数理解析研究所講究録
第1922巻 2014年 96-101

コンパクトトーラスによる軌道空間が単純な多面体でない toric manifold の例

大阪市立大学大学院理学研究科数学教室　須山 雄介
Yusuke Suyama
Department of Mathematics, Graduate School of Science,
Osaka City University

1 Main Theorem

複素 n 次元の **toric variety** とは，$\mathbb{C}$ 上の正規代数多様体 X であって，代数的トーラス $(\mathbb{C}^*)^n$ を稠密な開集合として含み，$(\mathbb{C}^*)^n$ の自分自身への自然な作用を X 全体への作用に拡張するものをいう．このうち，滑らかでコンパクトなものを **toric manifold** という．

注意 1.1. Toric manifold という用語は，後述のように異なる意味で使われることもあるが，本書では滑らかでコンパクトな toric variety を意味するものとする．また，日本語ではともに**トーリック多様体**と訳されてしまうため，ともに英語のまま用いることにする．

X を複素 n 次元の toric manifold とし，$(\mathbb{C}^*)^n$ の作用をコンパクトトーラス $(S^1)^n$ に制限したものを考える．このとき，その軌道空間 $X/(S^1)^n$ は角付き多様体であって，すべての面は可縮で，それらの任意の空でない共通部分は連結となる．特に，次が成り立つ．ここで n 次元多面体が単純であるとは，各頂点に n 個のファセット（余次元 1 の面）が集まっているものをいう．

命題 1.2. X が射影的または $n \leq 3$ ならば，$X/(S^1)^n$ は単純な多面体に角付き多様体として同相である．

これに対し，次の定理を証明した．

定理 1.3 (Suyama [7]). 任意の $n \geq 4$ に対し，複素 n 次元の toric manifolds X で，$X/(S^1)^n$ がいかなる単純な多面体とも角付き多様体として同相にならないものが無限に存在する．

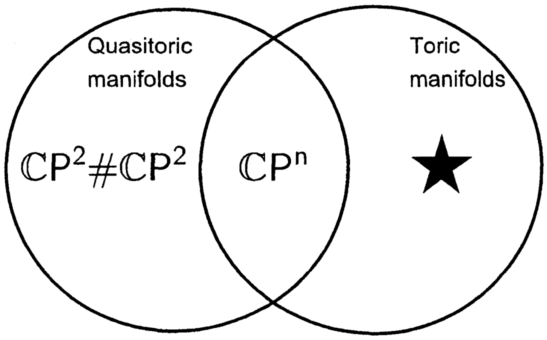
2 Quasitoric Manifolds

定義 2.1 (Davis-Januszkiewicz [4]). 単純な多面体 P 上の実 $2n$ 次元 **quasitoric manifold** とは，可微分閉多様体 X であって，$(S^1)^n$ の可微分な作用をもち，次を満たすものをいう：

1. $(S^1)^n$ の作用は locally standard である．すなわち，X は局所的に $(S^1)^n$ の忠実な複素 n 次元表現と同変同相である；
2. 軌道空間 $X/(S^1)^n$ は P に角付き多様体として同相である．

注意 2.2. Davis-Januszkiewicz は，本書で quasitoric manifold と呼んでいるものを toric manifold と呼んでいる．

X が toric manifold ならば，$(\mathbb{C}^*)^n$ の作用を $(S^1)^n$ に制限したものは locally standard である．したがって，命題 1.2 より，複素 n 次元の toric manifold X は，射影的または $n \leq 3$ ならば quasitoric manifold である．Toric manifold でない quasitoric manifold の例として，複素構造を持たない $\mathbb{C}P^2\#\mathbb{C}P^2$ がある．一方，quasitoric manifold でない toric manifold の存在性は，2002 年に Buchstaber-Panov の本 [2] で未解決問題として取り上げられて以来，これまで例が知られていなかった．定理 1.3 は quasitoric manifold でない toric manifold の初めての例を与える：



3 Non-polytopality

$n-1$ 次元球面 S^{n-1} の単体分割を**単体的** $n-1$ **球面**という．

定義 3.1. K を 単体的 $n-1$ 球面とする．K が **polytopal** であるとは，K がある（n 次元の）単体的な多面体の境界として実現されることをいう．

Toric varieties の圏は，**扇**と呼ばれる錐を集めた組合せ論的な対象の圏との間に圏同値がある．これにより，toric variety の幾何学的な性質を扇の言葉で言い換えることができ

る．たとえば，toric variety が滑らかであるための必要十分条件は，対応する扇の錐をはるベクトルが格子の基底の一部になっていることであり，このとき扇は**非特異**であるという，また，toric variety がコンパクトであるための必要十分条件は，対応する扇の錐が空間全体を覆っていることであり，このとき扇は**完備**であるという．

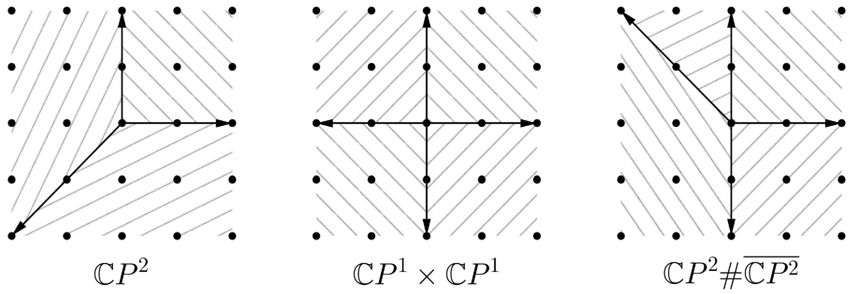


図 1: 扇と対応する toric varieties

そのような言い換えの 1 つとして，次の命題がある．扇 Δ が与えられたときに，錐をはるベクトルに頂点を対応させることで単体複体が得られるが，これを Δ の **underlying simplicial complex** といい，K_Δ で表す．n 次元の完備な扇の underlying simplicial complex は単体的 $n-1$ 球面になる．

命題 3.2. Δ を n 次元の完備で非特異な扇とする．このとき，対応する toric manifold の軌道空間 $X(\Delta)/(S^1)^n$ が単純な多面体であるための必要十分条件は，K_Δ が polytopal であることである．

これにより，完備で非特異な扇であって，その underlying simplicial complex が polytopal でないものを構成すれば，定理 1.3 が示せたことになる．

K を 単体的 $n-1$ 球面とする．$n \leq 3$ ならば K は polytopal（命題 1.2 に対応している）である．$n=4$ では，K は頂点数が 7 以下ならば polytopal である．頂点数 8 の polytopal でない単体的 3 球面には，Brückner 球面，Barnette 球面 [1] の 2 種類があるが，f ベクトル（各次元の面の数を並べたもの）はそれぞれ $(8,28,40,20),(8,27,38,19)$ であり，我々は面の数が少ない Barnette 球面を用いる．

命題 3.2 によれば，Barnette 球面の各頂点にベクトルを対応させ，完備で非特異な扇が得られれば，複素 4 次元の，軌道空間が単純な多面体にならない toric manifold が得られたことになるが，実はそのような扇は存在しない．

命題 3.3 (Ishida-Fukukawa-Masuda [6])**.** Barnette 球面は（4 次元の）完備で非特異な扇の underlying simplicial complex になり得ない．

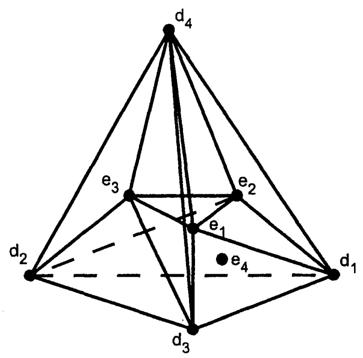


図 2: Barnette 球面

4 Sketch of the Proof

以上の事実を踏まえて，次のような方針を採る．

Step 1. 4 次元の完備で特異な扇 Δ であって，underlying simplicial complex が Barnette 球面であるものを 1 つ構成する．

Step 2. Δ の特異な錐を細分して非特異な扇 Δ' を得る．対応する toric variety $X(\Delta')$ は複素 4 次元の toric manifold である．

Step 3. $K_{\Delta'}$ が polytopal でないことを示す．したがって，$X(\Delta')/(S^1)^4$ は単純な多面体ではない．

Step 4. Δ' に更なる細分と懸垂を施すことにより，定理 1.3 の証明が完成する．

まず Step 1 として，コンピュータでベクトルをランダム生成させることにより，完備で特異な扇であって，underlying simplicial complex が Barnette 球面であるものをいくつか得た．その中から，Step 2, 3 のために次のような性質をもつ扇を選ぶ：

- なるべく特異な錐が少なく，細分を具体的に記述できる．
- Barnette 球面が polytopal でないことの証明として，たとえば Ewald の本 [5] のものがあるが，$K_{\Delta'}$ が polytopal でないこともこれと同様の議論で示せる．

注意 4.1. Polytopal でない単体的球面は，完備で非特異な扇の underlying simplicial complex になり得ない理由が特にないため，軌道空間が単純な多面体にならない toric manifold は存在すると予想されていた．Barnette 球面の細分を用いるというアイデア自体は，2003 年の Civan のプレプリント [3] で述べられていた．しかし，それは具体的に扇を構成したものではなかったため，証明に成功したとは見なされなかった．具体的に

扇を構成し，証明を完成させるには，上記のような性質を満たす扇を求める必要があるが，手計算では困難であった．

実際，図 2 において，e_1, e_2, e_3, e_4 を $\mathbb{Z}^4 \subset \mathbb{R}^4$ の標準基底とし，

$$d_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, d_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, d_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, d_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

とすることで，非特異な 4 次元扇が 14 個，特異な 4 次元扇が 5 個の完備な扇 Δ が得られる．

注意 4.2. Brückner 球面でも同様のランダム生成を行ったが，性質のよい扇は得られなかった．

実際，この扇は上記の性質を満たす．5 個の特異な扇を細分することにより，完備で非特異な扇 Δ' が得られるが，$K_{\Delta'}$ の f ベクトルは $(18, 73, 110, 55)$ であり，Δ' が具体的に記述可能な大きさである．$K_{\Delta'}$ が polytopal でないことは，[5] にある証明と同様の議論で示すことができる（詳細は [7] を参照）．

Step 4 は，$K_{\Delta'}$ が polytopal でないことの証明に影響しない扇をさらに細分することにより，軌道空間が単純な多面体にならない toric manifolds が複素 4 次元で無限に得られる．単体的球面が polytopal でないという性質は懸垂で保たれるので，underlying simplicial complex の懸垂（toric variety では $\mathbb{C}P^1$ を直積することに対応）をとることにより，軌道空間が単純な多面体にならない toric manifold の次元を上げることができる．これで定理 1.3 の証明が完成した．

参考文献

[1] D. Barnette, *Diagrams and Schlegel diagrams*, 1970 Combinatorial Structures and their Applications (Proc. Calgary Internat. Conf., Calgary, Alta.) pp. 1–4 Gordon and Breach, New York.

[2] V. M. Buchstaber and T. E. Panov, *Torus Actions and Their Applications in Topology and Combinatorics*, University Lecture series, vol. 24, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 2002.

[3] Y. Civan, *Some examples in toric geometry*, math.AT/0306029.

[4] M. W. Davis and T. Januszkiewicz, *Convex polytopes, Coxeter orbifolds and torus actions*, Duke Math. J. 62 (1991), 417–451.

[5] G. Ewald, *Combinatorial Convexity and Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Math. vol. 168, Springer–Verlag, New York, 1996.

[6] H. Ishida, Y. Fukukawa, M. Masuda, *Topological toric manifolds*, Moscow Math. J. **13** (2013), no. 1, 57–98.

[7] Y. Suyama, *Examples of smooth compact toric varieties that are not quasitoric manifolds*, to appear in Algebraic & Geometric Topology.