数理解析研究所講究録
第 1954 巻 2015 年 134-150

Asymptotic comparison in maximum likelihood estimation of a natural parameter up to the second order for a truncated exponential family of distributions

筑波大学　赤平昌文 (Masafumi Akahira)
(University of Tsukuba)

1　はじめに

下側切断分布の典型としてパレート分布が知られているが，これはファイナンス，物理学，水文学，地質学，天文学等の様々な分野において広く用いられている重要な分布で，母数推定に関しても多くの文献がある (Johnson et al. [JKB94], Arnold [Ar15]). 従来，パレート分布を含む，切断母数 γ と自然母数 θ をもつ下側切断指数型分布族 $\mathcal{P}_1$ において，γ を局外母数として大きさ n の無作為標本に基づく θ の推定問題が論じられた．実際，γ が既知のときの θ の最尤推定量 (maximum likelihood estimator, 略して MLE) $\hat{\theta}^{\gamma}_{ML}$，$\gamma$ が未知のときの θ の MLE $\hat{\theta}_{ML}$ と最大条件付き尤度推定量 (maximum conditional likelihood estimator, 略して MCLE) $\hat{\theta}_{MCL}$ が同じ漸近正規分布を持つことが知られている (Bar-Lev [BL84]). なお，確率展開 (stochastic expansion) を用いて同様の結果も得られている (Akahira and Ohyauchi [AO12]). また，最近，指数母数 α と局外母数として 2 つの切断母数 γ, ν をもつ上側切断パレート分布の α の推定問題において，γ と ν が既知のときの α の MLE $\tilde{\alpha}$ と，γ と ν が未知のときの α の MLE $\hat{\alpha}$ が漸近正規性をもち漸近平均は同じであるが，漸近分散は異なると主張されている (Aban et al. [AMP06]). このような上側切断パレート分布は，2 つの切断母数 γ, ν と自然母数 θ をもつ切断指数型分布族 $\mathcal{P}_2$ に属すると考えられる．

本稿では切断指数型分布族 $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ において切断母数が既知または未知のときに自然母数の推定問題を考える．まず，$\mathcal{P}_1$ の場合に $\hat{\theta}_{ML}$ を $\hat{\theta}^{\gamma}_{ML}$ と 2 次のオーダー，すなわち $o(1/n)$ まで漸近的に同じ偏りを持つ (ように) 補正 (した)MLE を $\hat{\gamma}^{*}_{ML}$ として，$\hat{\theta}^{\gamma}_{ML}$, $\hat{\theta}_{ML}$, $\hat{\theta}^{*}_{ML}$, $\hat{\theta}_{MCL}$ の確率展開が与えられ，それらを用いて漸近平均，漸近分散も求められる．そして $\mathcal{P}_1$ において，$\hat{\theta}^{*}_{ML}$ と $\hat{\theta}_{MCL}$ はそれらの漸近分散が 2 次のオーダーまで漸近的に等しいという意味で同等になることが示され，$\hat{\theta}^{*}_{ML}$ と $\hat{\theta}_{MCL}$ の $\hat{\theta}^{\gamma}_{ML}$ に対する 2 次の漸近損失が求められる ([A13]). すなわち，$\hat{\theta}^{\gamma}_{ML}$, $\hat{\theta}_{ML}$, $\hat{\theta}^{*}_{ML}$, $\hat{\theta}_{MCL}$ はいずれも 1 次のオーダーでは漸近的に同等であるが，2 次のオーダーでは $\hat{\theta}^{*}_{ML}$, $\hat{\theta}_{MCL}$ と $\hat{\theta}^{\gamma}_{ML}$ の間には差異が生じる．次に，$\mathcal{P}_2$ において γ と ν が既知のときの θ の MLE を $\hat{\theta}^{\gamma,\nu}_{ML}$ とし，γ と ν が未知のときの θ の MLE, MCLE をそれぞれ $\hat{\theta}_{ML}$, $\hat{\theta}_{MCL}$ とするとき，$\hat{\theta}_{ML}$ を $\hat{\theta}^{\gamma,\nu}_{ML}$ と 2 次のオーダーまで漸近的に同じ偏りを持つ (ように) 補正 (した)MLE を $\hat{\theta}^{*}_{ML}$ とする．このとき確率展開を用いて $\mathcal{P}_1$ の場合と同様な結論を得る ([AHKO14]).

2 下側切断指数型分布族 $\mathcal{P}_1$

いま，$X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ をたがいに独立に，いずれも (Lebesgue 測度に関する) 密度

$$f(x;\theta,\gamma) = \begin{cases} a(x)e^{\theta u(x)}/b(\theta,\gamma) & (c < \gamma \le x < d), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases} \tag{2.1}$$

をもつ下側切断指数型分布族 $\mathcal{P}_1$ の分布に従う確率変数列とする．ただし，$a(\cdot)$ は正値で，ほとんど至るところ連続で，$u(\cdot)$ は区間 (γ, d) 上で絶対連続で $du(x)/dx \neq 0$ とする．また $\gamma \in (c,d)$ について

$$\Theta(\gamma) := \left\{ \theta \,\middle|\, 0 < b(\theta,\gamma) := \int_\gamma^d a(x)e^{\theta u(x)}dx < \infty \right\}$$

とし，任意の $\gamma \in (c,d)$ について $\Theta \equiv \Theta(\gamma)$ は空でない開区間であると仮定する．Bar-Lev [BL84] は上記の分布族 $\mathcal{P}_1$ において，切断母数 γ を未知の局外母数として自然母数 θ の MLE $\hat{\theta}_{ML}$ と MCLE $\hat{\theta}_{MCL}$ の漸近挙動を調べ，γ が既知のときの θ の MLE $\hat{\theta}^\gamma_{ML}$ と漸近的に比較した．その結果，$\hat{\theta}_{ML}$, $\hat{\theta}_{MCL}$, $\hat{\theta}^\gamma_{ML}$ はいずれも漸近的に同じ正規分布に従うことを示した．このことから，これらの推定量の漸近正規性の性質は局外母数 γ が未知であるか否かの影響を受けないことが分かる．確かにこれらの推定量は 1 次のオーダーでは漸近的に同等であるが，2 次のオーダーではその影響が出てきて漸近的に差異が生ずるのではないかという予想が立てられる．そこで本稿では，当面 Akahira [A13] に従ってその予想の解決を追っていく．

ここで，$\boldsymbol{X} := (X_1, \ldots, X_n)$ とし，その順序統計量を $X_{(1)} \le \cdots \le X_{(n)}$ とする．また，$\mathcal{P}_1$ において $\log b(\theta,\gamma)$ は θ の狭義凸関数で，θ について無限回偏微分可能であり，各 $k = 1, 2, \ldots$ について

$$\lambda_k(\theta,\gamma) := \frac{\partial^k}{\partial\theta^k}\log b(\theta,\gamma) \tag{2.2}$$

は $u(X_1)$ の k 次のキュムラントになる．

3 $\mathcal{P}_1$ において γ が既知のときの θ の MLE $\hat{\theta}^\gamma_{ML}$ の漸近挙動

いま，$\gamma \le x_{(1)} := \min_{1\le i\le n} x_i$, $x_{(n)} := \max_{1\le i\le n} x_i < d$ となる $\boldsymbol{x} := (x_1, \ldots, x_n)$ が与えられたとき，θ の尤度関数は

$$L^\gamma(\theta;\boldsymbol{x}) := \frac{1}{b^n(\theta,\gamma)}\left\{\prod_{i=1}^n a(x_i)\right\}\exp\left\{\theta\sum_{i=1}^n u(x_i)\right\}$$

になる．このとき，θ の尤度方程式

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n u(x_i) - \lambda_1(\theta,\gamma) = 0. \tag{3.1}$$

の解は一意的で，それを $\hat{\theta}_{ML}(\boldsymbol{x})$ とすれば，$\hat{\theta}_{ML} = \hat{\theta}_{ML}(\boldsymbol{X})$ が θ の MLE になる (Barndorff-Nielsen [BN78], Bar-Lev [BL84])．ここで，$\lambda_i = \lambda_i(\theta, \gamma)$ $(i = 2, 3, 4)$ とし

$$Z_1 := \frac{1}{\sqrt{\lambda_2 n}} \sum_{i=1}^{n} \{u(X_i) - \lambda_1\}, \quad U_\gamma := \sqrt{\lambda_2 n}(\hat{\theta}_{ML}^{\gamma} - \theta)$$

とおく．このとき，次のことを得る ([A13])．

定理 3.1 下側切断指数型分布族 $\mathcal{P}_1$ において，γ が既知のときの θ の MLE $\hat{\theta}_{ML}^{\gamma}$ について U_γ の確率展開は

$$U_\gamma = Z_1 - \frac{\lambda_3}{2\lambda_2^{3/2}\sqrt{n}} Z_1^2 + \frac{1}{2n}\left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^3} - \frac{\lambda_4}{3\lambda_2^2}\right) Z_1^3 + O_p\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \tag{3.2}$$

である．また，U_γ の 2 次の漸近平均，漸近分散は，それぞれ

$$E_\theta(U_\gamma) = -\frac{\lambda_3}{2\lambda_2^{3/2}\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right), \tag{3.3}$$

$$V_\theta(U_\gamma) = 1 + \frac{1}{n}\left(\frac{5\lambda_3^2}{2\lambda_2^3} - \frac{\lambda_4}{\lambda_2^2}\right) + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \tag{3.4}$$

である．

証明については $\hat{\theta}_{ML}^{\gamma}$ は尤度方程式 (3.1) の解であるから，Taylor 展開を用いて (3.2) を導出し，(2.2) の λ_k が $u(X_1)$ の k 次のキュムラントであるから (3.2) より (3.3), (3.4) を得る ([A13])．ここで，(3.2) より $U_\gamma = Z_1 + O_p(1/\sqrt{n})$ であるから Z_1 の定義より中心極限定理から U_γ が漸近的に標準正規分布に従うことが分かり，これは [BL84] の結果に一致する．

4 $\mathcal{P}_1$ において γ が未知のときの θ の MLE $\hat{\theta}_{ML}$ の漸近挙動

まず，$\gamma \leq x_{(1)}$, $x_{(n)} < d$ となる $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ が与えられたとき，(θ, γ) の尤度関数は

$$L(\theta, \gamma; \boldsymbol{x}) = \frac{1}{b^n(\theta, \gamma)} \left\{\prod_{i=1}^{n} a(x_i)\right\} \exp\left\{\theta \sum_{i=1}^{n} u(x_i)\right\} \tag{4.1}$$

になる．ここで，θ と γ のそれぞれの MLE を $\hat{\theta}_{ML}$, $\hat{\gamma}_{ML}$ とすれば，(4.1) から $\hat{\gamma}_{ML} = X_{(1)}$ になり，$L(\hat{\theta}_{ML}, X_{(1)}; \boldsymbol{X}) = \sup_{\theta \in \Theta} L(\theta, X_{(1)}; \boldsymbol{X})$ になるので $\hat{\theta}_{ML}$ は尤度方程式を満たす，すなわち

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} u(X_i) - \lambda_1(\hat{\theta}_{ML}, X_{(1)}) = 0 \tag{4.2}$$

になる．次に，$\lambda_2 = \lambda_2(\theta, \gamma)$ とし，

$$\hat{U} := \sqrt{\lambda_2 n}(\hat{\theta}_{ML} - \theta), \quad T := n(X_{(1)} - \gamma)$$

とおく．このとき，次のことを得る ([A13]).

定理 4.1 下側切断指数型分布族 $\mathcal{P}_1$ において，γ が未知のときの θ の MLE $\hat{\theta}_{ML}$ を γ が既知のときの θ の MLE $\hat{\theta}_{ML}^{\gamma}$ と同じ 2 次の漸近的偏りをもつように補正した MLE を

$$\hat{\theta}_{ML}^* = \hat{\theta}_{ML} + \frac{1}{k(\hat{\theta}_{ML}, X_{(1)})\lambda_2(\hat{\theta}_{ML}, X_{(1)})n} \left\{ \frac{\partial \lambda_1}{\partial \gamma}(\hat{\theta}_{ML}, X_{(1)}) \right\} \tag{4.3}$$

とする．ただし $k(\theta,\gamma) := a(\gamma)e^{\theta u(\gamma)}/b(\theta,\gamma)$ とする．このとき，$\hat{U}^* := \sqrt{\lambda_2 n}(\hat{\theta}_{ML}^* - \theta)$ の確率展開は

$$\hat{U}^* = \hat{U} + \frac{1}{k\sqrt{\lambda_2 n}}\left(\frac{\partial \lambda_1}{\partial \gamma}\right) - \frac{1}{k\lambda_2 n}\left\{\delta + \frac{1}{k}\left(\frac{\partial k}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \lambda_1}{\partial \gamma}\right)\right\} Z_1 + O_p\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \tag{4.4}$$

である．ただし，$k = k(\theta, \gamma)$,

$$\delta := \frac{\lambda_3}{\lambda_2}\left(\frac{\partial \lambda_1}{\partial \gamma}\right) - \frac{\partial \lambda_2}{\partial \gamma},$$

$$\begin{aligned}\hat{U} = Z_1 - \frac{\lambda_3}{2\lambda_2^{3/2}\sqrt{n}} Z_1^2 - \frac{1}{\sqrt{\lambda_2 n}}\left(\frac{\partial \lambda_1}{\partial \gamma}\right) T + \frac{\delta}{\lambda_2 n} Z_1 T + \frac{1}{2n}\left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^3} - \frac{\lambda_4}{3\lambda_2^2}\right) Z_1^3 \\ + O_p\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)\end{aligned} \tag{4.5}$$

とする．また，$\hat{U}^*$ の 2 次の漸近平均，漸近分散はそれぞれ

$$E_{\theta,\gamma}(\hat{U}^*) = -\frac{\lambda_3}{2\lambda_2^{3/2}\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right), \tag{4.6}$$

$$V_{\theta,\gamma}(\hat{U}^*) = 1 + \frac{1}{n}\left(\frac{5\lambda_3^2}{2\lambda_2^3} - \frac{\lambda_4}{\lambda_2^2}\right) + \frac{1}{\lambda_2 n}\{\lambda_1 - u(\gamma)\}^2 + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \tag{4.7}$$

である．

証明については，(4.2) において 2 変数 (θ, γ) の関数の Taylor 展開を用いて定理 3.1 の証明と本質的に同様にすればよい ([A13])．ここで，(4.4), (4.5) より $\hat{U} = \hat{U}^* = Z_1 + o_p(1)$ となるから，中心極限定理より $\hat{U}$, $\hat{U}^*$ はともに漸近的に標準正規分布に従うことが分かり，これは [BL84] の結果に一致する．また，(3.3), (4.6) より $\hat{U}_\gamma$ と $\hat{U}^*$ は同じ 2 次の ($1/\sqrt{n}$ のオーダーまでの) 漸近的偏りをもつが，(3.4) と (4.7) を比較すると $\hat{U}^*$ の 2 次の漸近分散は $\hat{U}_\gamma$ のそれよりも $1/n$ のオーダーにおいて大きくなることが分かる．

5 $\mathcal{P}_1$ において γ が未知のときの θ の MCLE $\hat{\theta}_{MCL}$ の漸近挙動

まず，(2.1) より，$(X_{(2)},\dots,X_{(n)})$ の $(n-1)!$ 個の置換の確率置換 $Y_2,\dots,Y_n$ が存在し，$X_{(1)}=x_{(1)}$ が与えられたとき $Y_2,\dots,Y_n$ がたがいに独立にいずれも密度

$$g(y;\theta,x_{(1)})=\begin{cases}\frac{a(y)e^{\theta u(y)}}{b(\theta,x_{(1)})} & (x_{(1)}<y<d),\\ 0 & (\text{その他})\end{cases}$$

をもつ分布に従う確率変数になる (Quesenberry [Q75], [BL84])．いま，$X_{(1)}=x_{(1)}$ を与えたとき，$x_{(1)}<y_i<d$ $(i=2,\dots,n)$ となる $\boldsymbol{y}=(y_2,\dots,y_n)$ について θ の条件付き尤度関数は

$$L(\theta;\boldsymbol{y}|x_{(1)})=\frac{1}{b^{n-1}(\theta,x_{(1)})}\left\{\prod_{i=2}^{n}a(y_i)\right\}\exp\left\{\theta\sum_{i=2}^{n}u(y_i)\right\}$$

になる．このとき，θ の尤度方程式

$$\frac{1}{n-1}\sum_{i=2}^{n}u(y_i)-\lambda_1(\theta,x_{(1)})=0 \tag{5.1}$$

の解は一意的で，それを $\hat{\theta}_{MCL}(\boldsymbol{y})$ とすれば，$\hat{\theta}_{MCL}=\hat{\theta}_{MCL}(\boldsymbol{Y})$ は θ の MCLE になる．ただし，$\boldsymbol{Y}=(Y_2,\dots,Y_n)$ とする．ここで，$\tilde{\lambda}_i:=\lambda_i(\theta,x_{(1)})$ $(i=1,2,3,4)$ とし，

$$\tilde{Z}_1=\frac{1}{\sqrt{\tilde{\lambda}_2(n-1)}}\sum_{i=2}^{n}\{u(Y_i)-\tilde{\lambda}_1\},\quad \tilde{U}_0=\sqrt{\lambda_2 n}(\hat{\theta}_{MCL}-\theta)$$

とおく．このとき，次のことを得る ([A13])．

定理 5.1 下側切断指数型分布族 $\mathcal{P}_1$ において，γ が未知のときの θ の MCLE $\hat{\theta}_{MCL}$ について $\tilde{U}_0$ の確率展開は

$$\begin{aligned}\tilde{U}_0=\tilde{Z}_1-\frac{\tilde{\lambda}_3}{2\tilde{\lambda}_2^{3/2}\sqrt{n}}\tilde{Z}_1^2+\frac{1}{2n}\left\{1-\frac{1}{\lambda_2}\left(\frac{\partial\lambda_2}{\partial\gamma}\right)T\right\}\tilde{Z}_1\\ +\frac{1}{2n}\left(\frac{\tilde{\lambda}_3^2}{\tilde{\lambda}_2^3}-\frac{\tilde{\lambda}_4}{3\tilde{\lambda}_2^2}\right)\tilde{Z}_1^3+O_p\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)\end{aligned}$$

である．また，$\tilde{U}_0$ の 2 次の漸近平均，漸近分散はそれぞれ

$$E_{\theta,\gamma}(\tilde{U}_0)=-\frac{\lambda_3}{2\lambda_2^{3/2}\sqrt{n}}+O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right), \tag{5.2}$$

$$V_{\theta,\gamma}(\tilde{U}_0)=1+\frac{1}{n}\left(\frac{5\lambda_3^2}{2\lambda_2^3}-\frac{\lambda_4}{\lambda_2^2}\right)+\frac{1}{\lambda_2 n}\{\lambda_1-u(\gamma)\}^2+O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \tag{5.3}$$

である．

証明については，定理 4.1 の証明と本質的に同様である ([A13])．また，(4.6), (4.7), (5.2), (5.3) より，$\tilde{U}_0$ の 2 次の漸近平均，漸近分散は $\hat{U}^* := \sqrt{\lambda_2 n}(\hat{\theta}^*_{ML} - \theta)$ のそれらと等しいことが分かる．よって $\hat{\theta}_{MCL}$ は 2 次の漸近的偏り補正が不要であるという意味で，$\hat{\theta}_{ML}$ より有利であると考えられる．定理 4.1, 定理 5.1 から分かるように $V_{\theta,\gamma}(\tilde{U}^*)$ と $V_{\theta,\gamma}(\tilde{U}_0)$ の計算式 (4.7), (5.3) の右辺の第 2 項は密度 (2.1) の正則な部分に帰因し，その第 3 項は (2.1) の非正則な部分に帰因すると考えられる．

6 $\mathcal{P}_1$ において $\hat{\theta}^{\gamma}_{ML}$ に対する $\hat{\theta}^*_{ML}$ と $\hat{\theta}_{MCL}$ の 2 次の漸近損失

前節の結果から，γ が既知のときの θ の MLE $\hat{\theta}^{\gamma}_{ML}$ と γ が未知のときの θ の補正 MLE $\hat{\theta}^*_{ML}$ と MCLE $\hat{\theta}_{MCL}$ を 2 次の漸近分散を用いて比較する．

定理 6.1 下側切断指数型分布族 $\mathcal{P}_1$ において，$\hat{\theta}^*_{ML}$ と $\hat{\theta}_{MCL}$ は

$$d_n(\hat{\theta}^*_{ML}, \hat{\theta}_{MCL}) := n\left\{V_{\theta,\gamma}(\hat{U}^*) - V_{\theta,\gamma}(\tilde{U}_0)\right\} = o(1) \quad (n \to \infty) \tag{6.1}$$

という意味で 2 次の漸近的同等であるが，それらは $\hat{\theta}^{\gamma}_{ML}$ よりも 2 次のオーダーで漸近的に悪くなり，$\hat{\theta}^{\gamma}_{ML}$ に対する $\hat{\theta}^*_{ML}$ と $\hat{\theta}_{MCL}$ の 2 次の漸近損失は，それぞれ

$$d_n(\hat{\theta}^*_{ML}, \hat{\theta}^{\gamma}_{ML}) := n\left\{V_{\theta,\gamma}(\hat{U}^*) - V_{\theta}(U_{\gamma})\right\} = \frac{(u(\gamma)-\lambda_1)^2}{\lambda_2} + o(1) \quad (n \to \infty), \tag{6.2}$$

$$d_n(\hat{\theta}_{MCL}, \hat{\theta}^{\gamma}_{ML}) := n\left\{V_{\theta,\gamma}(\tilde{U}_0) - V_{\theta}(U_{\gamma})\right\} = \frac{(u(\gamma)-\lambda_1)^2}{\lambda_2} + o(1) \quad (n \to \infty) \tag{6.3}$$

である．

証明は定理 3.1, 定理 4.1, 定理 5.1 より明らか．ここで (6.2), (6.3) の右辺で与えられる 2 次の漸近損失は，$u(X_1)$ の分散 $\lambda_2 = V_{\theta,\gamma}(u(X_1)) = E_{\theta,\gamma}[\{u(X_1)-\lambda_1\}^2]$ に対する $X_1 = \gamma$ での $u(X_1)$ の値 $u(\gamma)$ から $u(X_1)$ の平均 λ_1 までの距離 $\{u(X_1)-\lambda_1\}^2$ の比として表される．

7 両側切断指数型分布族

本節以後において，前節で論じた下側切断指数型分布族 $\mathcal{P}_1$ の場合と同様な記法，たとえば $b(\theta,\gamma,\nu)$, $\lambda_k(\theta,\gamma,\nu)$, Z_1 等を用いるが，実際には ν に関係するので異なることに注意．いま，$X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ をたがいに独立に，いずれも (Lebesgue 測度に関する) 密度

$$f(x;\theta,\gamma,\nu) = \begin{cases} a(x)e^{\theta u(x)}/b(\theta,\gamma,\nu) & (c < \gamma \le x \le \nu < d), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases} \tag{7.1}$$

をもつ両側切断指数型分布族 $\mathcal{P}_2$ の分布に従う確率変数列とする．ただし，$a(\cdot)$ は正値でほとんど至るところ連続で，$u(\cdot)$ は区間 (γ,ν) 上で絶対連続で $du(x)/dx \neq 0$ とする．また $\gamma, \nu \in (c,d)$ $(\gamma < \nu)$ について

$$\Theta(\gamma,\nu) := \left\{\theta \,\middle|\, 0 < b(\theta,\gamma,\nu) := \int_{\gamma}^{\nu} a(x)e^{\theta u(x)}dx < \infty\right\}$$

とし，任意の $\gamma, \nu \in (c, d)$ $(\gamma < \nu)$ について $\Theta \equiv \Theta(\gamma, \nu)$ は空でない開区間であると仮定する．たとえば，Aban et al. [AMP06], Zhang [Z13] が取り扱った上側切断パレート分布は $\mathcal{P}_2$ に属する．

前節で論じた下側切断指数型分布族 $\mathcal{P}_1$ のときと同様に，$\mathcal{P}_2$ においても切断母数 γ, ν を局外母数として，自然母数 θ の推定問題を考える (Akahira et al. [AHKO14])．ここで，$\boldsymbol{X} := (X_1, \ldots, X_n)$ とし，その順序統計量を $X_{(1)} \leq \cdots \leq X_{(n)}$ とする．このとき $\log b(\theta, \gamma, \nu)$ は θ の狭義凸関数で θ について無限回偏微分可能であり，各 $k = 1, 2, \ldots$ について

$$\lambda_k(\theta, \gamma, \nu) := \frac{\partial^k}{\partial \theta^k} \log b(\theta, \gamma, \nu) \tag{7.2}$$

は $u(X_1)$ の k 次のキュムラントになる．

8 $\mathcal{P}_2$ において γ と ν が既知のときの θ の MLE $\hat{\theta}_{ML}^{\gamma,\nu}$ の漸近挙動

いま，$c < \gamma \leq x_{(1)}$, $x_{(n)} \leq \nu < d$ となる $\boldsymbol{x} := (x_1, \ldots, x_n)$ が与えられたとき，θ の尤度関数は

$$L^{\gamma,\nu}(\theta; \boldsymbol{x}) := \frac{1}{b^n(\theta, \gamma, \nu)} \left\{ \prod_{i=1}^n a(x_i) \right\} \exp\left\{ \theta \sum_{i=1}^n u(x_i) \right\}$$

になる．このとき，θ の尤度方程式

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u(x_i) - \lambda_1(\theta, \gamma, \nu) = 0 \tag{8.1}$$

の解は一意的で，それを $\hat{\theta}_{ML}^{\gamma,\nu}(\boldsymbol{x})$ とすれば，$\hat{\theta}_{ML}^{\gamma,\nu} = \hat{\theta}_{ML}^{\gamma,\nu}(\boldsymbol{X})$ が θ の MLE になる．ここで，$\lambda_i = \lambda_i(\theta, \gamma, \nu)$ $(i = 2, 3, 4)$ とし

$$Z_1 := \frac{1}{\sqrt{\lambda_2 n}} \sum_{i=1}^n \{u(X_i) - \lambda_1\}, \quad U_{\gamma,\nu} := \sqrt{\lambda_2 n}(\hat{\theta}_{ML}^{\gamma,\nu} - \theta)$$

とおく．このとき，次のことを得る ([AHKO14])．

定理 8.1 両側切断指数型分布族 $\mathcal{P}_2$ において，γ, ν が既知のときの θ の MLE $\hat{\theta}_{ML}^{\gamma,\nu}$ について $U_{\gamma,\nu}$ の確率展開は

$$U_{\gamma,\nu} = Z_1 - \frac{\lambda_3}{2\lambda_2^{3/2}\sqrt{n}} Z_1^2 + \frac{1}{2n} \left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^3} - \frac{\lambda_4}{3\lambda_2^2} \right) Z_1^3 + O_p\left(\frac{1}{n\sqrt{n}} \right) \tag{8.2}$$

である．また $U_{\gamma,\nu}$ の 2 次の漸近平均，漸近分散はそれぞれ

$$E_\theta(U_{\gamma,\nu}) = -\frac{\lambda_3}{2\lambda_2^{3/2}\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}} \right), \tag{8.3}$$

$$V_\theta(U_{\gamma,\nu}) = 1 + \frac{1}{n} \left(\frac{5\lambda_3^2}{2\lambda_2^3} - \frac{\lambda_4}{\lambda_2^2} \right) + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}} \right) \tag{8.4}$$

である．

証明については，定理 3.1 のときと同様に，$\hat{\theta}_{ML}^{\gamma,\nu}$ は尤度方程式 (8.1) の解であるから，Taylor 展開を用いて (8.2) を導出し，(7.2) の λ_k が $u(X_1)$ の k 次のキュムラントであるから (7.2) より (8.3), (8.4) を得る ([AHKO14]). ここで，(8.2) より $U_{\gamma,\nu} = Z_1 + O_p(1/\sqrt{n})$ であるから，Z_1 の定義より中心極限定理から $n \to \infty$ のとき $U_{\gamma,\nu}$ が漸近的に標準正規分布に従う.

9 $\mathcal{P}_2$ において γ と ν が未知のときの θ の MLE $\hat{\theta}_{ML}$ の漸近挙動

まず，$c < \gamma \le x_{(1)}$, $x_{(n)} \le \nu < d$ となる $\boldsymbol{x} := (x_1, \ldots, x_n)$ が与えられたとき，(θ, γ, ν) の尤度関数は

$$L(\theta, \gamma, \nu; \boldsymbol{x}) = \frac{1}{b^n(\theta, \gamma, \nu)} \left\{ \prod_{i=1}^{n} a(x_i) \right\} \exp\left\{ \theta \sum_{i=1}^{n} u(x_i) \right\} \tag{9.1}$$

になる．ここで，θ, γ, ν のそれぞれの MLE を $\hat{\theta}_{ML}$，$\hat{\gamma}_{ML}$，$\hat{\nu}_{ML}$ とすると，(9.1) から $\hat{\gamma}_{ML} = X_{(1)}$，$\hat{\nu}_{ML} = X_{(n)}$ となり $L(\hat{\theta}_{ML}, X_{(1)}, X_{(n)}; \boldsymbol{X}) = \sup_{\theta \in \Theta} L(\theta, X_{(1)}, X_{(n)}; \boldsymbol{X})$ となるから $\hat{\theta}_{ML} = \hat{\theta}_{ML}(\boldsymbol{X})$ は尤度方程式を満たす，すなわち

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} u(X_i) - \lambda_1(\hat{\theta}_{ML}, X_{(1)}, X_{(n)}) = 0 \tag{9.2}$$

となる．ただし，$\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ とする．次に $\lambda_2 = \lambda_2(\theta, \gamma, \nu)$ とし

$$\hat{U} := \sqrt{\lambda_2 n}(\hat{\theta}_{ML} - \theta), \quad T_{(1)} := n(X_{(1)} - \gamma), \quad T_{(n)} := n(X_{(n)} - \nu)$$

とおく．このとき，次のことを得る ([AHKO14]).

定理 9.1 両側切断指数型分布族 $\mathcal{P}_2$ において γ, ν が未知のときの θ の MLE $\hat{\theta}_{ML}$ を γ, ν が既知のときの θ の MLE $\hat{\theta}_{ML}^{\gamma,\nu}$ と同じ 2 次の漸近的偏りをもつように補正した MLE を

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_{ML}^{*} = \hat{\theta}_{ML} + \frac{1}{\lambda_2(\hat{\theta}_{ML}, X_{(1)}, X_{(n)})} &\left\{ \frac{1}{k(\hat{\theta}_{ML}, X_{(1)}, X_{(n)})} \frac{\partial \lambda_1}{\partial \gamma}(\hat{\theta}_{ML}, X_{(1)}, X_{(n)}) \right. \\ &\left. - \frac{1}{\tilde{k}(\hat{\theta}_{ML}, X_{(1)}, X_{(n)})} \frac{\partial \lambda_1}{\partial \nu}(\hat{\theta}_{ML}, X_{(1)}, X_{(n)}) \right\}\end{aligned} \tag{9.3}$$

とする．ただし，$k(\theta, \gamma, \nu) := a(\gamma) e^{\theta u(\gamma)} / b(\theta, \gamma, \nu)$, $\tilde{k}(\theta, \gamma, \nu) := a(\nu) e^{\theta u(\nu)} / b(\theta, \gamma, \nu)$ とする．このとき，$\hat{U}^* := \sqrt{\lambda_2 n}(\hat{\theta}_{ML}^{*} - \theta)$ の確率展開は

$$\begin{aligned}\hat{U}^* = \hat{U} &+ \frac{1}{\sqrt{\lambda_2 n}} \left\{ \frac{1}{k}\left(\frac{\partial \lambda_1}{\partial \gamma}\right) - \frac{1}{\tilde{k}}\left(\frac{\partial \lambda_1}{\partial \nu}\right) \right\} \\ &- \frac{1}{\lambda_2 n} \left\{ \frac{\delta_1}{k} - \frac{\delta_2}{\tilde{k}} + \frac{1}{k^2}\left(\frac{\partial k}{\partial \theta}\right)\left(\frac{\partial \lambda_1}{\partial \gamma}\right) - \frac{1}{\tilde{k}^2}\left(\frac{\partial \tilde{k}}{\partial \theta}\right)\left(\frac{\partial \lambda_1}{\partial \nu}\right) \right\} Z_1 + O_p\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)\end{aligned} \tag{9.4}$$

である．ただし，$k = k(\theta, \gamma, \nu)$, $\tilde{k} = \tilde{k}(\theta, \gamma, \nu)$,

$$\delta_1 := \frac{\lambda_3}{\lambda_2}\left(\frac{\partial \lambda_1}{\partial \gamma}\right) - \frac{\partial \lambda_2}{\partial \gamma}, \quad \delta_2 := \frac{\lambda_3}{\lambda_2}\left(\frac{\partial \lambda_1}{\partial \nu}\right) - \frac{\partial \lambda_2}{\partial \nu},$$

$$\begin{aligned}\hat{U} = Z_1 - \frac{\lambda_3}{2\lambda_2^{3/2}\sqrt{n}} Z_1^2 - \frac{1}{\sqrt{\lambda_2 n}}\left\{\left(\frac{\partial \lambda_1}{\partial \gamma}\right) T_{(1)} + \left(\frac{\partial \lambda_1}{\partial \nu}\right) T_{(n)}\right\} \\ + \frac{1}{\lambda_2 n} Z_1 \{\delta_1 T_{(1)} + \delta_2 T_{(n)}\} + \frac{1}{2n}\left(\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^3} - \frac{\lambda_4}{3\lambda_2^2}\right) Z_1^3 + O_p\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)\end{aligned} \tag{9.5}$$

とする．また $\hat{U}^*$ の 2 次の漸近平均，漸近分散はそれぞれ

$$E_{\theta,\gamma,\nu}(\hat{U}^*) = -\frac{\lambda_3}{2\lambda_2^{3/2}\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right), \tag{9.6}$$

$$V_{\theta,\gamma,\nu}(\hat{U}^*) = 1 + \frac{1}{n}\left(\frac{5\lambda_3^2}{2\lambda_2^3} - \frac{\lambda_4}{\lambda_2^2}\right) + \frac{1}{\lambda_2 n}\left[\{\lambda_1 - u(\gamma)\}^2 + \{\lambda_1 - u(\nu)\}^2\right] + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \tag{9.7}$$

である．

証明については，(9.2) において 3 変数 (θ, γ, ν) の関数の Taylor 展開を用いて定理 3.1 の証明と本質的に同様にすればよい．ここで，(9.4), (9.5) より $\hat{U}^* = Z_1 + O_p(1/\sqrt{n})$ であるから，Z_1 の定義より中心極限定理より $n \to \infty$ のとき $\hat{U}^*$ が漸近的に標準正規分布に従う．また，$\hat{U}^*$ の 2 次の漸近分散 $V_{\theta,\gamma,\nu}(\hat{U}^*)$ について (9.7) の右辺の第 2 項は密度 (7.1) の正則な部分に帰因し，その第 3 項は (7.1) の非正則な部分に帰因すると考えられる．

10 $\mathcal{P}_2$ において γ と ν が未知のときの θ の MCLE $\hat{\theta}_{MCL}$ の漸近挙動

まず，(5.1) より $(X_{(2)}, \ldots, X_{(n-1)})$ の $(n-2)!$ 個の置換の確率置換 $Y_2, \ldots, Y_{n-1}$ が存在し，$X_{(1)} = x_{(1)}$, $X_{(n)} = x_{(n)}$ が与えられたとき $Y_2, \ldots, Y_{n-1}$ がたがいに独立にいずれも密度

$$g(y; \theta, x_{(1)}, x_{(n)}) = \begin{cases} \frac{a(y)e^{\theta u(y)}}{b(\theta, x_{(1)}, x_{(n)})} & (c < \gamma < x_{(1)} \le y \le x_{(n)} < \nu < d), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

をもつ分布に従う確率変数になる．いま，$c < \gamma < x_{(1)} \le y_i \le x_{(n)} < \nu < d$ $(i = 2, \ldots, n-1)$ となる $\boldsymbol{y} = (y_2, \ldots, y_{n-1})$ について θ の条件付き尤度関数は

$$L(\theta; \boldsymbol{y} | x_{(1)}, x_{(n)}) = \frac{1}{b^{n-2}(\theta, x_{(1)}, x_{(n)})}\left\{\prod_{i=2}^{n-1} a(y_i)\right\} \exp\left\{\theta \sum_{i=2}^{n-1} u(y_i)\right\}$$

になる．このとき，θ の尤度方程式

$$\frac{1}{n-2}\sum_{i=2}^{n-1} u(y_i) - \lambda_1(\theta, x_{(1)}, x_{(n)}) = 0 \tag{10.1}$$

の解は一意的で，それを $\hat{\theta}_{MCL}(\boldsymbol{y})$ とすれば，$\hat{\theta}_{MCL} = \hat{\theta}_{MCL}(\boldsymbol{Y})$ は θ の MCLE になる．ただし，$\boldsymbol{Y} = (Y_2, \ldots, Y_{n-1})$ とする．ここで，$\tilde{\lambda}_i = \tilde{\lambda}_i(\theta, x_{(1)}, x_{(n)})$ $(i = 1,2,3,4)$ とし，

$$\tilde{Z}_1 := \frac{1}{\sqrt{\tilde{\lambda}_2(n-2)}} \sum_{i=2}^{n-1} \{u(Y_i) - \tilde{\lambda}_1\}, \quad \tilde{U}_0 := \sqrt{\lambda_2 n}(\hat{\theta}_{MCL} - \theta)$$

とおく．このとき，次のことを得る ([AHKO14])．

定理 10.1 両側切断指数型分布族 $\mathcal{P}_2$ において γ, ν が未知のときの θ の MCLE $\hat{\theta}_{MCL}$ について $\tilde{U}_0$ の確率展開は

$$\begin{aligned}\tilde{U}_0 = \tilde{Z}_1 &- \frac{\tilde{\lambda}_3}{2\tilde{\lambda}_2^{3/2}\sqrt{n}}\tilde{Z}_1^2 + \frac{1}{n}\left\{1 - \frac{1}{2\lambda_2}\left(\frac{\partial \lambda_2}{\partial \gamma}\right)T_{(1)} - \frac{1}{2\lambda_2}\left(\frac{\partial \lambda_2}{\partial \nu}\right)T_{(n)}\right\}\tilde{Z}_1 \\ &+ \frac{1}{2n}\left(\frac{\tilde{\lambda}_3^2}{\tilde{\lambda}_2^3} - \frac{\tilde{\lambda}_4}{3\tilde{\lambda}_2^2}\right)\tilde{Z}_1^3 + O_p\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)\end{aligned}$$

である．ただし，$T_{(1)} = n(X_{(1)} - \gamma)$, $T_{(n)} = n(X_{(n)} - \nu)$ とする．また，$\tilde{U}_0$ の 2 次の漸近平均，漸近分散はそれぞれ

$$E_{\theta,\gamma,\nu}(\tilde{U}_0) = -\frac{\lambda_3}{2\lambda_2^{3/2}\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right), \tag{10.2}$$

$$V_{\theta,\gamma,\nu}(\tilde{U}_0) = 1 + \frac{1}{n}\left(\frac{5\lambda_3^2}{2\lambda_2^3} - \frac{\lambda_4}{\lambda_2^2}\right) + \frac{1}{\lambda_2 n}\left[\{\lambda_1 - u(\gamma)\}^2 + \{\lambda_1 - u(\nu)\}^2\right] + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \tag{10.3}$$

である．

証明については，定理 9.1 の証明と同様である ([AHKO14])．また，(10.2), (10.3) より $\tilde{U}_0$ の 2 次の漸近平均，漸近分散はそれぞれ (9.6), (9.7) で与えられる $\hat{U}^*$ のそれらと等しいことが分かる．

11 $\mathcal{P}_2$ において $\hat{\theta}_{ML}^{\gamma,\nu}$ に対する $\hat{\theta}_{ML}^*$ と $\hat{\theta}_{MCL}$ の 2 次の漸近損失

第 7 節から第 10 節までの結果から γ, ν が既知のときの θ の MLE $\hat{\theta}_{ML}^{\gamma,\nu}$ と γ, ν が未知のときの θ の補正 MLE $\hat{\theta}_{ML}^*$, MCLE $\hat{\theta}_{MCL}$ を 2 次の漸近分散を用いて比較する．

定理 11.1 両側切断指数型分布族 $\mathcal{P}_2$ について $\hat{\theta}_{ML}^*$ と $\hat{\theta}_{MCL}$ は

$$d_n(\hat{\theta}_{ML}^*, \hat{\theta}_{MCL}) := n\left\{V_{\theta,\gamma,\nu}(\hat{U}^*) - V_{\theta,\gamma,\nu}(\tilde{U}_0)\right\} = o(1) \quad (n \to \infty)$$

という意味で 2 次の漸近的同等であるが，それらは $\hat{\theta}_{ML}^{\gamma,\nu}$ よりも 2 次のオーダーで漸

近的に悪くなり，$\hat{\theta}^{\gamma,\nu}_{ML}$ に対する $\hat{\theta}^*_{ML}$ と $\hat{\theta}_{MCL}$ の 2 次の漸近損失はそれぞれ

$$d_n(\hat{\theta}^*_{ML}, \hat{\theta}^{\gamma,\nu}_{ML}) := n\left\{V_{\theta,\gamma,\nu}(\hat{U}^*) - V_\theta(U_{\gamma,\nu})\right\}$$
$$= \frac{1}{\lambda_2}\left[\{u(\gamma)-\lambda_1\}^2 + \{u(\nu)-\lambda_1\}^2\right] + o(1) \quad (n\to\infty), \qquad (11.1)$$
$$d_n(\hat{\theta}_{MCL}, \hat{\theta}^{\gamma,\nu}_{ML}) := n\left\{V_{\theta,\gamma,\nu}(\tilde{U}_0) - V_\theta(U_{\gamma,\nu})\right\}$$
$$= \frac{1}{\lambda_2}\left[\{u(\gamma)-\lambda_1\}^2 + \{u(\nu)-\lambda_1\}^2\right] + o(1) \quad (n\to\infty) \qquad (11.2)$$

である．

証明は定理 8.1, 定理 9.1, 定理 10.1 より明らか．ここで (11.1), (11.2) の右辺で与えられる 2 次の漸近損失は，$u(X_1)$ の分散 $\lambda_2 = V_{\theta,\gamma,\nu}(u(X_1)) = E_{\theta,\gamma,\nu}\left[\{u(X_1)-\lambda_1\}^2\right]$ に対する $X_1=\gamma$ での $u(X_1)$ の値 $u(\gamma)$ から $u(X_1)$ の平均 λ_1 までの距離と $X_1=\nu$ での $u(X_1)$ の値 $u(\nu)$ から λ_1 までの距離の和の比として表現されることが分かる．

12 $\mathcal{P}_1$ の例

本節において片側切断指数型分布族 $\mathcal{P}_1$ の例として切断指数分布，切断正規分布，パレート分布の場合に自然母数 θ の補正 MLE, MCLE の 2 次の漸近損失を求める ([A13]).

例 12.1 (切断指数分布). $\mathcal{P}_1$ の密度 (2.1) において，$c=-\infty$, $d=\infty$ とし，$-\infty<\gamma\le x<\infty$ について $a(x)\equiv 1$, $u(x)=-x$ とする．このとき，$b(\theta,\gamma)=e^{-\theta\gamma}/\theta$ であるから $\Theta=(0,\infty)$ で (2.2) より

$$\lambda_1 = \frac{\partial}{\partial\theta}\log b(\theta,\gamma) = -\gamma - \frac{1}{\theta},$$
$$\lambda_2 = \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log b(\theta,\gamma) = \frac{1}{\theta^2}, \quad k(\theta,\gamma)=\theta$$

になる．また，(3.1), (4.2), (4.3), (5.1) より

$$\hat{\theta}^{\gamma}_{ML} = 1/(\bar{X}-\gamma), \quad \hat{\theta}_{ML} = 1/(\bar{X}-X_{(1)}),$$
$$\hat{\theta}^*_{ML} = \hat{\theta}_{ML} - \frac{1}{n}\hat{\theta}_{ML}, \quad \hat{\theta}_{MCL} = 1\Bigg/\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=2}^{n} X_{(i)} - X_{(1)}\right).$$

になる．ただし，$\bar{X}=(1/n)\sum_{i=1}^n X_i$ とする．ここで $\hat{\theta}^*_{ML}=\hat{\theta}_{MCL}$ になるから，$d_n(\hat{\theta}^*_{ML},\hat{\theta}_{MCL})=0$ になる．また，定理 6.1 より

$$d_n(\hat{\theta}^*_{ML},\hat{\theta}^{\gamma}_{ML}) = d_n(\hat{\theta}_{MCL},\hat{\theta}^{\gamma}_{ML}) = 1+o(1) \quad (n\to\infty)$$

になる．

例 12.2 (切断正規分布). $\mathcal{P}_1$ の密度 (2.1) において, $c = -\infty$, $d = \infty$ とし, $-\infty < \gamma \leq x < \infty$ において $a(x) = e^{-x^2/2}$, $u(x) = x$ とする. このとき $b(\theta, \gamma) = \Phi(\theta - \gamma)/\phi(\theta)$ であるから, $\Theta = (-\infty, \infty)$ になり, (2.2) と定理 4.1 より

$$\begin{aligned}\lambda_1(\theta,\gamma) &= \theta + \rho(\theta-\gamma), \quad \frac{\partial \lambda_1}{\partial \gamma}(\theta,\gamma) = (\theta-\gamma)\rho(\theta-\gamma) + \rho^2(\theta-\gamma),\\ \lambda_2(\theta,\gamma) &= 1 - (\theta-\gamma)\rho(\theta-\gamma) - \rho^2(\theta-\gamma),\\ k(\theta,\gamma) &= \rho(\theta-\gamma)\end{aligned}$$

になる. ただし, $\rho(t) := \phi(t)/\Phi(t)$ とし,

$$\Phi(t) = \int_{-\infty}^{t} \phi(x)dx, \quad \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \quad (-\infty < x < \infty)$$

とする. また, (3.1), (4.2), (5.1) より方程式

$$\begin{aligned}&\theta + \rho(\theta-\gamma) = \bar{X}, \quad \theta + \rho(\theta - X_{(1)}) = \bar{X},\\ &\theta + \rho(\theta - X_{(1)}) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=2}^{n} X_{(i)}\end{aligned}$$

のそれぞれの解が $\hat{\theta}_{ML}^{\gamma}$, $\hat{\theta}_{ML}$, $\hat{\theta}_{MCL}$ になる. そして, (4.3) より θ の補正 MLE は

$$\hat{\theta}_{ML}^{*} = \hat{\theta}_{ML} + \frac{\hat{\theta}_{ML} - X_{(1)} + \rho(\hat{\theta}_{ML} - X_{(1)})}{1 - (\hat{\theta}_{ML} - X_{(1)})\rho(\hat{\theta}_{ML} - X_{(1)}) - \rho^2(\hat{\theta}_{ML} - X_{(1)})}$$

になる. さらに, 定理 6.1 から $\hat{\theta}_{ML}^{*}$ の 2 次の漸近損失は

$$\begin{aligned}&d_n(\hat{\theta}_{ML}^{*}, \hat{\theta}_{MCL}) = o(1) \quad (n \to \infty),\\ &d_n(\hat{\theta}_{ML}^{*}, \hat{\theta}_{ML}^{\gamma}) = d_n(\hat{\theta}_{MCL}, \hat{\theta}_{ML}^{\gamma}) = \frac{\{\theta - \gamma + \rho(\theta-\gamma)\}^2}{1 - (\theta-\gamma)\rho(\theta-\gamma) - \rho^2(\theta-\gamma)} + o(1) \quad (n \to \infty)\end{aligned}$$

になる.

例 12.3 (パレート分布). $\mathcal{P}_1$ の密度 (2.1) において, $c = 0$, $d = \infty$ とし, $0 < \gamma \leq x < \infty$ について $u(x) = -\log x$ とする. このとき $b(\theta, \gamma) = 1/(\theta\gamma^{\theta})$ となり, $\Theta = (0, \infty)$ になる. ここで, $t = \log x$, $\gamma_0 = \log \gamma$ と変換すれば (2.1) は

$$f(t;\theta,\gamma_0) = \begin{cases} \theta e^{\theta\gamma_0} e^{-\theta t} & (t \geq \gamma_0) \\ 0 & (t < \gamma_0) \end{cases}$$

となる. よってこの場合は, 例 12.1 の切断指数分布の場合に帰着される.

13 $\mathcal{P}_2$ の例

本節において両側切断指数型分布族 $\mathcal{P}_2$ の例として, 両側切断指数分布, 上側切断パレート分布, 両側切断正規分布の場合に補正 MLE, MCLE の 2 次の漸近損失を求める ([AHKO14]).

例 13.1 (両側切断指数分布). $\mathcal{P}_2$ の密度 (7.1) において，$c=-\infty$, $d=\infty$ とし，$-\infty<\gamma\leq x\leq\nu<\infty$ について $a(x)\equiv 1$, $u(x)=-x$ とする．このとき，$b(\theta,\gamma,\nu)=(e^{-\theta\gamma}-e^{-\theta\nu})/\theta$ であるから $\Theta=(0,\infty)$ になり，また (7.2), 定理 9.1 より

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{\partial}{\partial\theta}\log b(\theta,\gamma,\nu)=\frac{-\gamma+e^{\theta(\gamma-\nu)}}{1-e^{\theta(\gamma-\nu)}}-\frac{1}{\theta},\\
\lambda_2 &= \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log b(\theta,\gamma,\nu)=-\frac{(\gamma-\nu)^2e^{\theta(\gamma-\nu)}}{(1-e^{\theta(\gamma-\nu)})^2}+\frac{1}{\theta^2},\\
k(\theta,\gamma,\nu) &= \frac{a(\gamma)e^{\theta u(\gamma)}}{b(\theta,\gamma,\nu)}=\frac{\theta}{1-e^{\theta(\gamma-\nu)}},\\
\tilde{k}(\theta,\gamma,\nu) &= \frac{a(\nu)e^{\theta u(\nu)}}{b(\theta,\gamma,\nu)}=\frac{\theta e^{\theta(\gamma-\nu)}}{1-e^{\theta(\gamma-\nu)}}
\end{aligned}$$

になる．そして，(8.1), (9.2), (10.1) から θ の方程式

$$\begin{aligned}
&\frac{\gamma-\nu e^{\theta(\gamma-\nu)}}{1-e^{\theta(\gamma-\nu)}}+\frac{1}{\theta}=\bar{X},\\
&\frac{X_{(1)}-X_{(n)}e^{\theta(X_{(1)}-X_{(n)})}}{1-e^{\theta(X_{(1)}-X_{(n)})}}+\frac{1}{\theta}=\bar{X},\\
&\frac{X_{(1)}-X_{(n)}e^{\theta(X_{(1)}-X_{(n)})}}{1-e^{\theta(X_{(1)}-X_{(n)})}}+\frac{1}{\theta}=\frac{1}{n-2}\sum_{i=2}^{n-1}X_{(i)}
\end{aligned}$$

のそれぞれの解は $\hat{\theta}_{ML}^{\gamma,\nu}$, $\hat{\theta}_{ML}$, $\hat{\theta}_{MCL}$ になる．ただし，$\bar{X}=(1/n)\sum_{i=1}^n X_i$ とする．また，(9.3) より θ の補正 MLE は

$$\hat{\theta}_{ML}^*=\hat{\theta}_{ML}+\frac{1}{\hat{\lambda}_2 n}\left\{\frac{1}{\hat{k}}\left(\frac{\partial\hat{\lambda}_1}{\partial\gamma}\right)-\frac{1}{\hat{\tilde{k}}}\left(\frac{\partial\hat{\lambda}_1}{\partial\nu}\right)\right\},$$

になる．ただし，$\hat{\lambda}_i=\lambda_i(\hat{\theta}_{ML},X_{(1)},X_{(n)})$ $(i=1,2)$, $\hat{k}=k(\hat{\theta}_{ML},X_{(1)},X_{(n)})$, $\hat{\tilde{k}}=\tilde{k}(\hat{\theta}_{ML},X_{(1)},X_{(n)})$ とし，さらに

$$\frac{\partial\hat{\lambda}_1}{\partial\gamma}=\frac{\partial\lambda_1}{\partial\gamma}(\hat{\theta}_{ML},X_{(1)},X_{(n)}),\quad \frac{\partial\hat{\lambda}_1}{\partial\nu}=\frac{\partial\lambda_1}{\partial\nu}(\hat{\theta}_{ML},X_{(1)},X_{(n)})$$

として，これらは

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\lambda_1}{\partial\gamma} &= -\frac{1+\{\theta(\gamma-\nu)-1\}e^{\theta(\gamma-\nu)}}{\{1-e^{\theta(\gamma-\nu)}\}^2},\\
\frac{\partial\lambda_1}{\partial\nu} &= \frac{e^{\theta(\gamma-\nu)}\{1+\theta(\gamma-\nu)-e^{\theta(\gamma-\nu)}\}}{\{1-e^{\theta(\gamma-\nu)}\}^2}
\end{aligned}$$

から得られる．次に，定理 11.1 より $\hat{\theta}^*_{ML}$ の 2 次の漸近損失は

$$
\begin{aligned}
d_n(\hat{\theta}^*_{ML}, \hat{\theta}_{MCL}) &= o(1) \quad (n \to \infty), \\
d_n(\hat{\theta}^*_{ML}, \hat{\theta}^{\gamma,\nu}_{ML}) &= d_n(\hat{\theta}_{MCL}, \hat{\theta}^{\gamma,\nu}_{ML}) \\
&= \frac{(1+\eta-e^\eta)^2 + \{1+(\eta-1)e^\eta\}^2}{(1-e^\eta)^2 - \eta^2 e^\eta} + o(1) \quad (n \to \infty)
\end{aligned}
$$

になる．ただし，$\eta = \theta(\gamma - \nu)$ とする．

例 13.2 (上側切断パレート分布). Aban et al. [AMP06] は推定すべき指数 (index) 母数 α と局外母数として 2 つの切断母数 γ, ν をもつパレート分布について，γ, ν が既知の場合と，γ, ν が未知の場合にそれぞれの α の MLE を $\tilde{\alpha}$, $\hat{\alpha}$ としてそれらの漸近正規性を示した．彼らの論文の Remark 2 において，$\hat{\alpha}$ の漸近分散は $\tilde{\alpha}$ のそれと同じでないと主張している．定理 8.1, 定理 9.1 より分かるように，1 次のオーダーでは $\tilde{\alpha}$ と $\hat{\alpha}$ はともに同じ漸近分散をもつ．しかし，2 次のオーダーまで漸近的に比較する場合には $\hat{\alpha}$ の偏り補正が必要で，以下で述べるように $\hat{\alpha}$ の補正 MLE の 2 次の漸近分散は $\tilde{\alpha}$ のそれと異なることが分かる．なお，本稿では α は θ として表されている．いま，$\mathcal{P}_2$ の密度 (7.1) において，$c = 0$, $d = \infty$ とし，$0 < \gamma \le x \le \nu < \infty$ について $a(x) = 1/x$, $u(x) = -\log x$ とする．このとき，

$$
b(\theta, \gamma, \nu) = \frac{1 - (\gamma/\nu)^\theta}{\theta \gamma^\theta}
$$

であるから，$\Theta = (0, \infty)$ になる．ここで $t = \log x$, $\gamma_0 = \log \gamma$, $\nu_0 = \log \nu$ と変数変換すると，(7.1) は密度

$$
f(t; \theta, \gamma_0, \nu_0) = \begin{cases} \frac{\theta e^{\theta\gamma_0}}{1-e^{\theta(\gamma_0-\nu_0)}} e^{-\theta t} & (\gamma_0 \le t \le \nu_0), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}
$$

になる．よって，上側切断パレート分布の場合は例 13.1 の両側切断指数分布の場合に帰着される．そこで，例 13.1 において $\bar{X}$, $X_{(i)}$ $(i = 1, \ldots, n)$ をそれぞれ $\overline{\log X} = (1/n)\sum_{i=1}^n \log X_i$, $\log X_{(i)}$ $(i = 1, \ldots, n)$ に置き換えると，$\hat{\theta}^*_{ML}$ の 2 次の漸近損失が

$$
\begin{aligned}
&d_n(\hat{\theta}^*_{ML}, \hat{\theta}_{MCL}) = o(1) \quad (n \to \infty), \\
&d_n(\hat{\theta}^*_{ML}, \hat{\theta}^{\gamma,\nu}_{ML}) = d_n(\hat{\theta}_{MCL}, \hat{\theta}^{\gamma,\nu}_{ML}) \\
&= \left\{ \left(1 + \frac{\xi \log \xi}{1-\xi}\right)^2 + \left(1 + \frac{\log \xi}{1-\xi}\right)^2 \right\} \Big/ \left\{ 1 - \frac{\xi (\log \xi)^2}{(1-\xi)^2} \right\} + o(1) \quad (n \to \infty)
\end{aligned}
$$

になる．ただし，$\xi := (\gamma/\nu)^\theta$ とする．

例 13.3 (両側切断正規分布). $\mathcal{P}_2$ の密度 (7.1) において，$c = -\infty$, $d = \infty$ とし，$-\infty < \gamma \le x \le \nu < \infty$ について $a(x) = e^{-x^2/2}$, $u(x) = x$ とする．このとき，

$$
b(\theta, \gamma, \nu) = \{\Phi(\theta - \gamma) - \Phi(\theta - \nu)\}/\phi(\theta)
$$

となるから，$\Theta=(-\infty,\infty)$ で，(7.2), 定理 9.1 より

$$\lambda_1(\theta,\gamma,\nu)=\theta+\eta_{\gamma-\nu}(\theta-\gamma)+\eta_{\nu-\gamma}(\theta-\nu),$$
$$\lambda_2(\theta,\gamma,\nu)=1-(\theta-\gamma)\eta_{\gamma-\nu}(\theta-\gamma)-(\theta-\nu)\eta_{\nu-\gamma}(\theta-\nu)-\{\eta_{\gamma-\nu}(\theta-\gamma)+\eta_{\nu-\gamma}(\theta-\nu)\}^2,$$
$$k(\theta,\gamma,\nu)=\eta_{\gamma-\nu}(\theta-\gamma),\quad \tilde{k}(\theta,\gamma,\nu)=-\eta_{\nu-\gamma}(\theta-\nu)$$

になる．ただし

$$\eta_\alpha(t):=\frac{\phi(t)}{\Phi(t)-\Phi(t+\alpha)}$$

とし，ここで

$$\Phi(t)=\int_{-\infty}^t\phi(x)dx,\quad \phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\quad(-\infty<x<\infty)$$

とする．そして (8.1), (9.2), (10.1) から θ の方程式

$$\theta+\eta_{\gamma-\nu}(\theta-\gamma)-\eta_{\nu-\gamma}(\theta-\nu)=\bar{X},$$
$$\theta+\eta_{X_{(1)}-X_{(n)}}(\theta-X_{(1)})-\eta_{X_{(n)}-X_{(1)}}(\theta-X_{(n)})=\bar{X},$$
$$\theta-\eta_{X_{(1)}-X_{(n)}}(\theta-X_{(1)})-\eta_{X_{(n)}-X_{(1)}}(\theta-X_{(n)})=\frac{1}{n-2}\sum_{i=2}^{n-1}X_{(i)}$$

のそれぞれの解は $\hat{\theta}_{ML}^{\gamma,\nu}$, $\hat{\theta}_{ML}$, $\hat{\theta}_{MCL}$ になる．また，(9.3) より θ の補正 MLE は

$$\hat{\theta}_{ML}^*=\hat{\theta}_{ML}+\frac{1}{\hat{\lambda}_2 n}\left\{\frac{1}{\hat{k}}\left(\frac{\partial\hat{\lambda}_1}{\partial\gamma}\right)-\frac{1}{\hat{\tilde{k}}}\left(\frac{\partial\hat{\lambda}_1}{\partial\nu}\right)\right\},$$

になる．ただし，$\hat{\lambda}_i=\lambda_i(\hat{\theta}_{ML},X_{(1)},X_{(n)})$ $(i=1,2)$, $\hat{k}=k(\hat{\theta}_{ML},X_{(1)},X_{(n)})$, $\hat{\tilde{k}}=\tilde{k}(\hat{\theta}_{ML},X_{(1)},X_{(n)})$ とし，さらに

$$\frac{\partial\hat{\lambda}_1}{\partial\gamma}=\frac{\partial\lambda_1}{\partial\gamma}(\hat{\theta}_{ML},X_{(1)},X_{(n)}),\quad \frac{\partial\hat{\lambda}_1}{\partial\nu}=\frac{\partial\lambda_1}{\partial\nu}(\hat{\theta}_{ML},X_{(1)},X_{(n)})$$

とし，これらは

$$\frac{\partial\lambda_1}{\partial\gamma}=\eta_{\gamma-\nu}(\theta-\gamma)\{\theta-\gamma-\eta_{\gamma-\nu}(\theta-\gamma)-\eta_{\nu-\gamma}(\theta-\nu)\},$$
$$\frac{\partial\lambda_1}{\partial\nu}=\eta_{\nu-\gamma}(\theta-\nu)\{\theta-\nu+\eta_{\gamma-\nu}(\theta-\gamma)+\eta_{\nu-\gamma}(\theta-\nu)\}$$

が得られる．次に，定理 11.1 より $\hat{\theta}_{ML}^*$ の 2 次漸近損失は

$$d_n(\hat{\theta}_{ML}^*,\hat{\theta}_{MCL})=o(1)\quad(n\to\infty),$$
$$d_n(\hat{\theta}_{ML}^*,\hat{\theta}_{ML}^{\gamma,\nu})=d_n(\hat{\theta}_{MCL},\hat{\theta}_{ML}^{\gamma,\nu})$$
$$=\frac{\{\theta-\gamma+\eta_{\gamma-\nu}(\theta-\gamma)+\eta_{\nu-\gamma}(\theta-\nu)\}^2+\{\theta-\nu+\eta_{\gamma-\nu}(\theta-\gamma)+\eta_{\nu-\gamma}(\theta-\nu)\}^2}{1-(\theta-\gamma)\eta_{\gamma-\nu}(\theta-\gamma)-(\theta-\nu)\eta_{\nu-\gamma}(\theta-\nu)-\{\eta_{\gamma-\nu}(\theta-\gamma)+\eta_{\nu-\gamma}(\theta-\nu)\}^2}$$
$$+o(1)\quad(n\to\infty)$$

になる．

14 上側切断指数型分布族と両側切断指数型分布族

いま，$Y_1, Y_2, \ldots, Y_n, \ldots$ をたがいに独立に，いずれも (Lebesgue 測度に関する) 密度

$$f_0(y;\theta,\eta) = \begin{cases} a_0(y)e^{\theta u_0(y)}/b_0(\theta,\eta) & (c_0 < y \le \eta < d_0), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases} \tag{14.1}$$

をもつ上側切断指数型分布族 $\mathcal{P}_1'$ の分布に従う確率変数列とする．このとき $X_i = -Y_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n, \ldots)$ とおくと，X_i の密度は

$$f_0(-x;\theta,\eta) = \begin{cases} a_0(-x)e^{\theta u_0(-x)}/b_0(\theta,\eta) & (-d_0 < -\eta \le x < -c_0), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

になる．ここで，$\gamma = -\eta$, $c = -d_0$, $d = -c_0$ とおき，$b(\theta,\gamma) = b_0(\theta,-\gamma)$ とし，また $c < \gamma \le x < d$ について $a(x) := a_0(-x)$, $u(x) := u_0(-x)$ とすれば，X_i の密度は

$$f(x;\theta,\gamma) = f_0(-x;\theta,-\gamma) = \begin{cases} a(x)e^{\theta u(x)}/b(\theta,\eta) & (c < \gamma \le x < d), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases} \tag{14.2}$$

となり，これは下側切断指数型分布族の密度になる．よって，上側切断指数型分布族の密度 (14.1) の η を局外母数とするときの自然母数 θ の推定問題は下側切断指数型分布族の密度 (14.2) の γ を局外母数とするときの θ の推定問題に帰着され，これはすでに第 3 節〜第 5 節において論じられた．

次に，両側切断指数型分布族 $\mathcal{P}_2$ において ν が既知，γ が未知の場合の θ の推定問題は下側切断指数型分布族 $\mathcal{P}_1$ の θ の推定問題に帰着され，また ν が未知，γ が既知の場合の θ の推定問題は上側切断指数型分布族 $\mathcal{P}_1'$ の θ の推定問題に帰着される．

15 おわりに

本稿では，片側切断指数型分布族 $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_1'$, 両側切断指数型分布族 $\mathcal{P}_2$ において，切断母数を局外母数として自然母数の推定問題について論じた．最近，Zhang [Z13] は切断パレート分布の 2 つの切断母数と形状母数の最尤推定について論じ，切断母数の修正最尤推定量を提案し，モンテカルロ実験によってその漸近挙動を調べた．しかし，本稿での設定の観点から，この問題は $\mathcal{P}_2$ の γ, θ が局外母数のとき，または ν, θ が局外母数のときの ν または γ の推定問題，すなわち自然母数 θ を局外母数の 1 つとするときに関心がある切断母数の推定問題として捉えることができ，興味深い問題である．これについては Akahira and Ohyauchi [AO15a], [AO15b] で論じられ，Zhang [Z13] が取り扱ったパレート分布の場合はその具体例として挙げられている．

参考文献

[AMP06] Aban, I. B., Meerschaert, M. M. and Panorska, A. K. (2006). Parameter estimation for the truncated Pareto distribution. *J. Am. Statist. Assoc.*, **101**, 270–277.

[A13] Akahira, M. (2013). Second order asymptotic comparison of the MLE and MCLE of a natural parameter for a truncated exponential family of distributions. *Math. Res. Note.*, No. 2013–001, Inst. of Math., Univ. of Tsukuba. To appear in *Ann. Inst. Statist. Math.*

[AHKO14] Akahira, M., Hashimoto, S., Koike, K. and Ohyauchi, N. (2014). Second order asymptotic comparison of the MLE and MCLE for a two-sided truncated exponential family of distributions. *Math. Res. Note.*, No. 2014–001, Inst. of Math., Univ. of Tsukuba. To appear in *Commn. Statist. -Theory and Methods.*

[AO12] Akahira, M. and Ohyauchi, N. (2012). The asymptotic expansion of the maximum likelihood estimator for a truncated exponential family of distributions. (In Japanese). RIMS (Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University) Kôkyûroku, 1804, 188–192.

[AO15a] Akahira, M. and Ohyauchi, N. (2015). Second order asymptotic loss of the MLE of a truncation parameter for a truncated exponential family of distributions. *Math. Res. Note.*, No. 2015–001, Inst. of Math., Univ. of Tsukuba.

[AO15b] Akahira, M. and Ohyauchi, N. (2015). Second order asymptotic loss of the MLE of a truncation parameter for a two-sided truncated exponential family of distributions. *Math. Res. Note.*, No. 2015–002, Inst. of Math., Univ. of Tsukuba.

[Ar15] Arnold, B. C. (2015). *Pareto Distributions.* 2nd ed., CRC Press, Boca Raton.

[BL84] Bar-Lev, S. K. (1984). Large sample properties of the MLE and MCLE for the natural parameter of a truncated exponential family. *Ann. Inst. Statist. Math.*, **36**, Part A, 217–222.

[BN78] Barndorff-Nielsen, O. (1978). *Information and Exponential Families in Statistical Theory.* Wiley, New York.

[JKB94] Johnson, N. L., Kotz, S. and Balakrishnan, N. (1994). *Continuous Univariate Distribution* Vol.1 (2nd ed.), Wiley, New York.

[Q75] Quesenberry, C. P. (1975). Transforming samples from truncation parameter distributions to uniformity. *Commun. Statist.*, **4**, 1149-1155.

[Z13] Zhang, J. (2013). Reducing bias of the maximum-likelihood estimation for the truncated Pareto distribution. *Statistics*, **47**, 792–799.