数理解析研究所講究録
第 1965 巻 2015 年 13-20

頂点作用素代数 $\mathrm{Com}_{(\mathcal{L}_{\widehat{\mathrm{sl}}_2}(1,0)^{\otimes 4})^{\tau}}(\mathcal{L}_{\widehat{\mathrm{sl}}_2}(4,0))$ の既約加群の分類について

安部　利之（愛媛大学）[1]

1　序

頂点作用素代数のいくつかのコピーのテンソル積には，そのテンソル因子の置換によって自己同型が引き起こされる．この置換の引き起こす自己同型達の固定点として得られる部分頂点作用素代数（オービフォールド模型）を置換オービフォールド模型という．本稿の目的はレベル 1 アフィン頂点作用素代数のテンソル積 $\mathcal{L}_{\widehat{\mathrm{sl}}_2}(1,0)^{\otimes 4}$ の置換 $\tau=(1\,2\,3\,4)$ に対する置換オービフォールド模型における, レベル 4 アフィン頂点作用素代数 $\mathcal{L}_{\widehat{\mathrm{sl}}_2}(4,0)$ のコミュタント $\mathrm{Com}_{(\mathcal{L}_{\widehat{\mathrm{sl}}_2}(1,0)^{\otimes 4})^{\tau}}(\mathcal{L}_{\widehat{\mathrm{sl}}_2}(4,0))$ の既約加群の分類について解説することである.

アフィン頂点作用素代数 $\mathcal{L}_{\widehat{\mathrm{sl}}_2}(1,0)$ の l 個のコピーのテンソル積 $\mathcal{L}_{\widehat{\mathrm{sl}}_2}(1,0)^{\otimes l}$ は自然にレベル l アフィン頂点作用素代数 $\mathcal{L}_{\widehat{\mathrm{sl}}_2}(l,0)$ を部分頂点代数として含む. $l\geq 2$ のときには, $\mathcal{L}_{\widehat{\mathrm{sl}}_2}(l,0)$ のヴィラソロ元と $\mathcal{L}_{\widehat{\mathrm{sl}}_2}(1,0)^{\otimes l}$ のヴィラソロ元は一致せず, コミュタントと呼ばれる部分頂点作用素代数

$$\mathcal{M}:=\mathrm{Com}_{\mathcal{L}_{\widehat{\mathrm{sl}}_2}(1,0)^{\otimes l}}(\mathcal{L}_{\widehat{\mathrm{sl}}_2}(l,0))$$

が現れる. 今, $\mathcal{L}_{\widehat{\mathrm{sl}}_2}(1,0)^{\otimes l}$ の巡回置換 $(1\,2\cdots l)$ の引き起こす自己同型 τ を考えると, 置換オービフォールド模型 $(\mathcal{L}_{\widehat{\mathrm{sl}}_2}(1,0)^{\otimes l})^{\tau}$ もまた $\mathcal{L}_{\widehat{\mathrm{sl}}_2}(4,0)$ を部分頂点作用素代数として含み, τ が M の自己同型を誘導することがわかる. そのオービフォールド模型 $\mathcal{M}^{\langle\tau\rangle}$ を以下 $\mathcal{M}^{\tau}$ と表す. 定義より

$$\mathcal{M}^{\tau}=\mathrm{Com}_{(\mathcal{L}_{\widehat{\mathrm{sl}}_2}(1,0)^{\otimes l})^{\tau}}(\mathcal{L}_{\widehat{\mathrm{sl}}_2}(l,0))$$

である.

各 l 対する $\mathcal{M}^{\tau}$ の構造については, $l=2$ のときはコミュタントは中心電荷 1/2 の単純ヴィラソロ頂点作用素代となり，その構造や表現論は非常によく知られている. また $l=3$ のときは中心電荷は 6/5 であるが, この場合には [DLTYY04] によって構造や表現論が調べられている. $l=4$ の場合は, 2014 年 3 月に京都大学数理解析研究所にて行われた研究集会「有限群とその表現，頂点作用素代数，代数的組合せ論の研究」の報告集および [AY14] にその構造について解説した. $l\geq 5$ の場合は, まだよく知られていない.

$l=4$ の場合の $\mathcal{M}^{\tau}$ は, ある二つの階数 1 の格子頂点作用素代数のテンソル積 $V_{\mathbb{Z}\alpha}\otimes V_{\mathbb{Z}\beta}$ とあるクライン 4-群に同型な自己同型群 K を考えたときに得られるオービフォールド模型 $(V_{\mathbb{Z}\alpha}\otimes V_{\mathbb{Z}\beta})^{K}$ との同型となる. この自己同型群 K は, 任意の正定値偶格子 $\mathbb{Z}\alpha$, $\mathbb{Z}\beta$ に対し, 頂点作用素代数 $V_{\mathbb{Z}\alpha}\otimes V_{\mathbb{Z}\beta}$ の自己同型群としても定義されるが, 本稿では, そのオービフォールド模型 $(V_{\mathbb{Z}\alpha}\otimes V_{\mathbb{Z}\beta})^{K}$

[1]本研究は学術研究助成基金助成金若手研究 (B) 23740022 の助成を受けたものである.

の既約加群の分類について解説する．従って，その一つの場合として我々のコミュタントの既約加群の分類が得られる．

講演時の発表内容には一部計算ミスによる誤りが含まれていたので，本稿ではその誤りを訂正した．誤った内容について発表したことについてこの場を借りてお詫びいたします．

本研究成果は山田裕理氏との共同研究に基づくものである．

2 頂点作用素代数 $\mathcal{M}^\tau$

$l=4$ の場合の $\mathcal{M}^\tau$ について考える．この場合，$M\tau$ の中心電荷 は 2 であるが，実際には中心電荷 1 の単純 Virasoro 頂点作用素代数 $L(1,0)$ のテンソル積 $L(1,0)\otimes L(1,0)$ を含んでいる．この事実を元に $\mathcal{M}^\tau$ は $V_{\mathbb{Z}x}^+\otimes V_{\mathbb{Z}y}^+$ の形の頂点作用素代数が $\mathcal{M}^\tau$ に含まれているのではないかと予想し，実際にそうであることを証明した．

定理 2.1. ([AY14]) $l=4$ のとき，$\mathcal{M}^\tau$ は頂点作用素代数として $(V_{\mathbb{Z}\alpha}\otimes V_{\mathbb{Z}\beta})^K$ と同型である．ただし $\mathbb{Z}\alpha$, $\mathbb{Z}\beta$ はそれぞれ $\langle\alpha,\alpha\rangle=12$, $\langle\beta,\beta\rangle=4$ で定まる階数 1 の偶格子である．また K は $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ に同型なある $V_{\mathbb{Z}\alpha}\otimes V_{\mathbb{Z}\beta}$ の自己同型群である．

定理における群 K の記述は次節で行う．この定理により，$\mathcal{M}^\tau$ の既約加群の分類は $(V_{\mathbb{Z}\alpha}\otimes V_{\mathbb{Z}\beta})^K$ の既約加群の分類に帰着されることがわかる．そこで格子の生成元 α,β が

$$\langle\alpha,\alpha\rangle=2a,\quad \langle\beta,\beta\rangle=2b,\quad (a,b\in\mathbb{Z}_{>0}) \tag{2.1}$$

を満たす場合に拡張し，$\mathcal{M}^\tau$ に限らず，(2.1) を満たす α,β に対し，$(V_{\mathbb{Z}\alpha}\otimes V_{\mathbb{Z}\beta})^K$ の既約加群の分類を考察した．その分類の過程ににおいて，中心となるのは単純カレント拡大の理論 (cf. [Ymu04]) であり，例えばその理論から $(V_{\mathbb{Z}\alpha}\otimes V_{\mathbb{Z}\beta})^K$ の既約加群は，ある $g\in K$ に対し，既約 g-twisted $V_{\mathbb{Z}\alpha}\otimes V_{\mathbb{Z}\beta}$-加群に現れるなど重要な性質が導かれる．単純カレント拡大の定義については後で述べる．また単純カレント拡大の理論から $(V_{\mathbb{Z}\alpha}\otimes V_{\mathbb{Z}\beta})^K$ が有理的であることも導かれる．

3 $(V_{\mathbb{Z}\alpha}\otimes V_{\mathbb{Z}\beta})^K$ の構造

この節では，群 K の定義とオービフォールド模型 $(V_{\mathbb{Z}\alpha}\otimes V_{\mathbb{Z}\beta})^K$ の単純カレント拡大の理論の観点からの構造について解説する．ただし α,β は (2.1) を満たすものとする．

階数 1 の格子頂点作用素代数 $V_{\mathbb{Z}\alpha}$ には次の二種類の位数 2 の自己同型 I, θ が存在する．I は内部自己同型と呼ばれるもので

$$I=\exp\left(\frac{\pi\sqrt{-1}}{2a}\alpha(0)\right)$$

で定義される．また θ は L の -1-等長変換 $\alpha \to -\alpha$ の持ち上げとして得られる自己同型である ([FLM88])．I と θ は可換であり，それらは $\mathrm{Aut}\,(V_{\mathbb{Z}\alpha})$ のクライン 4-群と同型な部分群を生成する．$V_{\mathbb{Z}\beta}$ についても同様の I, θ を考え，$V_{\mathbb{Z}\alpha} \otimes V_{\mathbb{Z}\beta}$ の自己同型

$$g_1 := I \otimes I\theta, \quad g_2 := I\theta \otimes I, \quad g_3 := g_1 g_2 = \theta \otimes \theta$$

を定義する．更にこれらで生成される群を K とする．明らかに K もクライン 4-群と同型である．

次に I および θ に関する $V_{\mathbb{Z}\alpha}$ のオービフォールド模型について思い出す．まず $(V_{\mathbb{Z}\alpha})^{\langle I\rangle} = V_{\mathbb{Z}2\alpha}$ となるので，$(V_{\mathbb{Z}\alpha})^{\langle I\rangle}$ は有理的であり，その既約加群の分類も知られている (cf. [D93])．

定理 3.1. $(V_{\mathbb{Z}\alpha})^{\langle I\rangle}$ は有理的，C_2-有限な CFT 型の頂点作用素代数で，その既約加群は $V_{\mathbb{Z}2\alpha+\frac{i}{4a}\alpha}$ $(0 \le i \le 8a-1)$ のいずれかに同型である．ただし $\langle \alpha, \alpha \rangle = 2a$ $(a \in \mathbb{Z}_{>0})$ とおいた．またすべての既約加群は単純カレントである．

既約 $V_{\mathbb{Z}\alpha}$-加群や既約 I-twisted 加群は，これらの既約加群 $V_{\mathbb{Z}2\alpha+\frac{i}{4a}\alpha}$ の二つの直和で表される．$0 \le i \le 4a-1$ に対し，$V_{\mathbb{Z}\alpha+\frac{i}{4a}\alpha} = V_{\mathbb{Z}2\alpha+\frac{i}{4a}\alpha} \oplus V_{\mathbb{Z}2\alpha+\frac{4a+i}{4a}\alpha}$ は，i が偶数のとき，既約 $V_{\mathbb{Z}\alpha}$-加群を与え，i が奇数のとき，I-twisted $V_{\mathbb{Z}\alpha}$-加群を与える．任意の既約 $V_{\mathbb{Z}\alpha}$-加群および I-twisted $V_{\mathbb{Z}\alpha}$-加群はこれらのいずれかに同値となる．

$V_{\mathbb{Z}\alpha}^{+} := V_{\mathbb{Z}\alpha}^{\langle\theta\rangle}$ に関しては，I の場合より話が複雑になる．まず θ-twisted $V_{\mathbb{Z}\alpha}$ 加群については同型を除き 2 個存在してそれぞれ，$V_{\mathbb{Z}\alpha}^{T_i}$ $(i = 0, 1)$ と表される．ここで $T_i = \mathbb{C}t_i$ は群環 $\mathbb{C}[\mathbb{Z}\alpha] = \oplus_{m\in\mathbb{Z}}\mathbb{C}e^{m\alpha}$ の既約加群であり，$i = 0$ のときは自明な加群，$i = 1$ のときには $e^{m\alpha}t_1 = (-1)^m t_1$ を満たす既約加群である．このとき θ-twisted 加群 $V_{\mathbb{Z}\alpha}^{T_i}$ は T_i に付随して構成される (cf. [FLM88], [D94])．これらの twisted 加群の L_0-重みは，$\frac{1}{16} + \frac{n}{2}$ $(n \in \mathbb{Z}_{\ge 0})$ であり，$V_{\mathbb{Z}\alpha}^{T_i,+}$, $V_{\mathbb{Z}\alpha}^{T_i,-}$ をそれぞれ重み $\frac{1}{16} + n$ $(n \in \mathbb{Z}_{\ge 0})$, $\frac{9}{16} + n$ $(n \in \mathbb{Z}_{\ge 0})$ で次数付けされる部分空間とすれば，$V_{\mathbb{Z}\alpha}^{T_i,\pm}$ が既約な $V_{\mathbb{Z}\alpha}^{+}$ の既約加群を与える．一方，既約 (untwisted) $V_{\mathbb{Z}\alpha}$-加群は $V_{\mathbb{Z}\alpha+\frac{i}{2a}\alpha}$, $(0 \le i \le 2a-1)$ で与えられるが，$i = a$ を境に $V_{\mathbb{Z}\alpha+\frac{i}{2a}\alpha}$ と $V_{\mathbb{Z}\alpha+\frac{2a-i}{2a}\alpha}$ が $V_{\mathbb{Z}\alpha}^{+}$-加群として同型となる．境目の部分 $V_{\mathbb{Z}\alpha}$ と $V_{\mathbb{Z}\alpha+\frac{\alpha}{2}}$ は二つの既約加群に分解しており，それぞれの既約成分を以下 $V_{\mathbb{Z}\alpha}^{\pm}$, $V_{\mathbb{Z}\alpha+\frac{\alpha}{2}}^{\pm}$ と表す．このとき既約 $V_{\mathbb{Z}\alpha}^{+}$-加群はこれらの既約加群のいずれかと同型になる．

定理 3.2. ([Abe05], [Yms04], [DN99]) $V_{\mathbb{Z}\alpha}^{+}$ は有理的，C_2-有限な CFT 型の頂点作用素代数で，その既約加群は $V_{\mathbb{Z}\alpha}^{\pm}$, $V_{\mathbb{Z}\alpha+\frac{i}{2a}\alpha}$ $(1 \le i \le a-1)$, $V_{\mathbb{Z}\alpha+\frac{\alpha}{2}}^{\pm}$, $V_{\mathbb{Z}\alpha}^{T_0,\pm}$, $V_{\mathbb{Z}\alpha}^{T_1,\pm}$ のいずれかに同型である．ただし $\langle \alpha, \alpha \rangle = 2a$ $(a \in \mathbb{Z}_{>0})$ とおいた．これらのうち，$V_{\mathbb{Z}\alpha}^{\pm}$, $V_{\mathbb{Z}\alpha+\frac{\alpha}{2}}^{\pm}$ のみが単純カレントである．

次に $(V_{\mathbb{Z}\alpha} \otimes V_{\mathbb{Z}\beta})^K$ について考える．K の定義より，$(V_{\mathbb{Z}\alpha} \otimes V_{\mathbb{Z}\beta})^K$ には $V_{\mathbb{Z}2\alpha}^{+} \otimes V_{\mathbb{Z}2\beta}^{+}$ が部分頂点作用素代数として含まれていることがわかる．また定理 3.2 より，$V_{\mathbb{Z}2\alpha}^{+} \otimes V_{\mathbb{Z}2\beta}^{+}$ は有理的，C_2-有限な CFT 型の頂点作用素代数であ

ることがわかる．従ってその加群は完全可約であるが，特に $(V_{\mathbb{Z}\alpha}\otimes V_{\mathbb{Z}\beta})^K$ は $V_{\mathbb{Z}2\alpha}^{+}\otimes V_{\mathbb{Z}2\beta}^{+}$-加群として，

$$
\begin{aligned}
&(V_{\mathbb{Z}\alpha}\otimes V_{\mathbb{Z}\beta})^K \\
&\quad = V_{\mathbb{Z}2\alpha}^{+}\otimes V_{\mathbb{Z}2\beta}^{+}\oplus V_{\mathbb{Z}2\alpha+\alpha}^{-}\otimes V_{\mathbb{Z}2\beta}^{-}\oplus V_{\mathbb{Z}2\alpha}^{-}\otimes V_{\mathbb{Z}2\beta+\beta}^{-}\oplus V_{\mathbb{Z}2\alpha+\alpha}^{+}\otimes V_{\mathbb{Z}2\beta+\beta}^{+}
\end{aligned}
$$

と分解する．更に各成分 $V_{\mathbb{Z}2\alpha}^{+}\otimes V_{\mathbb{Z}2\beta}^{+}$, $V_{\mathbb{Z}2\alpha+\alpha}^{-}\otimes V_{\mathbb{Z}2\beta}^{-}$, $V_{\mathbb{Z}2\alpha}^{-}\otimes V_{\mathbb{Z}2\beta+\beta}^{-}$, $V_{\mathbb{Z}2\alpha+\alpha}^{+}\otimes V_{\mathbb{Z}2\beta+\beta}^{+}$ は $V_{\mathbb{Z}2\alpha}^{+}\otimes V_{\mathbb{Z}2\beta}^{+}$-加群として単純カレントとなっていることもわかる (cf. [Abe01])．従って [Ymu04, Theorem 2.14] より，次の定理を得る．

定理 3.3. 頂点作用素代数 $(V_{\mathbb{Z}\alpha}\otimes V_{\mathbb{Z}\beta})^K$ は有理的，C_2-有限な *CFT* 型の頂点作用素代数である．

ここで単純カレントと量子次元について簡単に説明する．以下 V を有理的，C_2-有限な CFT 型の頂点作用素代数とする．V に関する単純カレントとは既約 V-加群 M であって，M によるフュージョン積が既約加群の同値類の間の置換を引き起こすもののことである．V が (有限) アーベル群 D で次数付けされる，つまり $V=\oplus_{\gamma\in D}V^{\gamma}$ であって，V^{γ} と $V^{\gamma'}$ の元のすべての n 積が $V^{\gamma+\gamma'}$ に含まれていて，更に V^0 に関して各 V^{γ} が V^0 に関する単純カレントとなるとき V を V^0 上の単純カレント拡大と呼ぶ (詳しくは [Ymu04] を参照)．

また V-加群 M について，その指標を $\mathrm{ch}_M(\tau)=\mathrm{tr}_M e^{2\pi\sqrt{-1}\tau(L_0-\frac{c}{24})}$ としたとき，

$$
\mathrm{qdim}_V M=\lim_{y\to\infty}\frac{\mathrm{ch}_M(\sqrt{-1}y)}{\mathrm{ch}_V(\sqrt{-1}y)}
$$

を V 上の M の量子次元という．ただし c は V の中心電荷である．この量子次元は (存在すれば) 1 以上の実数値をとり，(テクニカルな条件の元では) 1 であることと M が V-加群として単純カレントであることとが同値である．更に直和とフュージョン積を保つことも知られている (詳しくは [DJX13] を参照)．本報告に現れる頂点作用素代数はテクニカルな条件を満たしており，単純カレントであることの証拠として量子次元を用いることができる．最近では量子次元はフュージョン則の決定の際にも非常に有効に用いられている．

Remark 3.4. [DJX13] の量子次元の理論は Verlinde 公式の成立が大前提にあるので，単純カレントであることの直接的な証明を与えているわけではない．

今 V が有理的，C_2-有限な CFT 型の頂点作用素代数とし，G をその有限自己同型群とする．更に任意の $g\in G$ に対し，g-twisted 加群は完全可約であるとする．このとき任意の既約指標 χ と対応する既約 G-加群 W_{χ} について，既約指標 χ を持つ V の既約加群全体の和を $V_{\chi}\otimes W_{\chi}\subset V$ と表すと，V_{χ} は 0 ではなく一つの既約 V^G-加群を与えることが知られている ([DM97])．この既約加群 V_{χ} の量子次元は既約次数 $\chi(1)$ (1 は G の単位元) で与えられる ([DJX13, Theorem 6.3])．特に G が可換であり，V^G が有理的，C_2-有限な CFT 型であれば，V_{χ} は V^G に関する単純カレントであって，V は V^G の単純カレント拡大となることがわかる．

以上の事実を用いると次の結果を得る．

定理 3.5. 頂点作用素代数 $V_{\mathbb{Z}\alpha}\otimes V_{\mathbb{Z}\beta}$ は $(V_{\mathbb{Z}\alpha}\otimes V_{\mathbb{Z}\beta})^K$-加群として単純カレント拡大である．また既約 $(V_{\mathbb{Z}\alpha}\otimes V_{\mathbb{Z}\beta})^K$-加群はある $g\in K$ に対し，既約 *g-twisted* $V_{\mathbb{Z}\alpha}\otimes V_{\mathbb{Z}\beta}$-加群の既約成分として得られる．

4 既約 $(V_{\mathbb{Z}\alpha}\otimes V_{\mathbb{Z}\beta})^K$-加群の分類

既約 $(V_{\mathbb{Z}\alpha}\otimes V_{\mathbb{Z}\beta})^K$-加群の分類を次のステップで実行する．
(Step 1) $g\in K$ に対し，g-twisted $V_{\mathbb{Z}\alpha}\otimes V_{\mathbb{Z}\beta}$-加群を分類する．
(Step 2) 各 g-twisted $V_{\mathbb{Z}\alpha}\otimes V_{\mathbb{Z}\beta}$-加群を $(V_{\mathbb{Z}\alpha}\otimes V_{\mathbb{Z}\beta})^K$-加群の直和に分解する．
(Step 3) Step 2 で得られた既約直和因子を $(V_{\mathbb{Z}\alpha}\otimes V_{\mathbb{Z}\beta})^K$-加群としての同値関係で割る．

Step 1 に関して，$g=g_1\otimes g_2$ のとき，g-twisted $V_{\mathbb{Z}\alpha}\otimes V_{\mathbb{Z}\beta}$-加群は g_1-twisted $V_{\mathbb{Z}\alpha}$-加群と g_2-twisted $V_{\mathbb{Z}\beta}$-加群のテンソル積で表される． 従って $V_{\mathbb{Z}\alpha}$ の I-twisted 加群，θ-twisted 加群および $I\theta$-twisted 加群を分類すれば良い．前節では untwisted 加群，I-twisted 加群，θ-twisted 加群の分類について解説した．$I\theta$-twisted 加群については，まず $V_{\mathbb{Z}\alpha}$ の位数 4 の自己同型

$$I^{\pm\frac{1}{2}}=\exp\left(\pm\frac{\pi\sqrt{-1}}{4a}\alpha(0)\right)$$

を考える．$I^{\frac{1}{2}}$ は θ と非可換で，$I^{\frac{1}{2}}\theta I^{-\frac{1}{2}}=I\theta$ を満たす．従って $I\theta$ は Aut $V_{\mathbb{Z}\alpha}$ において，θ と共役であり，$I\theta$-twisted 加群の圏と θ-twisted 加群の圏は同値であることが導かれる．具体的には θ-twisted 加群 M に $I\theta$-twisted 加群 $I^{\frac{1}{2}}\circ M$ を対応させる関手が圏同値を与える．ここで一般に h-twisted 加群 (M,Y_M) と自己同型 g に対し，$g\circ M$ は M 上の頂点作用素写像を $Y_{g\circ M}(a,z)=Y_M(g(a),z)$ に変えたものである．これは ghg^{-1}-twisted 加群となる．

以上より次の定理を得る．

定理 4.1. 任意の $g\in K$ に対し，*g-twisted* $V_{\mathbb{Z}\alpha}\otimes V_{\mathbb{Z}\beta}$-加群は以下で与えられる*:*

(M1) (untwisted 加群) $V_{\mathbb{Z}\alpha+\lambda_r}\otimes V_{\mathbb{Z}\beta+\mu_s}$ $(0\le r\le 2a-1,\ 0\le s\le 2b-1)$.

(M2) (g_1-twisted 加群) $V_{\mathbb{Z}\alpha+\lambda_r+\frac{1}{4a}\alpha}\otimes I^{\frac{1}{2}}\circ V_{\mathbb{Z}\beta}^{T_i}$ $(0\le r\le 2a-1,\ i=0,1)$.

(M3) (g_2-twisted 加群) $I^{\frac{1}{2}}\circ V_{\mathbb{Z}\alpha}^{T_i}\otimes V_{\mathbb{Z}\beta+\mu_s+\frac{1}{4b}\beta}$ $(i=0,1,\ 0\le s\le 2b-1)$.

(M4) (g_3-twisted 加群) $V_{\mathbb{Z}\alpha}^{T_i}\otimes V_{\mathbb{Z}\beta}^{T_j}$ $(i,j=0,1)$.

ただし $\lambda_r=\frac{r}{2a}\alpha$, $\mu_s=\frac{s}{2b}\beta$ とおいた．

次にこれらの $(V_{\mathbb{Z}\alpha}\otimes V_{\mathbb{Z}\beta})^K$-加群としての分解を考えるが，そのためには次の補題が役に立つ．この補題は [DM97] の拡張である．

補題 4.2. V を単純頂点作用素代数，g,h を互いに可換な有限位数の自己同型とする．また M を既約 *h-twisted* V-加群とする．g の位数が素数であるとき，次が成り立つ．

(1) $g \circ M$ と M が V-非同値であれば, M は $V^{\langle g \rangle}$-加群として既約である.

(2) $g \circ M$ と M が V-同値であれば, 同型 $\widetilde{g}: M \xrightarrow{\sim} g \circ M (= M)$ の固有空間は $V^{\langle g \rangle}$-加群として既約である. 更に異なる固有値に属する固有空間は $V^{\langle g \rangle}$-加群として互いに非同値である.

今 $h \in K$ と h-twisted $V_{\mathbb{Z}\alpha} \otimes V_{\mathbb{Z}\beta}$-加群 M に対し,

$$G_M = \{g \in K | g \circ M \cong M\}$$

と定めると, G_M は K の部分群である. よって G_M が巡回群であれば補題 4.2 が適用できる. 以下 G_M が巡回群となるような twisted 加群を挙げる.

(i) G_M が自明になる場合には, (M1) の $V_{\mathbb{Z}\alpha+\lambda_r} \otimes V_{\mathbb{Z}\beta+\mu_s}$ $(r \neq 0, a,\ s \neq 0, b)$ が該当する. 従ってこの場合は V^K-加群として既約である. 任意の $g \in K - \{1\}$ に対し, $g \circ M \ncong M$ であるが, これは $(V_{\mathbb{Z}\alpha} \otimes V_{\mathbb{Z}\beta})^K$-加群としての非自明な同値関係 $g \circ M \cong M$ を与える. この同値関係に関する同値類の代表は $V_{\mathbb{Z}\alpha+\lambda_r} \otimes V_{\mathbb{Z}\beta+\mu_s}$ $(1 \leq r \leq a-1,\ 1 \leq s \leq b-1)$ で与えられる.

(ii) $G_M = \langle g \rangle$ $(g \in K - \{1\})$ となる場合には, (M1) の $V_{\mathbb{Z}\alpha+\lambda_r} \otimes V_{\mathbb{Z}\beta+\mu_s}$ $(r = 0, a,\ s \neq 0, b$ または $r \neq 0, a,\ s = 0, b)$, または (M2), (M3), (M4) の twisted 加群が該当する. この場合は $K = \{1, g, g', g''\}$ とすると, h-twisted 加群としては $g' \circ M \ncong M$, $g'' \circ M \ncong M$ であるが, $(V_{\mathbb{Z}\alpha} \otimes V_{\mathbb{Z}\beta})^K$-加群としては $M \cong g' \circ M \cong g'' \circ M$ である. 従って, g' または g'' によって非自明な同値関係が得られる. その同値関係による同値類の代表の一つを M とすれば, M は二つの既約 $(V_{\mathbb{Z}\alpha} \otimes V_{\mathbb{Z}\beta})^K$-加群に分解する. それらを便宜上 $\mathcal{M}^{\pm}$ と表す. ただ $\pm$ の指定は自然に与えられているわけではなく M から $g \circ M$ への線形同型 $\widetilde{g}$ で $\widetilde{g}(Y(a,z)u) = Y(g(a),z)\widetilde{g}(u)$ を満たすものの取り方に依存する.

以上の (i), (ii) の場合でほとんどの場合がつきているが, 次の場合が残っている.

(iii) $G_M = K$ の場合. この場合に該当するのは (M1) の $V_{\mathbb{Z}\alpha+\lambda_r} \otimes V_{\mathbb{Z}\beta+\mu_s}$ $(r = 0, a,\ s = 0, b)$ である. この場合には, $\widetilde{g}_1 : M \xrightarrow{\sim} g_1 \circ M$, $\widetilde{g}_2 : M \xrightarrow{\sim} g_2 \circ M$ をそれぞれ適切にとると, $M = V_{\mathbb{Z}\alpha} \otimes V_{\mathbb{Z}\beta}$ または $M = V_{\mathbb{Z}\alpha+\frac{\alpha}{2}} \otimes V_{\mathbb{Z}\beta+\frac{\beta}{2}}$ の場合には $\langle \widetilde{g}_1, \widetilde{g}_2 \rangle$ が可換となるようにできる. 従って補題 4.2 を繰り返し使うと, M は 4 つの既約な $(V_{\mathbb{Z}\alpha} \otimes V_{\mathbb{Z}\beta})^K$-加群 $\mathcal{M}^{(\epsilon,\epsilon')}$, $(\epsilon, \epsilon' \in \{\pm\})$ に分解されることがわかる.

一方 $M = V_{\mathbb{Z}\alpha} \otimes V_{\mathbb{Z}\beta+\frac{\beta}{2}}$ または $M = V_{\mathbb{Z}\alpha+\frac{\alpha}{2}} \otimes V_{\mathbb{Z}\beta}$ の場合には $\langle \widetilde{g}_1, \widetilde{g}_2 \rangle \cong D_8$ にすることができるが, 可換にはならない.[2] このとき, D_8 の次数 2 の既約指標 χ と対応する二次元既約加群 W_χ を用いて, $M = M_\chi \otimes W_\chi$ と表される. この M_χ が既約 $(V_{\mathbb{Z}\alpha} \otimes V_{\mathbb{Z}\beta})^K$-加群であることは $V^+_{\mathbb{Z}2\alpha} \otimes V_{\mathbb{Z}2\beta}$-加群としての分解を見ることで証明できる.

[2]講演ではこの場合も可換の場合に含めて考えていたため, この場合の既約加群への分解を誤って報告してしまいました.

定理 4.3. 既約な $(V_{\mathbb{Z}\alpha}\otimes V_{\mathbb{Z}\beta})^K$-加群は次のいずれかに同型である.

$$
\begin{aligned}
&V_{\mathbb{Z}\alpha+\lambda_r}\otimes V_{\mathbb{Z}\beta+\mu_s} \quad (1\le r\le a-1,\ 1\le s\le b-1),\\
&(V_{\mathbb{Z}\alpha}\otimes V_{\mathbb{Z}\beta+\mu_s})^{\pm},\quad (V_{\mathbb{Z}\alpha+\frac{\alpha}{2}}\otimes V_{\mathbb{Z}\beta+\mu_s})^{\pm}\quad (1\le s\le b-1),\\
&(V_{\mathbb{Z}\alpha+\lambda_r}\otimes V_{\mathbb{Z}\beta})^{\pm},\quad (V_{\mathbb{Z}\alpha+\lambda_r}\otimes V_{\mathbb{Z}\beta+\frac{\beta}{2}})^{\pm}\quad (1\le r\le a-1),\\
&(V_{\mathbb{Z}\alpha}\otimes V_{\mathbb{Z}\beta})^{(\epsilon,\epsilon')},\quad (V_{\mathbb{Z}\alpha+\frac{\alpha}{2}}\otimes V_{\mathbb{Z}\beta+\frac{\beta}{2}})^{(\epsilon,\epsilon')}\quad (\epsilon,\epsilon'=\pm),\\
&(V_{\mathbb{Z}\alpha}\otimes V_{\mathbb{Z}\beta+\frac{\beta}{2}})_{\chi},\quad (V_{\mathbb{Z}\alpha+\frac{\alpha}{2}}\otimes V_{\mathbb{Z}\beta})_{\chi},\\
&(V_{\mathbb{Z}\alpha+\lambda_r+\frac{1}{4a}\alpha}\otimes I^{\frac{1}{2}}\circ V_{\mathbb{Z}\beta}^{T_0})^{\pm}\quad (0\le r\le 2a-1),\\
&(I^{\frac{1}{2}}\circ V_{\mathbb{Z}\alpha}^{T_0}\otimes V_{\mathbb{Z}\beta+\mu_s+\frac{1}{4b}\beta})^{\pm}\quad (0\le s\le 2b-1),\\
&(V_{\mathbb{Z}\alpha}^{T_0}\otimes V_{\mathbb{Z}\beta}^{T_j})^{\pm},\quad (j=0,1).
\end{aligned}
$$

またこれらの既約加群は $(V_{\mathbb{Z}\alpha}\otimes V_{\mathbb{Z}\beta})^K$-加群として互いに非同値である.

Step 3 に関して, 定理 4.3 にある既約加群が $(V_{\mathbb{Z}\alpha}\otimes V_{\mathbb{Z}\beta})^K$-加群として互いに非同値であることは, ほとんどの場合, 補題 4.2 と $V_{\mathbb{Z}2\alpha}^{+}\otimes V_{\mathbb{Z}2\beta}^{+}$-加群としての既約加群分解を調べることで証明できる. しかし, $(V_{\mathbb{Z}\alpha}^{T_0}\otimes V_{\mathbb{Z}\beta}^{T_0})^{\epsilon}$ と $(V_{\mathbb{Z}\alpha}^{T_0}\otimes V_{\mathbb{Z}\beta}^{T_1})^{\epsilon}$ は $V_{\mathbb{Z}2\alpha}^{+}\otimes V_{\mathbb{Z}2\beta}^{+}$-加群として同値であるので, この観点からは証明できない. この場合には, 加群の構成からわかる具体的な $(V_{\mathbb{Z}\alpha}\otimes V_{\mathbb{Z}\beta})^K$ の作用を見ることによって非同値であることが証明できる.

それぞれの量子次元をリストアップしておく. その計算は $V_{\mathbb{Z}2\alpha}^{+}\otimes V_{\mathbb{Z}2\beta}^{+}$-加群として分解し, [DXY14] で与えられている $V_{\mathbb{Z}\alpha}^{+}$ の既約加群達の量子次元を用いると容易に計算できる. 具体的には可換な自己同型群 G について, V-加群 M を V^G-加群とみたとき, $\mathrm{qdim}_{V^G}M=|G|\mathrm{qdim}_V M$ であることと, 単純カレントのフュージョン積は量子次元を不変にするという事実を用いる.

既約加群	量子次元
$V_{\mathbb{Z}\alpha+\lambda_r}\otimes V_{\mathbb{Z}\beta+\mu_s}$	4
$(V_{\mathbb{Z}\alpha}\otimes V_{\mathbb{Z}\beta+\mu_s})^{\pm}$, $(V_{\mathbb{Z}\alpha+\frac{\alpha}{2}}\otimes V_{\mathbb{Z}\beta+\mu_s})^{\pm}$	2
$(V_{\mathbb{Z}\alpha+\lambda_r}\otimes V_{\mathbb{Z}\beta})^{\pm}$, $(V_{\mathbb{Z}\alpha+\lambda_r}\otimes V_{\mathbb{Z}\beta+\frac{\beta}{2}})^{\pm}$	2
$(V_{\mathbb{Z}\alpha}\otimes V_{\mathbb{Z}\beta})^{(\epsilon,\epsilon')}$, $(V_{\mathbb{Z}\alpha+\frac{\alpha}{2}}\otimes V_{\mathbb{Z}\beta+\frac{\beta}{2}})^{(\epsilon,\epsilon')}$	1
$(V_{\mathbb{Z}\alpha}\otimes V_{\mathbb{Z}\beta+\frac{\beta}{2}})_{\chi}$, $(V_{\mathbb{Z}\alpha+\frac{\alpha}{2}}\otimes V_{\mathbb{Z}\beta})_{\chi}$	2
$(V_{\mathbb{Z}\alpha+\lambda_r+\frac{1}{4a}\alpha}\otimes I^{\frac{1}{2}}\circ V_{\mathbb{Z}\beta}^{T_0})^{\pm}$	$2\sqrt{2b}$
$(I^{\frac{1}{2}}\circ V_{\mathbb{Z}\alpha}^{T_0}\otimes V_{\mathbb{Z}\beta+\mu_s+\frac{1}{4b}\beta})^{\pm}$	$2\sqrt{2a}$
$(V_{\mathbb{Z}\alpha}^{T_0}\otimes V_{\mathbb{Z}\beta}^{T_j})^{\pm}$	$2ab$

最後に $l=4$ の場合の $\mathcal{M}^{\tau}$ の既約加群の分類について次が得られる.

系 4.4. $l=4$ の時の $\mathcal{M}^{\tau}$ の既約加群は, 定理 *4.3* で $a=6$, $b=2$ として得られる既約加群のいずれかに同型である. 特に 83 個の既約加群が存在する.

Remark 4.5. 定理 4.3 の既約加群は全部で $ab+7a+7b+15$ 個である.

References

[Abe01] T. Abe, Fusion rules for the charge conjugation orbifold, *J. Algebra*, **242**, no. 2, 624–655 (2001).

[Abe05] T. Abe, Rationality of the vertex operator algebra V_L^+ for a positive definite even lattice L, *Math. Z.*, **249**, no. 2, 455–484 (2005).

[AY14] T. Abe and H. Yamada, Commutant of $\mathcal{L}_{\widehat{\mathfrak{sl}}_2}(4,0)$ in the cyclic permutation orbifold of $\mathcal{L}_{\widehat{\mathfrak{sl}}_2}(1,0)^{\otimes 4}$, arXiv:1404.1974.

[D93] C. Dong, Vertex algebras associated with even lattices. *J. Algebra* **161**, no. 1, 245–265 (1993).

[D94] C. Dong, Twisted modules for vertex algebras associated with even lattices, *J. Algebra* **165**, no. 1, 91–112 (1994).

[DJX13] C. Dong, X. Jiao, F. Xu, Quantum dimensions and quantum Galois theory, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **365**, no. 12, 6441–6469 (2013).

[DLTYY04] C. Dong, C. H. Lam, K. Tanabe, H. Yamada, K. Yokoyama, $\mathbb{Z}_3$ symmetry and W_3 algebra in lattice vertex operator algebras, *Pacific J. Math.* **215**, no. 2, 245–296 (2004).

[DLWY10] C. Dong, C.-H. Lam, Q. Wang and H. Yamada, The structure of parafermion vertex operator algebras, *J. Alg.* **323**, 371–381, (2010).

[DM97] C. Dong and G. Mason, On quantum Galois theory, *Duke Math. J.*, **86**, no. 2, 305–321 (1997).

[DN99] C. Dong and K. Nagatomo, Representations of vertex operator algebra V_L^+ for rank one lattice L, *Commun. Math. Phys.* **202**, 169–195, (1999).

[DXY14] C. Dong, F. Xu, N. Yu, Cyclic permutations of lattice vertex operator algebras, arXiv:1501.00063.

[FLM88] I. Frenkel, J. Lepowsky and A. Meurman, *Vertex Operator Algebras and the Monster*, Pure and Appl. Math., Vol.**134**, Academic Press, Boston, 1988.

[Ymu04] H. Yamauchi, Module categories of simple current extensions of vertex operator algebras, *J. Pure Appl. Algebra*, **189**, no. 1-3, 315–328 (2004).

[Yms04] G. Yamskulna, C_2-cofiniteness of the vertex operator algebra V_L^+ when L is a rank one lattice, *Comm. Algebra*, **32**, no. 3, 927–954 (2004).