数理解析研究所講究録
第 1935 巻 2015 年 6-17

The James constant of extreme norms on $\mathbb{R}^2$

新潟大学大学院・自然科学研究科　佐藤　正博 (Masahiro Sato)
Department of Mathematical Science,
Graduate School of Science and Technology, Niigata University

1　序論

本研究は佐藤-小室-三谷-斎藤-田中による共同研究である.

Banach 空間の幾何学的構造の研究は, 無限次元における空間の凸性や滑らかさについての結果を与える重要な基礎分野であり, これまで多くの研究者により研究されてきた.

1964 年, James [9] は Banach 空間の幾何学的性質の一つとして uniform non-squareness の概念を導入した. Banach 空間 X が uniformly non-square であるとは, $\|x-y\| \geq 2(1-\delta)$ かつ $x, y \in S_X$ ならば $\|x+y\| \leq 2(1-\delta)$ となることを満たすような $\delta \in (0,1]$ が存在することである. Uniform non-squareness に関わる重要な結果として, すべての uniformly non-square な Banach 空間 は 回帰的であるということが知られている. さらに, García-Falset 等 [7] は近年, uniformly non-square な Banach 空間は非拡大写像に対する不動性を持つことを示した.

1990 年に, Gao and Lau [3] は uniform non-squareness の概念に関連して, James 定数を導入し, 研究した. Banach 空間 X に対して, $S_X = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ とする. このとき, X の James 定数 $J(X)$ は

$$J(X) = \sup\{\min\{\|x+y\|, \|x-y\|\} : x, y \in S_X\}$$

と定義される. また, James 定数は様々な研究者に研究されてきた. (cf. [2, 3, 4, 5, 6, 10, 17]). James 定数の性質として次のようなものが挙げられる:

(i) 任意の Banach 空間 X に対して, $\sqrt{2} \leq J(X) \leq 2$ となる.

(ii) X が Hilbert 空間のとき $J(X) = \sqrt{2}$ となる. また, 逆は一般的に成立しない.

(iii) Banach 空間 X が uniformly non-square であることと $J(X) < 2$ であることとは同値である.

(iv) $1 \leq p \leq \infty$ かつ $1/p + 1/q = 1$ に対して, $\dim L_p \geq 2$ であるとき $J(L_p) = \max\{2^{1/p}, 2^{1/q}\}$ となる.

一般に James 定数を計算することは非常に難しいが, extreme absolute norm を持った $\mathbb{R}^2$ などにおいては James 定数が計算されている. $\mathbb{R}^2$ 上のノルム $\|\cdot\|$ が absolute であるとは $\|(x_1, x_2)\| = \|(|x_1|, |x_2|)\|$ を満たすことであり, normalized であるとは $\|(1,0)\| = \|(0,1)\| = 1$ を満たすことである. AN_2 を $\mathbb{R}^2$ 上のすべての absolute normalized norms の族とし, Ψ_2 を $t \in [0,1]$ に対して $\max\{1-t, t\} \leq \psi(t) \leq 1$ を満たすような凸関数の集合とする. このとき AN_2 と Ψ_2 は $t \in [0,1]$ に対して等式 $\psi(t) = \|(1-t, t)\|_\psi$ のもとで 1 対 1 対応することが知られている. ψ に対応するノルム $\|\cdot\|_\psi$ は

$$\|(x_1, x_2)\|_\psi = \begin{cases} (|x_1| + |x_2|)\psi\left(\dfrac{|x_2|}{|x_1| + |x_2|}\right) & ((x_1, x_2) \neq (0,0)), \\ 0 & ((x_1, x_2) = (0,0)), \end{cases}$$

で与えられる. (cf. [19, 20]). 集合 AN_2 と Ψ_2 は凸であり, $\|\cdot\|_\psi \leftrightarrow \psi$ の対応は凸結合を保存する. つまり, 次の性質を保つ:

(i) $\|\cdot\|, \|\cdot\|' \in AN_2$ とする. このとき $(1-\lambda)\|\cdot\| + \lambda\|\cdot\|' \in AN_2$ が成り立つ.

(ii) $\phi, \psi \in \Psi_2$ とする. このとき $(1-\lambda)\phi + \lambda\psi \in \Psi_2$ が成り立つ.

(iii) 任意の $\phi, \psi \in \Psi_2$ と $\lambda \in [0,1]$ に対して $(1-\lambda)\|\cdot\|_\phi + \lambda\|\cdot\|_\psi = \|\cdot\|_{(1-\lambda)\phi+\lambda\psi}$ が成り立つ.

したがって, AN_2 と Ψ_2 はこれらの凸構造に関して同型である.

AN_2 の extreme point $\mathrm{ext}(AN_2)$ は Grząślewicz [8] によって研究され, $\|\cdot\| \in AN_2$ とすると $\|\cdot\|$ が AN_2 の extreme point であることと, $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$ のすべての extreme point が $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ の単位球面に含まれることが同値であることが示された. さらに, 2010 年に斎藤-三谷-小室 [11] によって同じ結果が凸関数との対応を用いて示された.

2001 年に, 加藤-Maligranda-高橋 [10] は $J(X^*) = J(X)$ が一般的には成り立たないことを示した. また, 2003 年には, 三谷-斎藤 [14] によって symmetric absolute norm を持つ $\mathbb{R}^2$ の James 定数を比較的単純に計算する手法が与えられた. ただし, $\mathbb{R}^2$ 上のノルムが symmetric であるとは $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ に対して $\|(x_1, x_2)\| = \|(x_2, x_1)\|$ が成り立つことである. この手法を用いて symmetric な extreme absolute norm をもつ $\mathbb{R}^2$ の James 定数が計算された. さらに, 2011 年に, 小室-斎藤-三谷 [12] は symmetric でない extreme absolute norm を持つ $\mathbb{R}^2$ の James 定数についても計算した. 本論文では, 実際に extreme absolute norm を持つ $\mathbb{R}^2$ の双対空間の James 定数を求め, 元の空間との関係を研究する.

2 $\mathbb{R}^2$ 上の extreme absolute norm と James 定数

2003 年, 三谷-斎藤 [14] は $\mathbb{R}^2$ 上の symmetric absolute normalized norm の James 定数について研究し, 次の定理を示した.

定理 2.1 (三谷-斎藤 [14]). $\psi \in \Psi_2$ が $t = \frac{1}{2}$ に関して symmetric と仮定する. このとき

$$J((\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\psi)) = \max_{0 \leq t \leq 1/2} \frac{2-2t}{\psi(t)}\psi\left(\frac{1}{2-2t}\right)$$

が成り立つ.

この定理は symmetric absolute norms の James 定数を計算するうえで非常に有用な定理である. また,

$$f(t) = \frac{2-2t}{\psi(t)}\psi\left(\frac{1}{2-2t}\right)$$

とすると $f(0) = 2\psi\left(\frac{1}{2}\right)$ 及び $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\psi\left(\frac{1}{2}\right)}$ であるから, 不等式

$$J((\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\psi)) \geq \max\left\{2\psi\left(\frac{1}{2}\right), \frac{1}{\psi\left(\frac{1}{2}\right)}\right\}$$

は常に成立する.

定理 2.1 から, 直接的な結果として次の命題が得られる.

命題 2.2. $\psi \in \Psi_2$ とする. ψ が $t = \frac{1}{2}$ に関して symmetric と仮定する. このとき次の (i), (ii) が成立する。

(i) $\psi \geq \psi_2$ かつ $t = \frac{1}{2}$ で $M_1 = \max_{0 \leq t \leq 1} \frac{\psi(t)}{\psi_2(t)}$ となるとき

$$J((\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\psi)) = 2\psi\left(\frac{1}{2}\right).$$

(ii) $\psi \leq \psi_2$ かつ $t = \frac{1}{2}$ で $M_2 = \max_{0 \leq t \leq 1} \frac{\psi_2(t)}{\psi(t)}$ となるとき

$$J((\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\psi)) = \frac{1}{\psi\left(\frac{1}{2}\right)}.$$

彼らは,

$$J((\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\psi)) > \max\left\{2\psi\left(\frac{1}{2}\right), \frac{1}{\psi\left(\frac{1}{2}\right)}\right\}$$

を満たす $\psi \in \Psi_2$ が存在するかどうかについても研究を行っている. この不等式が起こるか確かめるために, 彼らは 2 次元ローレンツ空間 $d^{(2)}(\omega, q)$ の James 定数を用いている. ただし, $d^{(2)}(\omega, q)$ とは $0 < \omega < 1 \leq q < \infty$ で,

$$\|(x_1, x_2)\|_{\omega,q} = (x_1^{*q} + \omega x_2^{*q})^{1/q}$$

というノルムを持つ $\mathbb{R}^2$ のことである. ただし, $x_1^* = \max(|x_1|, |x_2|)$, $x_2^* = \min(|x_1|, |x_2|)$ とする. このとき, $d^{(2)}(\omega, q)$ の James 定数は次のようになる.

定理 2.3 (三谷-斎藤 [16]). $1 < q < 2$、 $1/p + 1/q = 1$ とする. $(\sqrt{2}-1)^{2-q} < \omega < 1$ と仮定すると,

$$\left(\frac{1-\omega}{\omega(1+\omega)}\right)^{p-1} < s_0 < \omega^{1/(2-q)}$$

かつ, $(1+s_0)^{q-1}(1-\omega s_0^{q-1}) = \omega(1-s_0)^{q-1}(1+\omega s_0^{q-1})$ を満たすような一意の実数 s_0 がに対して次が成り立つ.

(i) $(\sqrt{2}-1)^{2-q} < \omega < \sqrt{2}^q - 1$ とする．このとき

$$J(d^{(2)}(\omega,q)) = \max\left\{\left(\frac{2(1+s_0)^{q-1}}{1+\omega s_0^{q-1}}\right)^{1/q}, 2\left(\frac{1}{1+\omega}\right)^{1/q}\right\}.$$

(ii) $(\sqrt{2}^q - 1) < \omega < 1$ とする．このとき,

$$J(d^{(2)}(\omega,q)) = \left(\frac{2(1+s_0)^{q-1}}{1+\omega s_0^{q-1}}\right)^{1/q}.$$

この定理を用いて, $q = 1.5$ 及び

$$\omega = \frac{1}{5}(\sqrt{2}-1)^{2-q} + \frac{4}{5}(\sqrt{2}^q - 1).$$

の場合について実際に James 定数を考えると,

$$\begin{aligned} J(d^{(2)}(\omega,q)) &\approx 1.42174, \\ 2\psi_{\omega,q}\left(\frac{1}{2}\right) &\approx 1.40993, \\ \frac{1}{\psi_{\omega,q}\left(\frac{1}{2}\right)} &\approx 1.41851, \end{aligned}$$

となる．したがって symmetric なノルムにおいてさえも,

$$J((\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\psi)) > \max\left\{2\psi\left(\frac{1}{2}\right), \frac{1}{\psi\left(\frac{1}{2}\right)}\right\}$$

を満たす James 定数が存在する．

2010年, 斎藤-三谷-小室 [11] は Ψ_2 の extreme point の集合 extΨ_2 を次のように示した．

定理 2.4 (斎藤-三谷-小室 [11])**.**

$$\mathrm{ext}(\Psi_2) = \left\{\psi_{\alpha,\beta} : 0 \le \alpha \le \frac{1}{2} \le \beta \le 1\right\},$$

ただし

$$\psi_{\alpha,\beta}(t) = \begin{cases} 1-t & (0 \le t \le \alpha), \\ \dfrac{\alpha+\beta-1}{\beta-\alpha}t + \dfrac{\beta-2\alpha\beta}{\beta-\alpha} & (\alpha \le t \le \beta), \\ t & (\beta \le t \le 1), \end{cases}$$

とする．

上記の $\psi_{\alpha,\beta}$ に対応するノルムは

$$\|(x_1,x_2)\|_{\psi_{\alpha,\beta}} = \begin{cases} |x_1| & \left(|x_2| \le \frac{\alpha}{1-\alpha}|x_1|\right), \\ \frac{\beta(1-2\alpha)}{\beta-\alpha}|x_1| + \frac{(2\beta-1)(1-\alpha)}{\beta-\alpha}|x_2| & \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}|x_1| \le |x_2| \le \frac{\beta}{1-\beta}|x_1|\right), \\ |x_2| & \left(\frac{\beta}{1-\beta}|x_1| \le |x_2|\right). \end{cases}$$

となり, $\alpha = 1-\beta$ のとき $\|\cdot\|_{\psi_{\alpha,\beta}}$ は symmetric となるため, 定理 2.1 を用いて次のように James 定数が計算されている.

命題 2.5. $\beta \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ に対して,

$$J((\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{\psi_{1-\beta,\beta}})) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} & \left(\beta \in \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]\right), \\ 2\beta & \left(\beta \in \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right]\right), \end{cases}$$

が成り立つ.

さらに, 2011 年に小室-斎藤-三谷 [12] は $\alpha \neq 1-\beta$ つまり $\|\cdot\|_{\psi_{\alpha,\beta}}$ が symmetric でない場合の James 定数についても計算し, すべての $\mathbb{R}^2$ 上の extreme absolute norm の James 定数を決定した.

定理 2.6 (小室-斎藤-三谷 [12]). $0 \le \alpha \le \frac{1}{2} \le \beta \le 1$ かつ $\alpha < 1-\beta$ とする.

(i) $\psi_{\alpha,\beta}\left(\frac{1}{2}\right) \le \frac{1}{2(1-\alpha)}$ とする. このとき

$$J((\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{\psi_{\alpha,\beta}})) = \frac{1}{\psi_{\alpha,\beta}(\frac{1}{2})}.$$

(ii) $\frac{1}{2(1-\alpha)} \le \psi_{\alpha,\beta}\left(\frac{1}{2}\right) \le c(\alpha,\beta)$ とする. このとき

$$J((\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{\psi_{\alpha,\beta}})) = 1 + \frac{1}{2\psi_{\alpha,\beta}(\frac{1}{2}) + \frac{2\beta-1}{\beta-\alpha}}.$$

(iii) $c(\alpha,\beta) \le \psi_{\alpha,\beta}\left(\frac{1}{2}\right)$ とする. このとき

$$J((\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{\psi_{\alpha,\beta}})) = 2\psi_{\alpha,\beta}\left(\frac{1}{2}\right),$$

ただし

$$c(\alpha,\beta) = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{2\beta-1}{\beta-\alpha} + \sqrt{\left(1+\frac{2\beta-1}{\beta-\alpha}\right)^2 + 4}\right)$$

とする.

一方で, 2001 年に, 加藤-Maligranda-高橋 [10] によって一般に $J(X^*) = J(X)$ は成立しないことが示された. そこで私たちは上記の extreme absolute norm を持つ $\mathbb{R}^2$ の双対空間の James 定数について計算し, どのような条件で

$$J((\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{\psi_{\alpha,\beta}})^*) = J((\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{\psi_{\alpha,\beta}}))$$

を満たすかを研究する.

3 $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{\alpha,\beta})^*$ の James 定数

$(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{\alpha,\beta})^*$ の James 定数を計算するために, 三谷-大城-斎藤 [15] によって導入された dual function を用いる. $\psi \in \Psi_2$, $0 \le t \le 1$ に対して,

$$\psi^*(t) = \sup\left\{ \frac{(1-s)(1-t)+st}{\psi(s)} : 0 \le s \le 1 \right\}$$

と定義する. このとき, $\psi^* \in \Psi_2$ かつ $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\psi)^* = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{\psi^*})$ が成り立つ. 以下では簡潔に表記するため, $\|\cdot\|_{\psi^*_{\alpha,\beta}}$ を $\|\cdot\|^*_{\alpha,\beta}$ と書くこととする.

$\psi_{\alpha,\beta}$ の定義より, $\psi^*_{\alpha,\beta}$ は次のように求められる:

$$\psi^*_{\alpha,\beta}(t) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1-2\alpha}{1-\alpha}t & \left(0 \le t \le \dfrac{1}{1+k_0}\right), \\ \dfrac{1-\beta}{\beta} + \dfrac{2\beta-1}{\beta}t & \left(\dfrac{1}{1+k_0} \le t \le 1\right), \end{cases}$$

ただし $k_0 = \frac{\beta(1-2\alpha)}{(1-\alpha)(2\beta-1)}$. また, $\psi^*_{\alpha,\beta}$ に対応するノルムは,

$$\|(x_1, x_2)\|^*_{\alpha,\beta} = \begin{cases} |x_1| + \dfrac{\alpha}{1-\alpha}|x_2| & (|x_1| \ge k_0|x_2|), \\ \dfrac{1-\beta}{\beta}|x_1| + |x_2| & (|x_1| \le k_0|x_2|), \end{cases}$$

となる. $\alpha = 1-\beta$ のとき, $\|\cdot\|^*_{1-\beta,\beta}$ は symmetric になるから, 定理 2.1 を用いることで比較的容易に James 定数が計算できる. したがって次の結果を得る.

命題 3.1. $\beta \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ に対して,

$$J((\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{1-\beta,\beta})^*) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} & \left(\beta \in \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]\right), \\ 2\beta & \left(\beta \in \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right]\right). \end{cases}$$

が成り立つ.

命題 2.5 と 命題 3.1 を比較すると, 次の結果を得る.

系 3.2. $0 \le \alpha < \frac{1}{2} < \beta \le 1$ かつ $\alpha = 1-\beta$ とする. このとき

$$J((\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{1-\beta,\beta})^*) = J((\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{1-\beta,\beta})).$$

が成り立つ.

また, $\tilde{\psi}(t) = \psi(1-t)$ と置くと,

$$J((\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{\tilde{\psi}})) = J((\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\psi))$$

となることが分かる. したがって $\alpha < 1-\beta$ と仮定してよい.

$$x(\theta) = \frac{(\cos\theta, \sin\theta)}{\|(\cos\theta, \sin\theta)\|^*_{\alpha,\beta}} \quad (0 \le \theta < 2\pi)$$

とする．このとき $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{\alpha,\beta})^*$ の James 定数は次のように表せる:

$$J((\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{\alpha,\beta})^*) = \sup\left\{\min\{\|x(\theta)+x(\theta')\|^*_{\alpha,\beta}, \|x(\theta)-x(\theta')\|^*_{\alpha,\beta}\} : 0 \le \theta \le \theta' < 2\pi\right\}.$$

また, $\tan\theta_0 = \frac{(1-\alpha)(2\beta-1)}{\beta(1-2\alpha)}$ を満たす $\theta_0 \in [0, 2\pi)$ をとる．このとき

$$1 - \frac{(1-\alpha)(2\beta-1)}{\beta(1-2\alpha)} = \frac{2-\beta}{\beta(1-2\alpha)} > 0$$

であるから, $0 \le \theta_0 \le \frac{\pi}{4}$ を得る．James 定数を考えるにあたり, 次の 5 つの場合を調べれば十分である:

(i) $0 \le \theta \le \theta' \le \frac{\pi}{2}$,

(ii) $0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi \le \theta' \le \pi$,

(iii) $\frac{\pi}{4} \le \theta \le \theta' \le \frac{3}{4}\pi$,

(iv) $0 \le \theta \le \theta_0, \frac{\pi}{2} \le \theta' \le \frac{3}{4}\pi$,

(v) $\theta_0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \le \theta' \le \frac{3}{4}\pi$.

次の有用な補題が Alonso [1] により示されている．

補題 3.3 (Alonso [1]). $\theta_1 < \theta_2 < \theta_3 < \theta_4 (\le \theta_1 + \pi)$ とする．このとき

$$\|x(\theta_2) - x(\theta_3)\| \le \|x(\theta_1) - x(\theta_4)\|,$$

$$\|x(\theta_2) + x(\theta_3)\| \ge \|x(\theta_1) + x(\theta_4)\|.$$

が成り立つ．

上記の補題を用いることで, (i), (ii), (iii) の場合においては比較的容易に計算ができる．

命題 3.4.

$$R_1 = \sup\left\{\min\{\|x(\theta)+x(\theta')\|^*_{\alpha,\beta}, \|x(\theta)-x(\theta')\|^*_{\alpha,\beta}\} : 0 \le \theta \le \theta' \le \frac{\pi}{2}\right\}$$

と置く．このとき

$$R_1 = 2\psi^*_{\alpha,\beta}\left(\frac{1}{2}\right).$$

となる．

Proof. $0 \le \theta \le \theta' \le \frac{\pi}{2}$ とする．補題 3.3 より,

$$\begin{aligned}\min\{\|x(\theta)+x(\theta')\|^*_{\alpha,\beta}, \|x(\theta)-x(\theta')\|^*_{\alpha,\beta}\} &\le \|x(\theta)-x(\theta')\|^*_{\alpha,\beta} \\ &\le \|x(0)+x(\pi/2)\|^*_{\alpha,\beta} \\ &= 2\psi^*_{\alpha,\beta}\left(\frac{1}{2}\right),\end{aligned}$$

を得るしたがって $R_1 = 2\psi^*_{\alpha,\beta}\left(\frac{1}{2}\right)$ が成り立つ． □

同様にして, 次の 2 つの命題も成り立つ.

命題 3.5.

$$R_2 = \sup\left\{\min\{\|x(\theta)+x(\theta')\|^*_{\alpha,\beta}, \|x(\theta)-x(\theta')\|^*_{\alpha,\beta}\} : 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi \le \theta' \le \pi\right\}$$

と置く. このとき

$$R_2 = \frac{1}{\psi^*_{\alpha,\beta}\left(\frac{1}{2}\right)}.$$

となる.

命題 3.6.

$$R_3 = \sup\left\{\min\{\|x(\theta)+x(\theta')\|^*_{\alpha,\beta}, \|x(\theta)-x(\theta')\|^*_{\alpha,\beta}\} : \frac{\pi}{4} \le \theta \le \theta' \le \frac{3}{4}\pi\right\}$$

と置く. このとき

$$R_3 = \frac{1}{\psi^*_{\alpha,\beta}\left(\frac{1}{2}\right)}.$$

となる.

したがって, (iv), (v) を考える. 証明には複雑な計算が含まれるため, 結果のみを紹介する.

命題 3.7.

$$R_4 = \sup\left\{\min\{\|x(\theta)+x(\theta')\|^*_{\alpha,\beta}, \|x(\theta)-x(\theta')\|^*_{\alpha,\beta}\} : \theta_0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \le \theta' \le \frac{3}{4}\pi\right\}$$

と置く.

(i) $\frac{1}{2} \le \beta \le \frac{2}{3}$ とする. このとき $R_4 \le 2\psi^*_{\alpha,\beta}\left(\frac{1}{2}\right)$ となる.

(ii) $\frac{2}{3} < \beta \le 1$ とする. このとき

$$B(\alpha,\beta) \le R_4 \le \max\left\{2\psi^*_{\alpha,\beta}\left(\frac{1}{2}\right), B(\alpha,\beta)\right\}$$

となる. ただし

$$B(\alpha,\beta) = \frac{2(-4\alpha^2\beta^2 + 6\alpha^2\beta + 4\alpha\beta^2 - \alpha^2 - 7\alpha\beta + \alpha + \beta)}{(\beta-\alpha)(\beta-\alpha+2(1-\beta)(1-\alpha))}.$$

とする.

命題 3.8.

$$R_5 = \sup\left\{\min\{\|x(\theta)+x(\theta')\|^*_{\alpha,\beta}, \|x(\theta)-x(\theta')\|^*_{\alpha,\beta}\} : 0 \le \theta \le \theta_0, \frac{\pi}{2} \le \theta' \le \frac{3}{4}\pi\right\}.$$

と置く. このとき

$$R_5 \le \max\left\{2\psi^*_{\alpha,\beta}\left(\frac{1}{2}\right), B(\alpha,\beta)\right\}.$$

が成り立つ.

命題 3.4 から 3.8 における結果より, 次の主定理を得る.

定理 3.9. $0 \leq \alpha < \frac{1}{2} < \beta \leq 1$ かつ $\alpha < 1 - \beta$ とする.

(I) $\frac{1}{2} \leq \beta \leq \frac{2}{3}$ とする. このとき $J((\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{\alpha,\beta})^*) = 2\psi^*_{\alpha,\beta}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\beta}$ となる.

(II) $\frac{2}{3} \leq \beta \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ とする. このとき $J((\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{\alpha,\beta})^*)$ は次のようになる:

(i) $F(\alpha, \beta) \geq 0$ のとき

$$J((\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{\alpha,\beta})^*) = 2\psi^*_{\alpha,\beta}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\beta}.$$

となる.

(ii) $F(\alpha, \beta) < 0$ のとき $J((\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{\alpha,\beta})^*) = B(\alpha, \beta)$ となる. ただし

$$\begin{aligned} F(\alpha, \beta) &= 8\alpha^2\beta^3 - 12\alpha^2\beta^2 - 8\alpha\beta^3 + 16\alpha\beta^2 + 3\alpha^2 - 4\alpha\beta - 3\beta^2 - 2\alpha + 2\beta, \\ B(\alpha, \beta) &= \frac{2(-4\alpha^2\beta^2 + 6\alpha^2\beta + 4\alpha\beta^2 - \alpha^2 - 7\alpha\beta + \alpha + \beta)}{(\beta - \alpha)(\beta - \alpha + 2(1 - \beta)(1 - \alpha))} \end{aligned}$$

とする.

(III) $\frac{1}{\sqrt{2}} < \beta \leq 1$ とする. このとき $J((\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{\alpha,\beta})^*) = B(\alpha, \beta)$ となる.

また,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \leq \beta \leq \frac{2}{3} &\Longrightarrow F(\alpha, \beta) \geq 0, \\ \frac{1}{\sqrt{2}} < \beta \leq 1 &\Longrightarrow F(\alpha, \beta) < 0 \end{aligned}$$

が成り立つことから, 定理 3.9 は次のように書きかえられる.

定理 3.10. $0 \leq \alpha < \frac{1}{2} < \beta \leq 1$ かつ $\alpha < 1 - \beta$ とする.

(i) $F(\alpha, \beta) \geq 0$ のとき

$$J((\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{\alpha,\beta})^*) = 2\psi^*_{\alpha,\beta}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\beta}$$

となる.

(ii) $F(\alpha, \beta) < 0$ のとき $J((\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{\alpha,\beta})^*) = B(\alpha, \beta)$ となる. ただし

$$\begin{aligned} F(\alpha, \beta) &= 8\alpha^2\beta^3 - 12\alpha^2\beta^2 - 8\alpha\beta^3 + 16\alpha\beta^2 + 3\alpha^2 - 4\alpha\beta - 3\beta^2 - 2\alpha + 2\beta, \\ B(\alpha, \beta) &= \frac{2(-4\alpha^2\beta^2 + 6\alpha^2\beta + 4\alpha\beta^2 - \alpha^2 - 7\alpha\beta + \alpha + \beta)}{(\beta - \alpha)(\beta - \alpha + 2(1 - \beta)(1 - \alpha))} \end{aligned}$$

とする.

次に, 定理 3.10 を $\psi_{\alpha,\beta}\left(\frac{1}{2}\right)$ を用いて実際に値を求めやすい形式に書き換える. $\beta > \frac{2}{3}$ の場合を考える. 初めに, $F(\alpha,\beta)$ は次のように書き換えられることに注意する:

$$\begin{aligned}
F_1(\alpha,\beta) &= \frac{2\beta-1}{4\beta^2(\beta-\alpha)^2}F(\alpha,\beta) \\
&= \psi_{\alpha,\beta}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2\beta^2} - \frac{1-\alpha-\beta}{\beta-\alpha} - 2\right)\psi_{\alpha,\beta}\left(\frac{1}{2}\right) \\
&\qquad + \left(\frac{1-\alpha-\beta}{2(\beta-\alpha)}\right)^2 + \left(2 - \frac{1}{2\beta^2}\right) + \frac{1}{2\beta} - \frac{1}{4\beta^2}.
\end{aligned}$$

F_1 の判別式は

$$D = \frac{1}{4\beta^4} - \frac{1}{\beta^2} - \frac{2}{\beta} + 4$$

となり, $\beta > \frac{2}{3}$ のとき $D > 0$ となる. したがって,

$$F_1(\alpha,\beta) < 0 \Longleftrightarrow v(\alpha,\beta) < \psi_{\alpha,\beta}\left(\frac{1}{2}\right) < u(\alpha,\beta)$$

が成り立つ. ただし

$$\begin{aligned}
u(\alpha,\beta) &= \frac{-\left(\frac{1}{2\beta^2} - \frac{1-\alpha-\beta}{\beta-\alpha} - 2\right) + \sqrt{\frac{1}{4\beta^4} - \frac{1}{\beta^2} - \frac{2}{\beta} + 4}}{2}, \\
v(\alpha,\beta) &= \frac{-\left(\frac{1}{2\beta^2} - \frac{1-\alpha-\beta}{\beta-\alpha} - 2\right) - \sqrt{\frac{1}{4\beta^4} - \frac{1}{\beta^2} - \frac{2}{\beta} + 4}}{2}
\end{aligned}$$

とする. また, 次の補題が成り立つ.

補題 3.11. $0 \le \alpha < \frac{1}{2} < \beta \le 1$ かつ $\beta > \frac{2}{3}$ のとき $v(\alpha,\beta) < \psi_{\alpha,\beta}\left(\frac{1}{2}\right)$ が常に成り立つ.

したがって, 定理 3.10 は次のように書き換えられる.

定理 3.12. $0 \le \alpha < \frac{1}{2} < \beta \le 1$, $\alpha < 1-\beta$ かつ $\frac{2}{3} < \beta \le 1$ とする.

(i) $\psi_{\alpha,\beta}\left(\frac{1}{2}\right) \ge u(\alpha,\beta)$ のとき

$$J((\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{\alpha,\beta})^*) = 2\psi^*_{\alpha,\beta}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\beta}$$

となる.

(ii) $\psi_{\alpha,\beta}\left(\frac{1}{2}\right) < u(\alpha,\beta)$ のとき

$$\begin{aligned}
&J((\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{\alpha,\beta})^*) \\
&= \frac{\left(2\psi_{\alpha,\beta}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{2\beta-1}{\beta-\alpha} - 1\right)\left(\beta\left(2\psi_{\alpha,\beta}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{2\beta-1}{\beta-\alpha}\right) - 5\beta + 1\right)}{(\beta-1)\left(2\psi_{\alpha,\beta}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{2\beta-1}{\beta-\alpha}\right) - 3\beta + 2}
\end{aligned}$$

となる. ただし, $u(\alpha,\beta) = \frac{1}{4\beta^2}\left(\frac{2\beta^2(1-\alpha-\beta)}{\beta-\alpha} + 4\beta^2 - 1 + \sqrt{16\beta^4 - 8\beta^3 - 4\beta^2 + 1}\right)$ とする.

また, 主定理を用いて元の空間の James 定数を比較することで, 次を得る.

定理 3.13. $0 \le \alpha \le \frac{1}{2} \le \beta \le 1$ かつ $\alpha \le 1-\beta$ とする. $J((\mathbb{R}, \|\cdot\|_{\alpha,\beta})^*) = J((\mathbb{R}, \|\cdot\|_{\alpha,\beta}))$ が成り立つことと, 次の (i), (ii), (iii) いずれかが成り立つことが同値である.

(i) 任意の $\alpha \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ に対して, $\beta = 1-\alpha$.

(ii) 任意の $\alpha \in \left[0, 1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ に対して, $\beta = \frac{2-\alpha}{3-2\alpha}$.

(iii) 任意の $\alpha \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ に対して, $\beta = \frac{1}{2}$.

参考文献

[1] J. Alonso and P. Martín, *Moving triangles over a sphere*, Math. Nachr., **279** (2006), 1735–1738.

[2] J. Gao, *On some geometric parameters in Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl., **334** (2007), 114–122.

[3] J. Gao and K. S. Lau, *On the geometry of spheres in normed linear spaces*, J. Aust. Math. Soc. A, **48** (1990), 101–112.

[4] J. Gao and K. S. Lau, *On two classes of Banach spaces with uniform normal structure*, Studia Math., **99** (1991), 41–56.

[5] J. Gao and S. Saejung, *Normal structure and the generalized James and Zbăganu constants*, Nonlinear Anal., **71** (2009), 3047–3052.

[6] J. Gao and S. Saejung, *Some geometric measures of spheres in Banach spaces*, Appl. Math. Comput., **214** (2009), 102–107.

[7] J. García-Falset, E. Liorents-Fuster and E. M. Mazcuñan-Navarro, *Uniformly non-square Banach spaces have the fixed point property for nonexpansive mappings*, J. Funct. Anal., **233** (2006), no. 2, 494–514.

[8] R. Grząślewicz, *Extreme symmetric norms on* $\mathbb{R}^2$, Colloq. Math., **56** (1988), 147–151.

[9] R. C. James, *Uniformly non-square Banach spaces*, Ann. of Math., **80** (1964), 542–550.

[10] M. Kato, L. Maligranda and Y. Takahashi, *On James and Jordan-von Neumann constants and the normal structure coefficient of Banach spaces*, Studia Math., **144** (2001), 275–295.

[11] N. Komuro, K.-S. Saito and K.-I. Mitani, *Extremal structure of the set of absolute norms on* $\mathbb{R}^2$ *and the von Neumann-Jordan constant*, J. Math. Anal. Appl., **370** (2010), 101–106.

[12] N. Komuro, K.-S. Saito and K.-I. Mitani, *Extremal structure of absolute normalized norms on $\mathbb{R}^2$ and the James constant*, Appl. Math. Comput., **217** (2011), 10035–10048.

[13] N. Komuro, K.-S. Saito and K.-I. Mitani, *On the James constant of extreme absolute norms on $\mathbb{R}^2$ and their dual norms*, Proceeding of the 7th International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis. I., 255–268, Yokohama Publ., Yokohama, 2013.

[14] K.-I. Mitani and K.-S. Saito, *The James constant of absolute norms on $\mathbb{R}^2$*, J. Nonlinear Convex Anal., **4** (2003), 399–410.

[15] K. Mitani, S. Oshiro and K.-S. Saito, *Smoothness of ψ-direct sums of Banach spaces*, Math. Inequal. Appl., **8** (2005), 147–157.

[16] K.-I. Mitani, K.-S. Saito and T. Suzuki, *On the calculation of the James constant of Lorentz sequence spaces*, J. Math. Anal. Appl., **343** (2008), 310–314.

[17] S. Saejung, *On James and von Neumann-Jordan constants and sufficient conditions for the fixed point property*, J. Math. Anal. Appl., **323** (2006), 1018–1024.

[18] M. Sato, N. Komuro, K.-I. Mitani, K.-S. Saito and R. Tanaka, *Dual of extremal absolute norms on $\mathbb{R}^2$ and James constant*, preprint.

[19] K.-S. Saito, M. Kato and Y. Takahashi, *von Neumann-Jordan constant of absolute normalized norms on $\mathbb{C}^2$*, J. Math. Anal. Appl., **244** (2000), 515–532.

[20] K.-S. Saito, M. Kato and Y. Takahashi, *Absolute norms on $\mathbb{C}^n$*, J. Math. Anal. Appl., **252** (2000), 879–905.