

# On convergence of the Douglas-Rachford method in Hilbert Spaces

秋田県立大学 システム科学技術学部 \* 松下 慎也 †(Shin-ya Matsushita)

徐 粒 (Li Xu)

Department of Electronics and Information Systems  
Akita Prefectural University

## 1 はじめに

複数の集合の共通部分を見つける問題を制約可能性問題という。本論文では 2 つの集合に対する以下の制約可能性問題を考える:

$$\text{find } u \in \text{int}C \cap D, \quad (1.1)$$

ただし、 $C$  は Hilbert 空間  $H$  の閉凸錐、 $\text{int}C$  は集合  $C$  の内点全体の集合、 $D$  は  $H$  の閉凸集合とする。本論文を通して問題 (1.1) の解の存在を仮定する、つまり

$$\text{int}C \cap D \neq \emptyset. \quad (1.2)$$

制約可能性問題は、所望する条件すべてを満足する解を見つけるための数理モデルであり、工学の分野で現れる様々な問題を表現できることが知られている ([16, 10] 参照)。ここで、任意の  $x \in H$  に対して

$$\|x - x_0\| = \min_{y \in D} \|x - y\|$$

を満たす  $D$  の点  $x_0$  が一意に存在する。 $H$  から  $D$  の上への距離射影  $P_D : H \rightarrow D$  を  $P_D(x) = x_0$  と定義する ([12, 13, 2] 参照)。

制約可能性問題を解決する求解法として射影法が考案されている。射影法は von Neumann [15] によって研究され、次のような結果が得られている。

**定理 1.1** (von Neumann [15])  $C$  と  $D$  を  $H$  の閉部分空間とする。点列  $\{x_n\}$  を以下の方法で生成する。

$$x_0 \in H, \quad x_{n+1} = P_D P_C(x_n) \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (1.3)$$

このとき、 $\{x_n\}$  は  $P_{C \cap D}(x_0)$  に強収束する。

Bregman [4] は集合  $C$  と  $D$  が閉凸集合のとき、 $\{x_n\}$  が  $C \cap D$  の点に弱収束することを証明している。また、Hundal [8] によって Hilbert 空間において射影法が強収束しない閉凸集合の例が与えられている。射影法の理論研究は、集合が複数の場合や Banach 空間における研究など様々な条件のもとで現在も活発におこなわれている ([5, 12, 13, 2] 参照)。

\* 〒015-0055 秋田県由利本荘市土谷字海老ノ口 84-4

† e-mail: matsushita@akita-pu.ac.jp    home page: <http://web.sc.eis.akita-pu.ac.jp/~matsushita/>

一方、問題 (1.1) を解決するため、次のような射影法の変形が提案されている。

$$x_0 \in H, \quad x_{n+1} = P_{e+C}P_D(x_n) \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (1.4)$$

ここで、 $e \in \text{int}C$  とする。Rami, Helmke と Moore [9] は (1.4) から生成される点列  $\{x_n\}$  が問題 (1.1) の解に有限回の繰り返しで到達することを示している。

本研究では Rami, Helmke と Moore 等の研究に動機づけられて、射影法よりも収束効率が優れている Douglas-Rachford 法 [7, 2] に注目し、問題 (1.1) を解決するための求解法の提案および提案した方法から生成した点列が (1.1) の解に有限回の繰り返しで到達することを示す。

## 2 準備

本論文を通して  $H$  を実 Hilbert 空間とし、 $\langle \cdot, \cdot \rangle$  と  $\|\cdot\|$  をそれぞれ  $H$  の内積とノルムとする。集合  $A$  と集合  $B$  は  $H$  の空でない閉凸集合とする。距離射影には次のような性質がある ([5, 12, 13, 2] 参照)。

(i)  $x \in H$  とする。このとき、

$$\langle y - P_A(x), x - P_A(x) \rangle \leq 0 \quad (\forall y \in A): \quad (2.1)$$

(ii)  $x \in H$  とする。このとき、

$$P_{x+A}(y) = P_A(y - x) + x \quad (\forall y \in A): \quad (2.2)$$

(iii)  $I$  を恒等写像とし、 $R_A = 2P_A - I$  とする。このとき  $R_A$  は集合  $A$  に関する反射といい、

$$\|R_A(x) - R_A(y)\| \leq \|x - y\| \quad (\forall x, y \in A) \quad (2.3)$$

が成り立つ:

(iv)

$$\frac{1}{2}(I + R_B R_A) = P_B(2P_A - I) + (I - P_A) \quad (2.4)$$

が成り立つ。

射影法の変形 (1.4) では閉凸錐を平行移動した集合  $e + C$  (ただし、 $e \in \text{int}C$ ) が用いられているが、今回の仮定の下では  $e + C \subset \text{int}C$  という包含関係が成り立っている ([14] 参照)。

次に Douglas-Rachford 法について議論する。Douglas-Rachford 法は 1956 年に論文 [6] で提案され、その後 Lions と Mercier [7] によって極大単調作用素の和の零点を見つける問題を解く方法として一般化された。これにより、閉凸集合に対する指示関数と劣微分 [12, 13, 2] を用いれば、Douglas-Rachford 法を制約可能性問題に直接適用することができる。

2 つの閉凸集合  $A$  と  $B$  に対する Douglas-Rachford 法は以下のように定義される。

$$x_0 \in H, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2}(I + R_B R_A)(x_n) \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (2.5)$$

ここで、 $R_A, R_B$  はそれぞれ集合  $A$  と集合  $B$  に関する反射である。Lions と Mercier [7] は点列  $\{x_n\}$  が写像  $\frac{1}{2}(I + R_B R_A)$  の不動点  $u$  に弱収束し、 $P_A(u) \in A \cap B$  が成り立つことを示した。また、Svaiter [11] は  $\{P_A(x_n)\}$  が  $A \cap B$  の点に弱収束することを示した ([1, 2] も参照)。本論文では射影法の変形 (1.4) と (2.5) のアイデアを用いて問題 (1.1) を解決する求解法を考える。

主定理を得るため、次の結果が必要である。

**補助定理 2.1** [9, Lemma 2.3]  $C$  を  $H$  の閉凸錐、 $e \in \text{int}C$  とする。このとき

$$\text{dist}(e + C, (\text{int}C)^c) > 0$$

が成り立つ。ここで、

$$\text{dist}(e + C, (\text{int}C)^c) = \inf\{\|u - v\| : u \in e + C, v \in (\text{int}C)^c\}.$$

**補助定理 2.2** [12, 13, 2]  $C$  を  $H$  の閉凸集合、 $T$  を  $C$  から  $C$  への非拡大写像、つまり

$$\|T(x) - T(y)\| \leq \|x - y\| \quad (\forall x, y \in C) \quad (2.6)$$

とする。このとき、

$$x_0 \in C, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2}(I + T)(x_n) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

で定義される点列  $\{x_n\}$  は、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T(x_n) - x_n\| = 0 \quad (2.7)$$

が成り立つ。

### 3 主結果

問題 (1.1) を解決するために以下の方法で構成される点列  $\{y_n\}$  を考える。

$$x_0 \in H, \quad y_{n+1} = P_D(x_n) \quad \text{and} \quad x_{n+1} = \frac{1}{2}(I + R_{e+C} R_D)(x_n) \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (3.1)$$

ここで、 $e \in \text{int}C$ ,  $R_{e+C}$  と  $R_D$  はそれぞれ集合  $e + C$  と集合  $D$  に関する反射である。

提案した (3.1) について、次の収束定理を証明する。

**定理 3.1**  $C$  を  $H$  の閉凸錐、 $D$  を  $H$  の閉凸集合で (1.2) が成り立つとする。点列  $\{y_n\}$  を (3.1) によって構成する。このとき点列  $\{y_n\}$  は  $\text{int}C \cap D$  に含まれる点に有限回の繰り返しで到達する。

**証明の概略**

$R_{e+C} R_D$  は非拡大写像であるので補助定理 2.2 を用いると

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|R_{e+C} R_D(x_n) - x_n\| = 0$$

となり、ここで (2.4) を用いれば

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|P_{e+C} R_D(x_n) - P_D(x_n)\| = 0$$

が成り立つ。補助定理 2.1 より

$$\text{dist}(e + C, D \cap (\text{int}C)^c) \geq \text{dist}(e + C, (\text{int}C)^c) > 0$$

となる。  $\gamma := \text{dist}(e + C, D \cap (\text{int}C)^c)$  とおく。このとき、ある  $l_0 \in \mathbb{N}$  が存在して

$$\gamma > \|P_{e+C}R_D(x_l) - P_D(x_l)\| \quad (\forall l \geq l_0)$$

が成り立つ。任意の  $l \geq l_0$  に対して、  $P_D(x_l) \notin \text{int}C$  とすれば、

$$\gamma > \|P_{e+C}R_D(x_l) - P_D(x_l)\| \geq \gamma$$

となり矛盾。よって

$$P_D(x_l) \in \text{int}C \cap D \quad (l \geq l_0)$$

が成り立つ。 ■

## 参考文献

- [1] H. H. Bauschke, *New demiclosed principle for (firmly) nonexpansive operators*, Computational and Analytical Mathematics, **50** (2013), 19–28.
- [2] H. H. Bauschke and P. L. Combettes, *Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces*, Springer, New York, 2011.
- [3] H. H. Bauschke, J. V. Burke, F. R. Deutsch, H. S. Hundal and J. D. Vanderwerff, *A new proximal point iteration that converges weakly but not in norm*, Proc. Amer. Math. Soc. **133** (2005) 1829–1835.
- [4] L. M. Bregman, *The method of successive projection for finding a common point of convex sets*, Sov. Math. Dokl. **6** (1965) 688–692.
- [5] F. Deutsch, *Best Approximation in Inner Product Spaces*, Springer, New York, NY, (2001).
- [6] J. Douglas and H. H. Rachford, *On the numerical solution of heat conduction problems in two or three space variables*, Trans. Amer. Math. Soc., **82** (1956), pp. 421–439.
- [7] P. L. Lions and B. Mercier, *Splitting algorithms for the sum of two nonlinear operators*, SIAM J. Numer. Anal., **16** (1979), pp. 964–979.
- [8] H. S. Hundal, *An alternating projection that does not converge in norm*, Nonlinear Anal. **57** (2004) 35–61.
- [9] M. A. Rami, U. Helmke and J. B. Moore, *A finite steps algorithm for solving convex feasibility problems*, J. Global. Optim., **38** (2007), 143–160.
- [10] H. Stark and Y. Yang, *Vector Space Projections: A Numerical approach to Signal and Image Processing*, Neural Nets, and Optics, John Wiley & Sons, 1998.

- [11] B. F. Svaiter, *On weak convergence of the Douglas-Rachford method*, SIAM J. Control Optim., **49** (2011), 280–287.
- [12] W. Takahashi, *Nonlinear functional analysis. fixed points theory and its applications*, Yokohama Publishers, Yokohama 2000.
- [13] 高橋渉, 非線形・凸解析学入門, 横浜図書, 2005.
- [14] T. Tanaka and D. Kuroiwa, *The convexity of  $A$  and  $B$  assures  $\text{int}A + B = \text{int}(A + B)$* , Appl. Math. Lett., **6** (1993), pp. 83-86.
- [15] J. von Neumann, *Functional Operators II: The Geometry of Orthogonal Spaces*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1950
- [16] D. C. Youla and H. Webb, *Image Restoration by the method of convex projections: Part1-Theory*, IEEE Transactions on Medical Imaging, (1982), 81-94.