数理解析研究所講究録
第 1965 巻 2015 年 1-4

The table of marks, the Kostka matrix, and the character table of the symmetric group

山形大学・医学部　出井北斗 (Hokuto Idei)
Faculty of Medicine, Yamagata University
近畿大学・理工学部　小田文仁 (Fumihito Oda)*
Faculty of Science and Engineering, Kindai University

1 はじめに

[Yo90] において, Yoshida は有限群 G の部分群族 $\mathcal{D}$ に関する可換環 $\mathcal{O}$ 上の一般バーンサイド環 $\mathcal{O}\otimes_{\mathbb{Z}}\Omega(G,\mathcal{D})$ (略して GBR と書く) を導入した. GBR に関連するいくつかの結果がある ([OY01], [Od08], [OS09], [OS11]). 有限群のバーンサイド環の単数群は, Feit-Thompson の定理と関連があり (例えば [Bo07] を参照されたい), 重要な研究対象である. しかし, $\mathcal{D}$ が真の部分群族の場合, GBR の単数群に関する研究は今まで行われてはいない. 本稿では, n 次対称群 S_n の Young 部分群の族 $\mathcal{Y}_n$ に関する GBR $\Omega(S_n,\mathcal{Y}_n)$ の単数群に関する結果を報告する. この環は, 単数群の構造がよく知られている S_n の指標環 $R(S_n)$ と同型であり, その同型を通して構造の決定が容易である.

本稿の目的は以下のよく知られた結果の短い別証明を与えること, および, その結果を用いて GBR $\Omega(S_n,\mathcal{Y}_n)$ の単数群の要素を具体的に記述すること (Corollary 5.2) である.

Theorem 5.1 *Let T be the table of marks with respect to the Young subgroups, and K the Kostka matrix, and C the character table of the symmetric group S_n. Then*

$$T=KC.$$

本稿の構成は以下の通りである: 第 2 節では, GBR の理論からいくつかの定義と基本的性質を復習する [Yo90]. 第 3 節では, 複素数体上の有限群の指標環の単数群の構造に関する注意を復習する. 第 4 節では, Young 部分群から S_n への誘導加群の分解に関するいくつかの注意をまとめる. 第 5 節では, S_n の Young 部分群に関する GBR を決定する.

Notation. $g\in G$ を含む共役類を (g) とする. G の共役類全体の集合を $c\ell(G)$ と書く. G の部分群 H の G における正規化群 $N_G(H)$ の H による剰余群 $N_G(H)/H$ を $W_G(H)$(あるいは, WH) と書く. G の部分群 H を含む G 共役類の集合を (H), すなわち, $(H)=\{{}^gH\mid g\in G\}$, ただし, $g\in G$ に対し ${}^gH=gHg^{-1}$, とする. 有限 G 集合 X に対し X を含む有限 G 集合の同型類を $[X]$, また, 有限集合 X に対し, $|X|$ で X の要素の個数とする. $\mathcal{D}$ を G のコレクションとする; $\mathcal{D}$ は G 共役の作用で閉じている G の部分群の族である. $\mathcal{D}$ の G 共役類全体の集合を $C(\mathcal{D})$ で表す; すなわち, $C(\mathcal{D})=\{(H)\mid H\in\mathcal{D}\}$. 本稿では, 任意の環 $\mathcal{O}$ は単位元を含むとし, $\mathcal{O}^\times$ は $\mathcal{O}$ の単数群を表すとする.

2 The generalized Burnside rings

G の通常 Burnside 環 $\Omega(G)$ の要素 $[G/H]$, ただし, H は $\mathcal{D}$ の要素とする, で生成された部分加群を $\Omega(G,\mathcal{D})$ で表す. $\Omega(G)$ は $\{[G/H]\mid(H)\in C(\mathcal{D})\}$ を基底にもつ自由 $\mathbb{Z}$ 加群である. 通常 Burnside 環 $\Omega(G)$ は, G のすべての部分群 $\mathrm{Sgp}(G)$ を用いて $\Omega(G,\mathrm{Sgp}(G))$ として定義される; すなわち, それはすべての有限 G 集合上で定義されるものである. この場合, 積は直積により定義される. $(S)\in C(\mathcal{D})$ に対し φ_S は, $\varphi_S([G/H]):=|(G/H)^S|=|\{gH\in G/H\mid S\leq{}^gH\}|$, ただし, $(G/H)^S$ は G 集合 G/H の S 固定点の集合,

* supported by JSPS KAKENHI Grant-in-Aid for Scientific Research (C) 25400003.

で定義される $\Omega(G,\mathcal{D})$ から $\mathbb{Z}$ への加法群としての準同型とする．$\mathcal{D}$ に関するマーク準同型

$$\varphi_{\mathcal{D}}:\Omega(G,\mathcal{D})\to\widetilde{\Omega}(G,\mathcal{D})$$

を $[X]\in\Omega(G,\mathcal{D})$，ただし $\widetilde{\Omega}(G,\mathcal{D})$ は $\mathbb{Z}$ の $|C(\mathcal{D})|$ 個の直積環，で定まる加法群としての準同型とする．行列 $(\varphi_{\mathcal{D}}([G/H]))_{(H)}$ は $\mathcal{D}$ に関する *table of marks* と呼ばれる．$\widetilde{\Omega}(G,\mathrm{Sgp}(G))$ を $\widetilde{\Omega}(G)$，$\Omega(G)$ から $\widetilde{\Omega}(G)$ へのマーク準同型を φ，これは環準同型である，と書く．マーク準同型 $\varphi_{\mathcal{D}}$ は余核

$$\mathrm{Coker}\varphi_{\mathcal{D}}\cong\prod_{(S)\in C(\mathcal{D})}(\mathbb{Z}/|WS|\mathbb{Z})$$

を持つ加法的準同型である ([Yo90, Lemma 3.3])．$\mathcal{O}$ 加群 $\mathcal{O}\otimes_{\mathbb{Z}}\Omega(G,\mathcal{D})$ は以下の 2 つの条件を満たすと仮定する：

(1) The map $\varphi_{\mathcal{D}}^{\mathcal{O}}:=1\otimes\varphi_{\mathcal{D}}:\mathcal{O}\otimes_{\mathbb{Z}}\Omega(G,\mathcal{D})\to\mathcal{O}\otimes_{\mathbb{Z}}\widetilde{\Omega}(G,\mathcal{D})$ is injective.

(2) The image $\mathrm{Im}(\varphi_{\mathcal{D}}^{\mathcal{O}})$ of $\mathcal{O}\otimes_{\mathbb{Z}}\Omega(G,\mathcal{D})$ by $\varphi_{\mathcal{D}}^{\mathcal{O}}$ is a unital subring of the commutative ring $\mathcal{O}\otimes_{\mathbb{Z}}\widetilde{\Omega}(G,\mathcal{D})$.

このとき $\mathcal{O}\otimes_{\mathbb{Z}}\Omega(G,\mathcal{D})$ は任意の要素 $x,y\in\mathcal{O}\otimes_{\mathbb{Z}}\Omega(G,\mathcal{D})$ に対し積 "$\bullet$" を $x\bullet y=(\varphi_{\mathcal{D}}^{\mathcal{O}})^{-1}(\varphi_{\mathcal{D}}^{\mathcal{O}}(x)\varphi_{\mathcal{D}}^{\mathcal{O}}(y))$ で定めることにより可換環になる．この環を $\mathcal{O}$ 上の G の部分群族 $\mathcal{D}$ に関する一般 *Burnside* 環と呼ぶ ([OS09, Theorem 1] の Definition 1 を参照のこと)．もし $\mathcal{O}\otimes_{\mathbb{Z}}\Omega(G,\mathcal{D})$ が GBR として実現されているならば，$\varphi_{\mathcal{D}}^{\mathcal{O}}:\mathcal{O}\otimes_{\mathbb{Z}}\Omega(G,\mathcal{D})\to\mathcal{O}\otimes_{\mathbb{Z}}\widetilde{\Omega}(G,\mathcal{D})$ は明らかに環準同型になる．本稿では，その環の係数環が $\mathbb{Z}$ のとき $\varphi_{\mathcal{D}}:=\varphi_{\mathcal{D}}^{\mathbb{Z}}$ と書く．$\mathcal{D}$ は共通部分をとる操作で閉じていて，G を含むならば，Yoshida により導入されたテクニカルな条件 $(\mathbf{C})_p$ または $(\mathbf{C})_\infty$ により $\Omega(G,\mathcal{D})$ は GBR になる [Yo90, 3.6, 3.11, 3.15]．さらにそれは $\Omega(G)$ の部分環である．よく知られているように S_n の Young 部分群の族 $\mathcal{Y}_n$ は，共通部分をとる操作で閉じていて，S_n を含むことが知られている．よって $\Omega(S_n,\mathcal{Y}_n)$ は GBR であり，$\Omega(S_n)$ の部分環である．この環はよく知られている．たとえば，[BBTH92] で紹介されている環の一つである．彼らはそれらの環を parabolic Burnside 環と呼んだ．

$\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}}\Omega(G,\mathcal{D})$ または $\Omega(G,\mathcal{D})$ の任意の要素 θ に対し，$(1\otimes\varphi_H)(\theta)$ を $\theta(H)$ と書く．

Lemma 2.1. *[Yo90, 4.3] If $\theta\in\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}}\Omega(G,\mathcal{D})$, then*

$$\theta=\sum_{(D)\in C(\mathcal{D})}\frac{1}{|WD|}\left(\sum_{H\in\mathcal{D}}\mu_{\mathcal{D}}(D,H)\theta(H)\right)[G/D],$$

where $\mu_{\mathcal{D}}$ is the Möbius function of the poset $(\mathcal{D},\leq)$.

3 The character rings

G を有限群とする．$\widehat{G}$ で G の線形指標の群を表す．複素数体上の G の指標環 $R(G)$ の単数群 $R(G)^\times$ のねじれ部分 $R(G)_t^\times$ が直積群 $\{\pm1\}\times\widehat{G}$ と同型であることがよく知られている．

以下の事実を準備する：

Lemma 3.1. *[Ya96, Lemma 2.2] Let G be a finite group. Then*

$$R(G)_t^\times\cong\{\pm1\}\times\widehat{G}.$$

4 The symmetric groups

[Yo90] において，Yoshida は GBR$\Omega(S_n,\mathcal{Y}_n)$ と S_n の指標環 $R(S_n)$ との間の同型の存在を証明するために，S_n の $\mathcal{Y}_n$ に関する GBR について論じた．その事実は [Dr86] において Dress により証明された．この節では，$\Omega(S_n,\mathcal{Y}_n)$，$R(S_n)$，そして $\widetilde{\Omega}(S_n,\mathcal{Y}_n)$ の関係について要約する．

自然数 n の分割 λ に対応する置換加群 M_λ は，S_n の Young 部分群 Y_λ の自明な加群を誘導して得られる $\mathbb{C}S_n$ 加群であうる．加群 M_λ は，いくつかの既約 $\mathbb{C}S_n$ 加群 S_λ の直和であり，もし，S_μ がその直和因子として現れているならば，$\lambda\leq\mu$ が成り立つ．*Kostka* 数 $K_{\lambda\mu}$ は置換加群 M_λ の直和分解に現れる同型を度外視した既約加群 S_μ の重複度として定義される．

$\pi : \Omega(S_n, \mathcal{Y}_n) \to R(S_n)$ は，$\pi([S_n/Y_\lambda]) = \chi_{M_\lambda}$，ただし，$\chi_{M_\lambda}$ は置換加群 M_λ が与える指標，で定義される環同型写像とする．この同型はよく知られている ([Dr86])．S_n の巡回部分群全体の族を $\mathcal{C}_n$ とする．このとき写像 $C \mapsto \overline{C}$，ただし，$\overline{C} = \cap\{Y \in \mathcal{Y}_n \mid C \subseteq Y\}$，は全単射 $\alpha : C(\mathcal{C}_n) \to C(\mathcal{Y}_n)$ を誘導する．

写像 α は環同型写像 $\widetilde{\alpha} : \widetilde{\Omega}(S_n, \mathcal{Y}_n) \to \widetilde{\Omega}(S_n, \mathcal{C}_n)$ を与える．$\widetilde{R}(S_n)$ で $\mathbb{Z}$ の $|c\ell(S_n)|$ 個の直積環とする．また，$(g) \mapsto (\langle g \rangle)$ で定義される写像 $\beta : c\ell(S_n) \to C(\mathcal{C}_n)$ は環同型写像 $\widetilde{\beta} : \widetilde{\Omega}(S_n, \mathcal{C}_n) \to \widetilde{R}(S_n)$ を誘導する．$\widetilde{\Omega}(S_n, \mathcal{Y}_n)$ と $\widetilde{R}(S_n)$ は，$\widetilde{\alpha} \circ \widetilde{\beta}$ を通して同一視してよい．S_n の任意の既約指標 χ に対し $\chi \mapsto (\chi(g))$ で定義される $R(S_n)$ から $\widetilde{R}(S_n)$ への単射環準同型写像を ν で表す．

同型写像 $\widetilde{\alpha} \circ \widetilde{\beta}$ を用いることにより，次の補題を得る．

Lemma 4.1. *Let $\varphi_{\mathcal{Y}_n}$ be the mark homomorphism with respect to $\mathcal{Y}_n$, π the ring isomorphism from $\Omega(S_n, \mathcal{Y}_n)$ to $R(S_n)$, and ν the injective homomorphism from $R(S_n)$ to $\widetilde{R}(S_n)$. Then $\varphi_{\mathcal{Y}_n} = \nu \circ \pi$.*

Remark 1. $\Omega(S_n, \mathcal{Y}_n)$ の基底の任意の要素 $[S_n/Y]$ に対し等式 $\varphi([S_n/Y]) = \nu \circ \pi([S_n/Y])$ が補題 4.1 より得られる．特に，$\varphi_{Y_g}([S_n/Y]) = \pi([S_n/Y])(g)$，ただし，$(g) \in c\ell(S_n)$，$(Y_g)$ は $C(\mathcal{Y}_n)$ に含まれる対応する要素 $(\alpha \circ \beta)((g))$ である．

5 Results

Theorem 5.1. *Let T be the table of marks with respect to $\mathcal{Y}_n$, K the Kostka matrix, and C the character table of the symmetric group S_n. Then*

$$T = KC.$$

Proof. (g) を $c\ell(S_n)$ の任意の要素，(Y_g) を対応する $C(\mathcal{Y}_n)$ の要素 $(\alpha \circ \beta)((g))$ とする．λ を n の一つの分割とする．$R(S_n)$ の中で $\pi([S_n/Y_\lambda]) = \sum_{\mu \vdash n} K_{\lambda\mu} S_\mu$ と書く．このとき，Lemma 4.1 により，任意の $(g) \in c\ell(S_n)$ に対し，

$$\begin{aligned} \varphi_{Y_g}([S_n/Y_\lambda]) &= \pi([S_n/Y_\lambda])(g) \\ &= \sum_{\mu \vdash n} K_{\lambda\mu} \chi_\mu(g), \end{aligned}$$

ただし，χ_μ は S_μ が与える既約指標，が成り立つ．この等式から定理が従う． □

ρ で $\Omega(S_n, \mathcal{Y}_n)$ から $R(S_n)$ への環同型 π の逆写像とする．I，ε をそれぞれ S_n の自明な指標，交代指標とする．

Corollary 5.2. *Let $\Omega(S_n, \mathcal{Y}_n)$ be the GBR with respect to the Young subgroups of S_n for $n \geq 2$. Then*

$$\Omega(S_n, \mathcal{Y}_n)^\times = \{\pm\rho(I), \pm\rho(\varepsilon)\}.$$

In particular,

$$\rho(\varepsilon) = \sum_{(Y) \in C(\mathcal{Y}_n)} \frac{1}{|WY|} \left(\sum_{H \in \mathcal{Y}_n} \mu_{\mathcal{Y}_n}(Y, H)\varepsilon(H) \right) [G/Y].$$

Proof. $\widehat{S_n} = \{I, \varepsilon\}$ が成り立つので，Lemma3.1 より $R(S_n)_t^\times \cong \{\pm I, \pm\varepsilon\}$ がわかる．$\Omega(S_n, \mathcal{Y}_n)$ は無限位数の単数を含まないので，同型 ρ より主張の前半部分が示される．Theorem 5.1 と Lemma 2.1 より等式を得る． □

環同型写像 φ の単射性より S_n の通常 Burnside 環の単数群 $\Omega(S_n)^\times$ は $\widetilde{\Omega}(S_n)^\times$，それは階数 $|C(S_n)|$ の基本可換 2 群である，の部分群であることが分かる．一般に，$\widetilde{\Omega}(S_n)^\times$ の階数は $|C(S_n)|$ とは等しくはない (たとえば [BP07, p.5] を参照のこと)．しかしながら，$n \geq 2$ に対し $\Omega(S_n)^\times$ が少なくとも 2 以上であることが，GBR $\Omega(S_n, \mathcal{Y}_n)$ が $\Omega(S_n)$ の部分環であることからわかる．

Corollary 5.3. *Let $\Omega(S_n)$ be the Burnside ring of S_n for $n \geq 2$. Then $\pm\rho(\varepsilon)$ is contained in $\Omega(S_n)^\times$. In particular, the rank of $\Omega(S_n)^\times$ is at least 2.*

参考文献

[BBTH92] Bergeron, F.; Bergeron, N.; Howlett, R.B.; Taylor, D.E.: *A Decomposition of the Descent Algebra of a Finite Coxeter Group*, J. Algebraic Combinatorics **1** (1992) 23–44.

[Bo07] Bouc, S.: *The functor of units of Burnside rings for p-groups*, Comm. Math. Helv. **82** (2007), 583–615.

[BP07] Boltje, R.; Pfeiffer, G.: *An algorithm for the unit group of the Burnside ring of a finite group* In: Groups St. Andrews 2005. Vol. 1. Cambridge: Cambridge Univ. Press (2007).

[Dr86] Dress, A.W.M.: *Congruence relations characterizing the representation ring of the symmetric group*, J. Algebra **101** (1986) no. 1, 350–364.

[Od08] Oda, F.: *The generalized Burnside ring with respect to p-centric subgroups*, J. Algebra **320** (2008), 3726–3732.

[OS09] Oda, F.; Sawabe, M.: *A collection of subgroups for the generalized Burnside ring*, Adv. Math. **222** (2009), 307–317.

[OS11] Oda, F.; Sawabe, M.: *The generalized Burnside rings with respect to a collection of self-normalizing subgroups*, J. Algebra **334** (2011), 219–231.

[OY01] Oda, F.; Yoshida, T.:*On the generalized Burnside ring with respect to the Young subgroups of the symmetric group*, J. Algebra **236** (2001), 349–354.

[Ya96] Yamauchi, K, On the Structure of the Character Ring of a Finite Group, PhD thesis, Kyushu University (1996).

[Yo90] Yoshida, T.: *The generalized Burnside ring of a finite group*, Hokkaido Math. J. **19** (1990), 509–574.