数理解析研究所講究録
第 1936 巻 2015 年 5-10



# トーラス上のリーマン面の退化族

早稲田大学教育学部数学科　小森洋平

## 1. リーマン面の退化族

リーマン面の退化族とは2次元複素多様体 $M$ からリーマン面（1次元複素多様体）への固有で全射な正則写像 $\pi: M \to R$ で、$R$ のほとんどすべての点 $z$ のファイバー（一般ファイバー） $\pi^{-1}(z)$ が双曲型リーマン面になっているものである。以下では $\pi$ は局所非自明、つまり $R$ の任意の点 $p$ の円板近傍 $U$ において $\pi^{-1}(U)$ が直積 $\pi^{-1}(p) \times U$ と双正則でないと仮定する。$R$ から $M$ への正則写像 $s: R \to M$ が $\pi$ の正則切断であるとは、$\pi \circ s = id_R$ を満たすものとする。$\pi$ の正則切断全体を $S$ とすると、$S$ は有限集合になることが知られている（関数体上の Mordell の定理 [1, 3]）。以下では $R$ がトーラスで一般ファイバーが $n$ 次巡回群の自己同型を持つ種数 $n$ のリーマン面になるような退化族を具体的に構成し ([2])、その特異ファイバーや正則切断を決定する。

## 2. シグマ函数

$\Omega$ を $\mathbf{C}$ の格子部分群とする。$\Omega$ は $\mathbf{C}$ に平行移動で作用する。次の無限積で定義される関数を Weierstraß のシグマ函数という。

$$\sigma(z) := z \prod_{\omega \in \Omega - \{0\}} (1 - \frac{z}{\omega}) \exp(\frac{z}{\omega} + \frac{z^2}{2\omega^2})$$

Weierstraß のペー函数

$$\mathcal{P}(z) := \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Omega - \{0\}} (\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2})$$

の原始関数である Weierstraß のゼータ函数

$$\zeta(z) := -\int \mathcal{P}(z)\, dz = \frac{1}{z} + \sum_{\omega \in \Omega - \{0\}} (\frac{1}{z-\omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{z}{z^2})$$

との間に、シグマ函数は次のような対数微分の関係がある。

$$\frac{d}{dz} \log \sigma(z) = \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)} = \zeta(z)$$

シグマ函数の基本的な性質を以下にまとめておく。

**Proposition 1.** *(1)* $\sigma(z)$ は整関数かつ奇関数である。
*(2)* $\sigma(z)$ は格子 $\Omega$ 上にのみ1位の零点を持つ。

*(3)* 格子 $\Omega$ の自由 $\mathbf{Z}$ 加群としての生成元 $\omega_1, \omega_2$ を $Im(\omega_2/\omega_1) > 0$ を満たすように取る。$\eta_1 := \frac{1}{2}\zeta(\omega_1)$, $\eta_2 := \frac{1}{2}\zeta(\omega_2)$ とする。$\Omega$ の元 $\omega = p\omega_1 + q\omega_2$ $(p, q \in \mathbf{Z})$ に対し、$\eta := p\eta_1 + q\eta_2$ とするとき、関数 $f : \mathbf{C} \times \Omega \to \mathbf{C}$ を

$$f(z, \omega) := (-1)^{pq+p+q} \exp(\eta(z + \frac{\omega}{2}))$$

と定義すると、$f$ は零点を取らない整関数で $\sigma(z)$ は $\omega \in \Omega$ による平行移動の作用に関して次のような保型性を持つ。

$$\sigma(z + \omega) = f(z, \omega)\sigma(z)$$

*(4)* 次の関係式が成り立つ。

$$\frac{\sigma(u)\sigma(u - 2z)}{(\sigma(z)\sigma(u - z))^2} = \mathcal{P}(z) - \mathcal{P}(u - z)$$

このようにシグマ函数は格子 $\Omega$ に関する2重周期関数、すなわち楕円関数ではないが、$\Omega$ の $\mathbf{C}$ への平行移動の作用による商空間であるトーラス $R := \mathbf{C}/\Omega$ 上の正則直線束の正則切断として解釈できる。以下このことを説明する。

$\omega \in \Omega$ に対し $\mathbf{C}^2$ の自己同型写像を

$$(z, \zeta) \mapsto (z + \omega, f(u, \omega)\zeta)$$

と定義する。このとき Legendre の関係式 $\eta_1\omega_2 - \eta_2\omega_1 = 2\pi i$ により $\Omega$ は $\mathbf{C}^2$ に作用している。この作用が誘導する商写像 $\mathbf{C}^2/\Omega \to R$ はトーラス $R$ 上の正則直線束を定める。この正則直線束を $L$ とすると、次で定義される写像 $\sigma : R \to L$

$$\sigma(\bar{z}) := \overline{(z, \sigma(z))}$$

は $L$ の正則切断である。

## 3. 退化族の構成

一般ファイバーがトーラスの2点分岐 $n$ 重被覆で得られるリーマン面になるような退化族を構成する。そのためにまずトーラス $R$ のコピー $T$ を用意してそれらの直積 $R \times T$ を考える。そして $R$ から $T$ へ2つの写像を用意し、それらのグラフで $R \times T$ の $n$ 重分岐被覆を取ればよい。そこでまず $R \times T$ 上の正則直線束 $\pi_1 : L_1 \to R \times T$ とその正則切断 $\sigma_1 : R \times T \to L_1$ で、零切断 $\underline{0} \subset L_1$ の $\sigma_1$ による逆像が $R \times T$ の $R$ 方向の射影に関するファイバーと（一般に）2点で交わるものを構成する。そして $L_1 = L_2^{\otimes n}$ となる正則直線束 $\pi_2 : L_2 \to R \times T$ を構成し、$\sigma_1(R \times T) \subset L_1$ を $L_2$ に引き戻すと、零切断 $\underline{0}$ でのみ分岐する $\sigma_1(R \times T) \subset L_1$ の $n$ 巡回分岐被覆が得られ、$R$ 方向の射影を考えると求める写像 $\pi : M \to R$ が得られる。ただし $M$ は特異点を持つ解析曲面なので、特異点を解消して退化族 $\hat{\pi} : \hat{M} \to R$ が得られる。以下このアイデアを具体的に実行する。

まず第1の正則直線束 $L_1$ を定義する。

**Proposition 2.** *(1)* $(\omega_z, \omega_u) \in \Omega^2$ に対し $\mathbf{C}^3$ の自己同型写像を

$$(z, u, \zeta) \mapsto (z + \omega_z, u + \omega_u, f(u, \omega_u)^{n-1} f(u - nz, \omega_u - n\omega_z)\zeta)$$

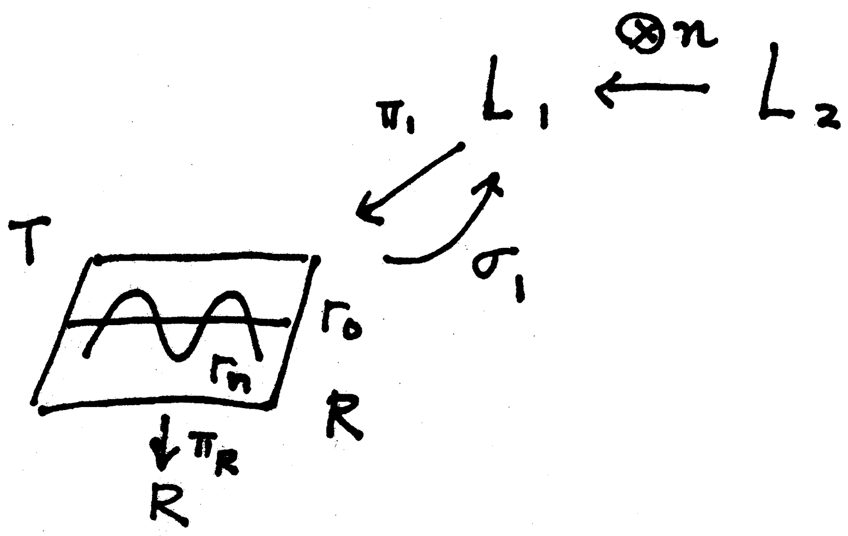
と定義すると、$\Omega^2$ の $\mathbf{C}^3$ への作用になっている。

*(2)* この作用が誘導する商写像 $\mathbf{C}^3/\Omega^2 \to R\times T = \mathbf{C}^2/\Omega^2$ は $R\times T$ 上の正則直線束を定める。

*(3)* この正則直線束を $\pi_1 : L_1 \to R\times T$ とすると、次で定義される写像 $\sigma_1 : R\times T \to L_1$

$$\sigma_1(\overline{(z,u)}) := \overline{(z,u,\sigma(u)^{n-1}\sigma(u-nz))}$$

は $L_1$ の正則切断である。




次に第2の正則直線束 $L_2$ を定義する。

**Proposition 3.** *(1)* $(\omega_z,\omega_u)\in\Omega^2$ に対し $\mathbf{C}^3$ の自己同型写像を

$$(z,u,\zeta)\mapsto(z+\omega_z,u+\omega_u,f(z,\omega_z)^{n-1}f(u-z,\omega_u-\omega_z)\zeta)$$

と定義すると、$\Omega^2$ の $\mathbf{C}^3$ への作用になっている。

*(2)* この作用が誘導する写像 $\mathbf{C}^3/\Omega^2 \to R\times T = \mathbf{C}^2/\Omega^2$ は $R\times T$ 上の正則直線束を定める。

*(3)* この正則直線束を $L_2$ とすると、次で定義される写像 $\rho_1 : L_2 \to L_1$

$$\rho_1(\overline{(z,u,\zeta)}) = \overline{(z,u,\zeta^n)}$$

は *well-defined.*

**Remark 1.** つまりシグマ函数の満たす関係式

$$\frac{\sigma(u)\sigma(u-2z)}{(\sigma(z)\sigma(u-z))^2} = \mathcal{P}(z)-\mathcal{P}(u-z)$$

が種数2の場合の退化族の構成に利用されていて、種数 $n$ の場合は

$$\frac{\sigma(u)^{n-1}\sigma(u-nz)}{(\sigma(z)^{n-1}\sigma(u-z))^n}$$

が楕円関数でかけて、その関係式が種数 $n$ の場合の退化族の構成に利用されている。

そこで $M := \rho_1^{-1}(\sigma_1(R\times T))$ とすると $\pi_1\circ\rho_1 : M \to R\times T$ は因子 $\sigma_1^{-1}(\underline{0})$ で分岐する $n$ 重巡回分岐被覆になっている。

よって $\pi := \pi_R\circ\pi_1\circ\rho_1 : M \to R$ とすると、$R$ の点 $\overline{z}$ が $n$ 等分点でなければ、ファイバー $\pi^{-1}(\overline{z})$ は $T$ の2点 $\overline{0}$ と $\overline{nz}$ でのみ $n$ 重に分岐する種数 $n$ のリーマン面になる。しかし $M$ 自身は特異点を持つ解析曲面なので特異点を解消する必要がある。

$R$ から $T$ への写像 $\overline{u}=\overline{0}, \overline{u}=\overline{nz}$ の $R\times T$ 内のグラフを それぞれ $\Gamma_0, \Gamma_n$ とすると、因子 $\sigma_1^{-1}(\underline{0})$ は $\sigma_1^{-1}(\underline{0}) = (n-1)\Gamma_0 + \Gamma_n$ と表せる。よって $M$ は $\Gamma_0$ 上で局所的に $x^{n-1}y = z^n$ と表され、$x = z = 0$ で特異点を持つ。よって $x = z = 0$ に沿ってブローアップ $\rho_2 : \hat{M} \to M$ すると特異点が解消される。以上から得られる $\hat{\pi} := \pi\circ\rho_2 : \hat{M} \to R$ がリーマン面の退化族になる。その際 $n$ 等分点 $\frac{\overline{\omega}}{n}$ のファイバー $\hat{\pi}^{-1}(\frac{\overline{\omega}}{n})$ にはブローアップの際に現れた例外因子の一部である例外曲線が現れることに注意する。

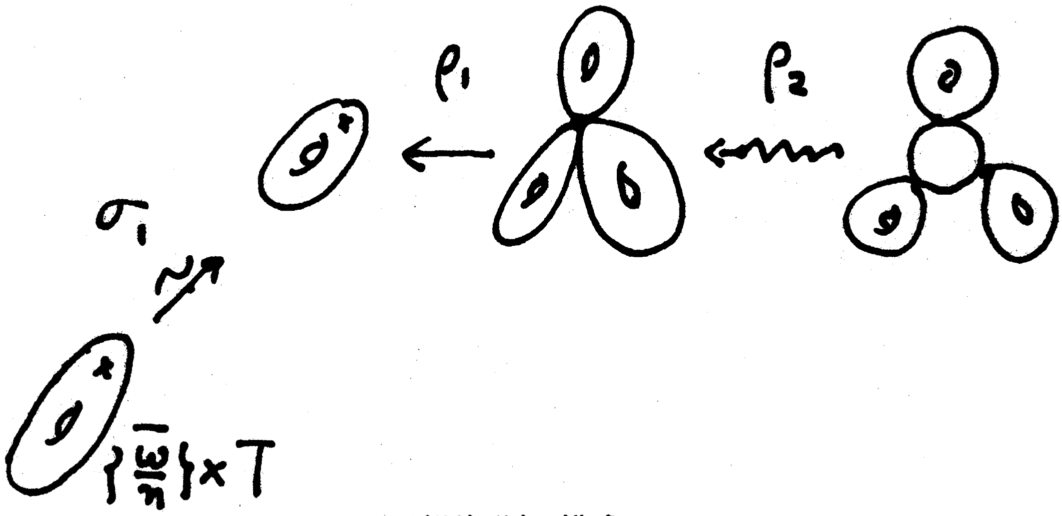
$$
\begin{tikzcd}
 & L_1 & L_2 & \\
 & \cup & \cup & \\
 & \sigma_1(R\times T) & M \arrow[l, "\rho_1"'] & \hat{M} \arrow[l, squiggly, "\rho_2"'] \\
R\times T \arrow[ur, "\sigma_1", "\sim"'] \arrow[d, "\pi_R"'] & & & \\
R & & &
\end{tikzcd}
$$

**Theorem 1.** 退化族 $\hat{\pi} : \hat{M} \to R$ の特異ファイバーは $n$ 等分点 $\frac{\overline{\omega}}{n}$ のファイバー $\hat{\pi}^{-1}(\frac{\overline{\omega}}{n})$ で、種数 0 のリーマン面と $n$ 個の種数 1 のリーマン面からなる。

*Proof.* まず $\pi : M \to R$ による $n$ 等分点 $\frac{\overline{\omega}}{n}$ のファイバー $\pi^{-1}(\frac{\overline{\omega}}{n})$ を計算すると

$$
\begin{aligned}
\pi^{-1}(\overline{\frac{\omega}{n}}) &= \rho_1^{-1}\circ\sigma_1(\overline{(\frac{\omega}{n}, u)}) \\
&= \rho_1^{-1}\circ\overline{(\frac{\omega}{n}, u, \sigma(u)^{n-1}\sigma(u - n\cdot\frac{\omega}{n}))} \\
&= \rho_1^{-1}\circ\overline{(\frac{\omega}{n}, u, \sigma(u)^{n-1}\sigma(u-\omega))} \\
&= \rho_1^{-1}\circ\overline{(\frac{\omega}{n}, u, f(u, -\omega)\sigma(u)^{n})}
\end{aligned}
$$

よって $T$ からの $n$ 個の写像 $\sqrt[n]{f(u,-\omega)}\sigma(u)$ の像として、$\pi^{-1}(\frac{\omega}{n})$ は $n$ 個のトーラスが1点 $\rho_1^{-1}\circ\overline{(\frac{\omega}{n},0,0)}$ で交わっていることが分かる。この点は $M$ の特異点でもあるのでブローアップにより例外曲線に取り替わる。□




## 4. 正則切断の構成

退化族 $\hat{\pi}:\hat{M}\to R$ に対しその正則切断の全体を $\mathcal{S}$ とする。

$$\mathcal{S}:=\{s:R\to\hat{M}\mid s\text{ は正則で }\hat{\pi}\circ s=id_R\}$$

$M$ は $R\times T$ の $n$ 次巡回分岐被覆なので、各ファイバーに $n$ 次巡回群として作用する自己同型 $J:M\to M$ が存在し、自己同型 $\hat{J}:\hat{M}\to\hat{M}$ を誘導する。また $s\in\mathcal{S}$ に対し、$\hat{J}s:=\hat{J}\circ s\in\mathcal{S}$ となる。このときファイバーの分岐点を対応させる写像

$$s_0(z):=\overline{(z,0,0)},\quad s_n(z):=\overline{(z,nz,0)}$$

は $\mathcal{S}$ の元であり、自明な正則切断と呼ぶ。これは $\hat{J}$ の $\mathcal{S}$ への作用の固定点でもある。

$R$ から $T$ への正則写像の全体を $Hol(R,T)$ とすると $\mathcal{S}$ から $Hol(R,T)$ への次のような写像を考える。

$$\Phi:\mathcal{S}\to Hol(R,T),\quad s\mapsto\pi_T\circ s$$

**Proposition 4.** *(1)* 自明でない正則切断 $s,s'\in\mathcal{S}-\{s_0,s_n\}$ に対し、$\Phi(s)=\Phi(s')$ となるための必要十分条件は、ある $k\in\mathbf{N}$ が存在して $s'=\hat{J}^k s$ となることである。

*(2)* 自明でない正則切断 $s\in\mathcal{S}-\{s_0,s_n\}$ に対し、$\Phi(s):R\to T$ は不分岐被覆写像である。

以下 $\Phi(\mathcal{S})$ を決定することを目標とする。その候補として次のような $Hol(R,T)$ の部分集合 $\mathcal{H}$ を考える。

$$\mathcal{H}:=\{g\in Hol(R,T)\mid g\text{ は不分岐被覆写像で }\Gamma_g\cap(\Gamma_0\cup\Gamma_n)\subset\Gamma_0\cap\Gamma_n\}$$

ここで $\Gamma_g$ は写像 $g:R\to T$ の $R\times T$ 内でのグラフとする。このとき

**Proposition 5.** $\Phi(S) \subset \mathcal{H}$.

さらに

**Proposition 6.** アファイン写像 $Az+B$ が $\mathcal{H}$ の元を誘導するための必要十分条件は以下の通り。

$$A\Omega \subset \Omega, \quad n\Omega \subset A\Omega, \quad n\Omega \subset (A-n)\Omega$$

**Corollary 1.** 格子 $\Omega$ が虚数乗法を持たない、つまり $A\Omega \subset \Omega$ を満たす複素数 $A$ は整数のみと仮定する。このとき $\mathcal{H}$ の元を誘導するアファイン写像 $Az+B$ は、$n$ が奇数ならば存在せず、偶数ならば

$$\frac{n}{2}(z+\frac{\omega}{n})$$

となる。

**Theorem 2.** $\Phi(S) = \mathcal{H}$. つまり $n$ が偶数のとき、アファイン写像 $\frac{n}{2}(z+\frac{\omega}{n})$ が誘導する不分岐被覆写像 $g: R \to T$ はある正則切断による $\Phi$ の像である。

*Proof.*

$$\begin{aligned} s(z) = \sigma_1(z, \frac{n}{2}(z+\frac{\omega}{n})) &= (z, \frac{n}{2}(z+\frac{\omega}{n}), \sigma(\frac{n}{2}(z+\frac{\omega}{n}))^{n-1}\sigma(\frac{n}{2}(z+\frac{\omega}{n})-nz)) \\ &= (z, \frac{n}{2}(z+\frac{\omega}{n}), \sigma(\frac{n}{2}(z+\frac{\omega}{n}))^{n-1}\sigma(-\frac{n}{2}(z+\frac{\omega}{n})+\omega)) \\ &= (z, \frac{n}{2}(z+\frac{\omega}{n}), -f(\frac{n}{2}(z+\frac{\omega}{n}), -\omega)\sigma(\frac{n}{2}(z+\frac{\omega}{n}))^n) \\ &= (z, \frac{n}{2}(z+\frac{\omega}{n}), (\sqrt[n]{-f(\frac{n}{2}(z+\frac{\omega}{n}), -\omega)}\sigma(\frac{n}{2}(z+\frac{\omega}{n})))^n) \end{aligned}$$

□

**Corollary 2.** 格子 $\Omega$ が虚数乗法を持たないとする。このとき正則切断の個数は、$n$ が奇数ならば自明な正則切断のみの２個で、偶数ならば $2+4n$ 個である。

## References

[1] H. Grauert, Mordells Vermutung über rationale Punkte auf algebraischen Kurven und Funktionenkörper, Publications Mathématiques de l'IHES, Bd.25, 1965, 131-149.

[2] Y. Imayoshi, Y. Komori and T. Nogi, Holomorphic sections of a holomorphic family of Riemann surfaces induced by a certain Kodaira surface. Kodai Math. J. 32 (2009), no. 3, 450-470.

[3] Y. Manin, Rational points on algebraic curves over function fields, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., 27:6 (1963), 1395-1440.

Department of Mathematics, School of Education, Waseda University, Nishi-Waseda 1-6-1, Shinjuku, Tokyo 169-8050, Japan

*E-mail address*: ykomori@waseda.jp