった。そこで、高校で統計と微分方程式について教材開発を行った。アンケートはやってもよいと思う。

この二つ目の意見に関連して、次のコメントがあった。

- ・ 今は高校で教えられていなくて、理系の大学生が重要視している微分方程式だが、第1班の全国調査では、全国の教員養成系の大学で微分方程式を教えているところは半分くらいしかなかった。このことを何とかしなくてはいけない。

○教育数学に関する議論の中で、次の意見があった。

学校では「数学のよさ」というあいまいな表現がされていて、現場は混乱しているのだが、実際には、数学と世界がつながっていることを教えるように言っている。それにあたる部分に対し、先生達はどのような意識を持てばよいのか、それをどのように教えれ

ばよいのか、ということが大切である。世界というのは、すぐ目の前にある身の周りのことを指すのではなく、学問文化を含めた広い範囲を指している。

## 4. 教育現場からの意見

### 4.1 「数学教師に必要な数学能力の育成法に関する研究発表」に対する感想や意見

岐阜県教育委員会・教育研修課 亀山 弘

(Hiroshi Kameyama)

Educational Training Division,

Gifu Prefectural Board of Education

本日は、貴重なお話しを伺うことができ、本当に感謝しています。特に教員養成系大学のカリキュラム一覧については大変価値あるデータであると考えています。これをもとに小中学校や高等学校の算数数学の学習内容を構造化していくと学習内容の系統性や強化しなければならない分野が見えてくるのではないかと思います。その点から考えても大学だけでなく、中学校や高等学校の数学教員にも非常に興味深い研究成果だと拝見させてもらいました。

また、その他教材事例についても現場の教員が簡単に作成できるような教材ではなく、課題研究等を通して時間をかけて取り組ませたい事例がたくさんありました。これらも是非、公開していただき情報共有をさせてもらえたら有り難いと考えています。

さて、お手元に、現在の岐阜県の教員研修基本構想をお持ちしました。私の担当業務は、教員の資質向上を目指して、少しでも多くの優れた教員を育成することが仕事となっています。ご覧のように、現在の教員は研修しなければいけないことが多く、なかなか専門数学だけに専念して研修ができていないわけではありません。つまり、各地の教育センターでは数学の専門性を高めるための十分な研修ができていないわけではありません。今回は、大学での専門数学の必修単位数が40単位から20単位に半減したことに危機感を感じられているようですが、数学教員になってからでも十分な専門数学の学習ができていない状況です。数学教師の能力低下を心配したくなりますが、だからといって、大学だけで十分な数学能力を養成することは難しいと思います。このような大学の専門家と数学教員の交流を通して、数学教員になってからも大学等で学び続ける体制を整備することが必要であると思います。そのように大学の専門家と教員を結びつける役割を担うことができるのは、教育センターしかないと考えています。そういう意味では、まずは地元大学と教育センターとの連携や協力をもっと強化するべきでしょう。

また、小中学校と高等学校、大学の算数数学教員の人間としての交流をもっと進める

べきであると考えています。どうしても、それぞれの校種の中だけで研究会や交流を進めているだけで、縦の連携が取れていません。お互いの壁の大きさを痛感していますが、その壁を取り払い、風通しを良くしていくのも教育センターの勤めでしょう。そのような縦の交流が活発化することで、数学教員に必要な数学能力がますます育成されていくのではないのでしょうか。その際に、今回の研究成果である望ましいカリキュラムや学習内容の系統性が、非常に効果的な役割を担ってくると思います。

このように研究成果を共有したり、議論できる場を今後設定していくため、「組織や体制の整備」と「人間の交流」の2つの面から推進していかなければならないことを痛感しました。

本日は、本当にありがとうございました。

## 4.2 教師と生徒のモチベーションをともに高めるために

三上いつみ (Itsumi Mikami)

元大阪府立高校数学教諭

一燈園高校非常勤講師

### 1. 本研究会に対する感想

今回、この研究会に参加して感じたのは、数学者が集まり、このような研究集会が開かれていることへの意外性である。率直なことを述べると、今まで私自身、数学教育という団体の中に行くと、息苦しさを感じてきた。

本研究会において、大阪府立大手前高校 深川教諭が発表した通り、私が府立高校の教員であった頃は、教師が数学の勉強をする場がたくさんあった。例えば、一松 信先生、山口昌哉先生、竹之内 脩先生などの講義を、教員研修で受講することが出来た。私は、積極的に、それらの研修に参加していた。研修に参加していると、数学教師としての現場を忘れて、のびのびと数学を学ぶことができた。そのような研修が、なくなってきたと聞き、非常に残念に思う。

数学というのは、数学+数学教育ということになると思うが、その両方があるのが教育数学ではないかと思う。この研究会は、その2つのバランスが取れていると感じた。

### 2. 近年の高等学校における数学教師

本研究会において、島根大学 青山先生の発言に、高等学校の先生が、高校生を連れて大学に来て、高校の先生が高校生を対象に、大学受験指導を行ったことがあるというものがあった。そこには、助言者として大学教員が同席していたとのことである。このような場で、高校教諭は、予備校の解答を丸写しするという指導を行ったと聞き、大変残念に感じた。数学の専門家である大学教員が助言者として同席している場で、予備校の

解答を丸写しでは、高校教諭は自分の指導方法を改善するチャンスを逃していると思う。その先生なりの解き方を生徒に提示し、大学教員から指摘を受けるのを生徒に見せることも、生徒にとって良い経験になるのではないだろうか。それによって、高校生の中で数学が発展していくと考える。

このような高校教諭は、特別ではない。以前、数学問題集の別冊解答集を生徒に配布すると、生徒が授業を聞かなくなるという状況があった。問題集は、それほど厚くないが、解答集はその3倍ほどの厚さがある。そこで、私が高校教諭であったとき、解答集を配布していなかった。しかし、5年前から非常勤として勤務している高等学校では、前もって解答集を配布している。解答集を配布してしまうと、生徒が授業を聞かないのではないかと危惧していると、やはり4月～7月までは、授業を聞かなかったが、2学期頃になると解答集を見てもできないということが分かってきたようだ。解答集を見ている教諭もなかにはいるようであったが、私は、どうしても自分で解かなくては気が済まないため、解き方が多少変であっても、計算量が多くなっても、自分で考えて解くことに徹していた。すると、生徒が、解答集のスマートな解答よりも、私が考えて解いたスマートではない解答のほうが、分かりやすいと言うようになった。解答集に頼り、授業を進める高校教諭が増え、かつ、そういう先生がよい先生だと見なす生徒が増えていることは遺憾である。

### 3. 今後の期待

島根大学のように、高校教諭が、生徒を連れて大学に行き、助言者が多くいる中で話しが出来るというのは、助言者から効果的に指摘を受ければ、とても素晴らしい方法であるといえる。そんな方法を全国の高校・大学で行っていけば、高校の先生たちも指導に希望が持てるのではないだろうか。これにより、現場の教員の数学の教育に対するモチベーションも上がっていくだろう。

記録者：坂東久仁子（鳴門教育大学大学院）