

Lagrange-type duality in DC programming

島根大学大学院総合理工学研究科 原田涼平 (Ryohei Harada)

Interdisciplinary Graduate School of Science and Engineering, Shimane University

島根大学大学院総合理工学研究科 黒岩大史 (Daishi Kuroiwa)

Major in Interdisciplinary Science and Engineering, Shimane University

1 導入

以下の DC 計画問題について考える：

$$(P) \begin{array}{ll} \text{最小化} & f_0(x) - g_0(x) \\ \text{条件} & f_i(x) - g_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m \end{array}$$

ただし、 $f_i, g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\} (i = 0, 1, \dots, m)$ は閉真凸関数とする。DC 計画問題の双対性の結果が、1999年、J.-E. Martinez-Legaz, M. Volle [4] によって与えられた。その後 DC 計画問題を同値変形して得られる標準 DC 計画問題に関する双対性の結果が 2013年、Y. Fujiwara, D. Kuroiwa [5] によって与えられた。標準 DC 計画問題は DC 計画問題の特殊な場合であるが、標準 DC 計画問題に限れば [5] の結果は [4] の拡張になっている。そこで本書では DC 計画問題に関する双対性の結果を [4] よりも広い範囲で適用できるような条件を考察していく。

2 準備

\mathbb{R}^n において、 $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ と $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ の内積を $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$ で定義する。集合 $A \subseteq \mathbb{R}^n$ の凸包、錐包をそれぞれ $\text{co } A$, $\text{cone } A$ と表記する。主たる関数の値域として拡張実数 $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ を考え、慣例に従って $(+\infty) - (+\infty) = +\infty$, $0 \cdot (+\infty) = 0$ としておく。 f を \mathbb{R}^n から $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ への関数とするとき、 $\text{dom } f = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) < +\infty\}$ を f の実行定義域、 $\text{epi } f = \{(x, r) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid x \in \text{dom } f, f(x) \leq r\}$ を f のエピグラフという。 $\text{dom } f \neq \emptyset$ のとき、 f は真であるという。 $\text{epi } f$ が凸集合、閉集合のとき、 f はそれぞれ凸関数、下半連続関数（あるいは閉関数）という。もちろん、 f が凸関数であることと、任意の $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in (0, 1)$ に対して、 $f((1 - \alpha)x + \alpha y) \leq (1 - \alpha)f(x) + \alpha f(y)$ が成り立つことは同値である。 $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ における二項関係 \bullet と $y \in \mathbb{R}$ について、

$\{f \bullet y\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \bullet y\}$ で定義される集合を f のレベル集合という。凸関数 f について、 $f^*(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{\langle x, y \rangle - f(x)\}$ で定義される関数 $f^* : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ を f の共役関数という。 $x \in \mathbb{R}^n$ における劣微分を $\partial f(x) = \{x^* \in \mathbb{R}^n \mid \langle x^*, y - x \rangle \leq f(y) - f(x), \forall y \in \mathbb{R}^n\}$ で定義する。このとき $f(x) + f^*(y) = \langle y, x \rangle$ であることと $y \in \partial f(x)$ であることは同値である。集合 $A \subseteq \mathbb{R}^n$ に対して、

$$\delta_A(x) = \begin{cases} 0 & x \in A \\ +\infty & x \notin A \end{cases}$$

で定義される関数 $\delta_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ を A の標示関数という。以下は凸計画問題における双対性の結果である。

定理 1. (Goberna, Jeyakumar, Lopez, [1]). I を添え字集合、 $g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\} (i \in I)$ を下半連続真凸関数、 C を閉凸集合、 $A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) \leq 0, \forall i \in I\} \neq \emptyset$ とする。このとき以下は同値である：

- (i) $\text{cone co} \bigcup_{i \in I} \text{epi } g_i^* + \text{epi } \delta_C^*$ は閉集合
- (ii) $A \cap \text{dom } f \neq \emptyset$ かつ $\text{epi } f^* + \text{epi } \delta_A^*$ が閉であるような任意の閉真凸関数 $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ について

$$\inf_{x \in A} f(x) = \max_{\lambda \in \mathbb{R}_+^{(I)}} \inf_{x \in C} \left\{ f(x) + \sum_{i \in I} \lambda_i g_i(x) \right\},$$

- (ii) 任意の $v \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$\inf_{x \in A} \langle v, x \rangle = \max_{\lambda \in \mathbb{R}_+^{(I)}} \inf_{x \in C} \left\{ \langle v, x \rangle + \sum_{i \in I} \lambda_i g_i(x) \right\},$$

ただし、 $\lambda \in \mathbb{R}_+^{(I)}$ であるとは任意の $i \in I$ に対して $\lambda_i \geq 0$ でありさらに $\{i \in I \mid \lambda_i \neq 0\}$ が有限集合となることである。

3 DC 計画問題における双対性の既存の結果

DC 計画問題 (P) における双対性の既存の結果として、まずは J.-E. Martinez-Legaz, M. Volle [4] によって与えられた定理 2 と定理 3 について述べる。ただし、この二つの定理においては、 $0 \cdot (+\infty) = +\infty, 0 \cdot (-\infty) = 0$ としている。

定理 2. (J.-E. Martinez-Legaz, M. Volle, [4]) $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\} (i = 0, 1, \dots, m)$ を凸関数、 $g_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ を $g_0 = g_0^{**}$ を満たす関数、

$g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\} (i = 1, \dots, m)$ を $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f_i(x) - g_i(x) \leq 0 (i = 1, \dots, m)\}$ で劣微分可能な凸関数とする。

任意の $(x_1^*, \dots, x_m^*) \in \prod_{i=1}^m \{g_i^* - f_i^* \leq 0\}$ に対してある $\bar{x} \in \text{dom} f_0$ が存在して $f_i(\bar{x}) - \langle \bar{x}, x_i^* \rangle + g_i^*(x_i^*) < 0 (i = 1, \dots, m)$ となるならば

$$\begin{aligned} & \inf_{f_i(x) - g_i(x) \leq 0} \{f_0(x) - g_0(x)\} \\ &= \inf_{x^* \in \text{dom} g_0^*} \inf_{g_i^*(x_i^*) - f_i^*(x_i^*) \leq 0} \max_{\lambda \in \mathbb{R}_+^m} \left\{ g_0^*(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i^*(x_i^*) - \left(f_0 + \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i \right)^* \left(x^* + \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i^* \right) \right\} \end{aligned}$$

定理 3. (J.-E. Martinez-Legaz, M. Volle, [4]) $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\} (i = 0, 1, \dots, m)$ を凸関数、 $g_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ を $g_0 = g_0^{**}$ を満たす関数、 $g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\} (i = 1, \dots, m)$ を $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f_i(x) - g_i(x) \leq 0 (i = 1, \dots, m)\}$ で劣微分可能な凸関数とする。任意の $(x_1^*, \dots, x_m^*) \in \Omega = \{(x_1^*, \dots, x_m^*) \in \mathbb{R}^{nm} \mid \partial g_1^*(x_1^*) \cap \dots \cap \partial g_m^*(x_m^*) \neq \emptyset\}$ に対してある $x_0 \in \text{dom} f_0$ が存在して $f_i(x_0) - \langle x_0, x_i^* \rangle + g_i^*(x_i^*) < 0 (i = 1, \dots, m)$ となるならば

$$\begin{aligned} & \inf_{f_i(x) - g_i(x) \leq 0} \{f_0(x) - g_0(x)\} \\ &= \inf_{(x_0^*, x_1^*, \dots, x_m^*) \in \text{dom} g_0^* \times \Omega} \max_{\lambda \in \mathbb{R}_+^m} \left\{ g_0^*(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i^*(x_i^*) - \left(f_0 + \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i \right)^* \left(x^* + \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i^* \right) \right\} \end{aligned}$$

次に標準DC計画問題についての先行研究を述べる。一般に、DC計画問題(P)は次の標準DC計画問題(Q)に同値変形することができる:

$$(Q) \quad \begin{array}{ll} \text{最小化} & \langle a, x \rangle \\ \text{条件} & f(x) \leq 0, g(x) \geq 0 \end{array}$$

ただし、 $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ は凸関数、 $a \in \mathbb{R}^n$ とする。次の定理4と定理5は標準DC計画問題(Q)の双対性を与えている。

定理 4. (Y. Fujiwara, D. Kuroiwa, [5]) $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ を凸関数、 $a \in \mathbb{R}^n$ 、 $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq 0, g(x) \geq 0\} \neq \emptyset$ 、 $\bigcup_{x \in S} \partial g(x) \subseteq A$ とする。任意の $z \in A \cap \text{dom} g^*$ に対して、 $\{f \leq 0\} \cap \{(-z, \cdot) + g^*(z) \leq 0\} \neq \emptyset$ かつ $\text{cone co}(\text{epi } f^* \cup \{-z\} \times [-g^*(z), +\infty) \cup \{0\} \times [0, +\infty))$ が閉集合であるならば、

$$\inf_{f(x) \leq 0, g(x) \geq 0} \langle a, x \rangle = \inf_{y \in A} \max_{\lambda, \mu \geq 0} \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \{ \langle a, x \rangle + \lambda f(x) + \mu (\langle -y, x \rangle + g^*(y)) \}$$

定理 5. (Y. Fujiwara, D. Kuroiwa, [5]) $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ を凸関数、 $a \in \mathbb{R}^n$ 、 $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq 0, g(x) \geq 0\} \neq \emptyset$ 、 $Y' = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \{f \leq 0\} \cap \{\langle y, \cdot \rangle > g^*(y)\} \neq \emptyset\}$ 、 $\bigcup_{x \in S} \partial g(x) \subseteq A \subseteq Y'$ とする。 $\text{cone epi } f^* + \{0\} \times [0, +\infty)$ が閉集合であるならば

$$\inf_{f(x) \leq 0, g(x) \geq 0} \langle a, x \rangle = \inf_{y \in A} \max_{\lambda, \mu \geq 0} \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \{ \langle a, x \rangle + \lambda f(x) + \mu (\langle -y, x \rangle + g^*(y)) \}$$

一般に標準 DC 計画問題は DC 計画問題の特別な場合であるので、定理 4 と定理 5 よりも定理 2 と定理 3 の方が適用できる範囲は広い。しかしながら標準 DC 計画問題に限れば、定理 4 と定理 5 は定理 2 と定理 3 の拡張になっており、仮定の条件も弱くなっている。そこで以降では一般の DC 計画問題において双対性が成り立つような定理 2 と定理 3 よりも弱い仮定の条件を考えていく。

4 主定理とその応用

(P) を変形して得られる以下の凸計画問題 $(P(y_0, (y_i)))$ を考える:

$$(P(y_0, (y_i))) \begin{array}{l} \text{最小化} \quad f_0(x) - \langle x, y_0 \rangle + g_0^*(y_0) \\ \text{条件} \quad f_i(x) - \langle x, y_i \rangle + g_i^*(y_i) \leq 0, \forall i = 1, \dots, m \end{array}$$

ただし、 $(y_0, (y_i)) = (y_0, y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^{n(m+1)}$ と表記する。ここで、 $\text{Val}(P)$ と $\text{Val}(P(y_0, (y_i)))$ をそれぞれ (P) と $(P(y_0, (y_i)))$ の最適値とする。このとき $\text{Val}(P)$ と $\text{Val}(P(y_0, (y_i)))$ について、以下の関係が成り立つ。

定理 6. ([6]) $f_i, g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\} (i = 0, 1, \dots, m)$ を閉真凸関数、 $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f_i(x) - g_i(x) \leq 0, \forall i = 1, \dots, m\} \neq \emptyset$ 、 $g_i (i = 1, \dots, m)$ は S で劣微分可能、 $\bigcup_{x \in S} \partial g_0(x) \subseteq D_0 \subseteq \mathbb{R}^n$ 、 $\bigcup_{x \in S} \left(\prod_{i=1}^m \partial g_i(x) \right) \subseteq D \subseteq \mathbb{R}^{nm}$ とする。このとき

$$\text{Val}(P) = \inf_{(y_0, (y_i)) \in D_0 \times D} \text{Val}(P(y_0, (y_i))).$$

この事実を利用することで以下の結果を得る。

定理 7. ([6]) $f_i, g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\} (i = 0, 1, \dots, m)$ を閉真凸関数、 $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f_i(x) - g_i(x) \leq 0, \forall i = 1, \dots, m\} \neq \emptyset$ 、 $g_i (i = 1, \dots, m)$ は S で劣微分可能、 $\bigcup_{x \in S} \partial g_0(x) \subseteq D_0 \subseteq \mathbb{R}^n$ 、 $\bigcup_{x \in S} \left(\prod_{i=1}^m \partial g_i(x) \right) \subseteq D \subseteq \mathbb{R}^{nm}$ とする。任意の $(y_i) \in D \cap \prod_{i=1}^m \text{dom } g_i^*$ に対して $S(y_i) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f_i(x) - \langle x, y_i \rangle + g_i^*(y_i) \leq 0, \forall i = 1, \dots, m\} \neq \emptyset$ かつ

$$\text{cone co} \bigcup_{i=1}^m (\text{epi } f_i^* - (y_i, g_i^*(y_i))) + \{0\} \times [0, +\infty)$$

が閉集合であるならば

$$\text{Val}(P) = \inf_{(y_0, (y_i)) \in D_0 \times D} \max_{\lambda_i \geq 0} \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ f_0(x) - \langle x, y_0 \rangle + g_0^*(y_0) + \sum_{i=1}^m \lambda_i (f_i(x) - \langle x, y_i \rangle + g_i^*(y_i)) \right\}$$

この結果は定理 2、3、4、5 の拡張になっていることがわかる ([6])。次にこの結果を用いて解決できる例を与える。

例 1.

$$(P) \begin{array}{l} \text{最小化 } x - |y| \\ \text{条件 } x^2 + y^2 - 1 - |x| \leq 0 \end{array}$$

$f_0(x, y) = x$, $g_0(x, y) = |y|$, $f_1(x, y) = x^2 + y^2 - 1$, $g_1(x, y) = |x|$, $D_0 = \{0\} \times [-1, 1]$, $D = [-1, 1] \times \{0\}$ とする。任意の $(z, w) \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$g_0^*(z, w) = \delta_{\{0\} \times [-1, 1]} \quad \text{and} \quad g_1^*(z, w) = \delta_{[-1, 1] \times \{0\}}$$

となる。さらに任意の $y_1 \in D$ に対して $S(y_1) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f_1(x) - \langle x, y_1 \rangle + g_1^*(y_1) \leq 0\}$ が空集合でないことと

$$\text{cone co}(\text{epi } f_1^* - (y_1, g_1^*(y_1))) + \{0\} \times [0, +\infty)$$

が閉集合になることがわかる。したがって定理 8 より

$$\begin{aligned} \text{Val}(P) &= \inf_{(t_1, t_2) \in D_0, (t_3, t_4) \in D} \max_{\lambda \geq 0} \inf_{(x, y) \in \mathbb{R}^2} \{f_0(x, y) - \langle (x, y), (t_1, t_2) \rangle + g_0^*(t_1, t_2) + \lambda(f_1(x, y) - \langle (x, y), (t_3, t_4) \rangle + g_1^*(t_3, t_4))\} \\ &= \inf_{t_2, t_3 \in [-1, 1]} \max_{\lambda \geq 0} \inf_{(x, y) \in \mathbb{R}^2} \{x - t_2 y + \lambda(x^2 + y^2 - 1 - t_3 x)\} \\ &= \inf_{t_2, t_3 \in [-1, 1]} \max_{\lambda > 0} \inf_{(x, y) \in \mathbb{R}^2} \{x - t_2 y + \lambda(x^2 + y^2 - 1 - t_3 x)\} \\ &= \inf_{t_2, t_3 \in [-1, 1]} \max_{\lambda > 0} \inf_{(x, y) \in \mathbb{R}^2} \left\{ \lambda \left(\left(x - \frac{\lambda t_3 - 1}{2\lambda} \right)^2 + \left(y - \frac{t_2}{2\lambda} \right)^2 - \left(\frac{\lambda t_3 - 1}{2\lambda} \right)^2 - \left(\frac{t_2}{2\lambda} \right)^2 - 1 \right) \right\} \\ &= \inf_{t_2, t_3 \in [-1, 1]} \max_{\lambda > 0} \left\{ \lambda \left(- \left(\frac{\lambda t_3 - 1}{2\lambda} \right)^2 - \left(\frac{t_2}{2\lambda} \right)^2 - 1 \right) \right\} \\ &= \inf_{t_2, t_3 \in [-1, 1]} - \min_{\lambda > 0} \left\{ \frac{t_3^2 + 4}{4} \lambda + \frac{t_2^2 + 1}{4\lambda} - \frac{t_3}{2} \right\} \\ &= \inf_{t_2, t_3 \in [-1, 1]} \left\{ -2 \sqrt{\frac{t_3^2 + 4}{4} \cdot \frac{t_2^2 + 1}{4}} + \frac{t_3}{2} \right\} \\ &= \inf_{t_3 \in [-1, 1]} \left\{ -2 \sqrt{\frac{t_3^2 + 4}{4} \cdot \frac{1^2 + 1}{4}} + \frac{t_3}{2} \right\} \\ &= -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{10}}{2} \end{aligned}$$

関数 $f_i (i = 1, \dots, m)$ がゼロ関数のとき、上の定理で現れる

$$\text{cone co} \bigcup_{i=1}^m (\text{epi } f_i^* - (y_i, g_i^*(y_i))) + \{0\} \times [0, +\infty)$$

は、特別な仮定が成立していなくとも、常に閉集合となる。従って、逆凸制約の DC 最適化問題に対する興味深い結果が得られる。

定理 8. ([6]) $f_0, g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\} (i = 0, 1, \dots, m)$ を閉真凸関数、 $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) \geq 0, \forall i = 1, \dots, m\} \neq \emptyset$ 、 $g_i (i = 1, \dots, m)$ は S で劣微分可能、 $\bigcup_{x \in S} \partial g_0(x) \subseteq D_0 \subseteq \mathbb{R}^n$ 、 $\bigcup_{x \in S} \left(\prod_{i=1}^m \partial g_i(x) \right) \subseteq D \subseteq \mathbb{R}^{nm}$ とする。このとき、

$$\text{Val(P)} = \inf_{(y_0, (y_i)) \in D_0 \times D} \max_{\lambda_i \geq 0} \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ f_0(x) - \langle x, y_0 \rangle + g_0^*(y_0) + \sum_{i=1}^m \lambda_i (g_i^*(y_i) - \langle x, y_i \rangle) \right\}$$

参考文献

- [1] M.A. GBERNA, V. JEYAKUMAR, M.A. LÓPEZ, *Necessary and sufficient constraint qualifications for solvability of systems of infinite convex inequalities*, *Nonlinear Anal.* 68 (2008) 1184-1194.
- [2] V. JEYAKUMAR, N. DINH, G.M. LEE, *A new closed cone constraint qualification for convex optimization*, Research Report AMR 04/8, Department of Applied Mathematics, University of New South Wales (2004)
- [3] R. HORST, N.V. THOAI, *DC programming: overview*, *J. Optim. Theory Appl.* 103 (1999) 1-43.
- [4] J.-E. MARTÍNEZ-LEGAZ, M. VOLLE, *Duality in DC programming: the case of several DC constraints*, *J. Math. Anal. Appl.* 237 (1999) 657-671.
- [5] Y. FUJIWARA, D. KUROIWA, *Lagrange duality in canonical DC programming*, *J. Math. Anal. Appl.* 408 (2013) 476-483.
- [6] R. HARADA, D. KUROIWA, *Lagrange-type duality in DC programming*, submitted.