数理解析研究所講究録
第 1965 巻 2015 年 79-86

$\mathcal{S}^4$ 級の V_L^+ の分類について

東北大学 大学院情報科学研究科 端川 朝典
Graduate School of Information Sciences, Tohoku University
Tomonori Hashikawa

(e-mail: t.hashikawa@ims.is.tohoku.ac.jp)

本稿では東北大学の島倉裕樹氏との共同研究で得られた結果 ([HS]) について解説を行う.

1 はじめに

松尾氏は, 頂点作用素代数 (VOA) に $\mathcal{S}^n$ 級を導入した.

定義 1.1 ([Ma]). VOA $V=\bigoplus_{n\geq 0}V_n$ は, V の全自己同型群 $\mathrm{Aut}(V)$ によって固定される V の部分 VOA $V^{\mathrm{Aut}(V)}$ と, V の Virasoro element ω によって生成される部分 VOA V_ω の次数 n までの斉次部分空間が一致するとき $\mathcal{S}^n$ 級であるという.

Höhn 氏は共形デザインの理論を用いて, $V_1\neq 0$ である $\mathcal{S}^6$ 級の VOA は, A_1 もしくは E_8 ルート格子に付随する格子 VOA と同型になることを示した ([Hö]). また, Tuite 氏は, quadratic Casimir element に関する性質を調べることで $V_1\neq 0$ である $\mathcal{S}^4$ 級の VOA は, $A_1, A_2, G_2, D_4, F_4, E_6, E_7, E_8$ のいずれかの型の Lie 代数に付随するレベル 1 単純アファインVOA と同型となることを示した ([Tu]). 両氏の結果は, いずれも $V_1\neq 0$ の VOA に限定した話であることから, 自然と次の問題を考えることが出来る.

問題 1. $V_1=0$ の $\mathcal{S}^6$ 級 ($\mathcal{S}^4$ 級) の VOA を分類せよ.

[Ma] にて, $V_1=0$ の $\mathcal{S}^6$ 級もしくは $\mathcal{S}^4$ 級となる VOA の中心電荷と次数 2 の空間の次元のリストが得られている. そのリストの中に, $V_{\sqrt{2}D_4}^+, V_{\sqrt{2}E_8}^+, V_{BW_{16}}^+$ [1]の中心電荷と次数 2 の空間の次元の組が存在している. よって, これら格子に付随する VOA は $\mathcal{S}^6$ 級または $\mathcal{S}^4$ 級になるだろうと考えられた. 本研究は, 問題 1 の解決を目指すため, まずそれら候補となる VOA が実際に $\mathcal{S}^6$ 級, $\mathcal{S}^4$ 級になることを確かめるところから始まった. 更に, それら候補となる VOA の共通する性質を見出すことで研究を推し進め V_L^+ が $\mathcal{S}^4$ 級となる偶格子 L の分類を行った. 次は今回の研究で我々が得た主結果である.

---
[1] D_4 は階数 4 の D 型のルート格子であり, BW_{16} は階数 16 の Barnes–Wall 格子である.

主結果 . L を, ルート[2]を持たない偶格子とする. このとき V_L^+ が $\mathcal{S}^4$ 級であることと, L が $2A_1, \sqrt{2}D_4. \sqrt{2}E_8, BW_{16}$ のいずれかと同型となることは同値である. 更に, $V_{\sqrt{2}D_4}^+$ は $\mathcal{S}^5$ 級であり, $V_{2A_1}^+, V_{\sqrt{2}E_8}^+, V_{BW_{16}}^+$ は $\mathcal{S}^7$ 級である.

本稿では, 主に分類, つまり V_L^+ が $\mathcal{S}^4$ 級であるとき L は $2A_1, \sqrt{2}D_4, \sqrt{2}E_8, BW_{16}$ のいずれかと同型となることについて講演時よりも詳しく解説する.

注意 1.2. 本研究は, 筆者の修士時の研究の延長であり, 2014 年 3 月に行われた RIMS 研究集会でも似通った講演をしている. しかし, 2014 年 3 月時点で得られていた結果は, $\mathcal{S}^6$ 級の V_L^+ の分類であったことを注意しておきたい ([Ha1, Ha2]).

2 主結果の解説

2.1 $\mathcal{S}^4$ 級の V_L^+ の分類

L を, ルートを持たない偶格子とする. V_L^+ が $\mathcal{S}^n$ 級であるか調べるために, まず V_L^+ の自己同型群について知るべきである. よって V_L^+ の自己同型群について述べる. V_L^+ の自己同型群は, すでに [Sh] で研究されている. G を, L の直交群 $O(L)$ に誘導される $\mathrm{Aut}(V_L^+)$ の部分群とする. このとき G は, $\mathrm{Hom}(L, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ と同型な正規部分群を持ち, その正規部分群の, G での剰余群は $O(L)/\langle -1 \rangle$ と群として同型であることが知られている[3] ([FLM, cf.(10.4.13)]). また Frenkel–Lepowsky–Meurman は, $L = L_B(C)$ であるとき L の Type B の frame[4] F から G に属さない V_L^+ の自己同型写像 σ_F を構成した ([FLM, (11.2.6)]). ここで $L_B(C)$ は, 二元符号 C から構成法 B で得られる格子である. V_L^+ の全自己同型群について次が知られている.

定理 2.1 ([Sh, 命題 3.16]). L を, ルートを持たない偶格子とする. このとき, G が $\mathrm{Aut}(V_L^+)$ の真部分群であることと, L が構成法 B で得られる格子であることは同値である. さらに L が構成法 B で得られるとき, $\mathrm{Aut}(V_L^+)$ は, G と $\{\sigma_F \mid F : L \text{ の Type B の frame}\}$ によって生成される群である.

注意 2.2. $L_B(C)$ は $\mathbb{R}^n$ のノルム 2 の直交基底を一つ固定して構成される格子である. 本稿では, そのノルム 2 の直交基底を $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ とする.

実は, $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ は $L_B(C)$ の Type B の frame となる. $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ から得られる [FLM] で構成された自己同型写像を σ_0 とおく. このとき本研究で次を得た.

命題 2.3. $L = L_B(C)$ を, ルート持たない偶格子とする. このとき $\mathrm{Aut}(V_L^+) = \langle G, \sigma_0 \rangle$ である.

---

[2]格子 L のノルム 2 のベクトルを L のルートという.

[3]ここで -1 は, L の元を -1 倍にする直交変換である.

[4]L の Type B の frame は, ある性質を満たす $\mathbb{R}^n$ のノルム 2 の直交基底である. より詳しくは [KKM] を見てもらいたい.

つまり定理 2.1 では, $L = L_B(C)$ のとき $\mathrm{Aut}(V_L^+) = \langle G, \sigma_F \mid F : L$ の Type B の frame$\rangle$ であったが, 命題 2.3 で $\mathrm{Aut}(V_L^+)$ の生成元として G と σ_0 だけあれば充分であることを示した.

注意 2.4. 二元符号 C から構成法 B で得られる格子 $L_B(C)$ について次が成立する.

- $L_B(C)$ の階数と C の長さは一致する.
- $L_B(C)$ が偶格子であることと C が重偶符号であることは必要十分である.
- $L_B(C)$ がルートを持たないことと, C が重み 4 の符号語を持たないことは必要十分である.

注意 2.5. 次は構成法 B で得られる格子の例である.

- $L_B(\{(0^1)\}) \cong 2A_1$.
- $L_B(\{(0^4)\}) \cong \sqrt{2}D_4$.
- $L_B(\{(0^8), (1^8)\}) \cong \sqrt{2}E_8$.
- $L_B(RM(1,4)) \cong BW_{16}$.[5]

つまり, 主結果に現れる格子は, すべて構成法 B で得られる格子である.

定理 2.1 を用いることで V_L^+ の $\mathcal{S}^n$ 級について次を得た.

命題 2.6. L を, ルートを持たない偶格子とする. このとき V_L^+ が $\mathcal{S}^4$ 級ならば, L は構成法 B で得られる格子である.

Proof. L を, 階数 n の構成法 B で得られない偶格子とする. このとき V_L^+ は $\mathcal{S}^4$ 級でないことを示す. L は構成法 B で得られないので定理 2.1 より $\mathrm{Aut}(V_L^+) = G$ である. このとき $\mathrm{Hom}(L, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ に対応する G の元の固定点を考えることで

$$(V_L^+)_4^{\mathrm{Aut}(V_L^+)} = M_{\mathfrak{h}}(1)_4^{O(L)}$$

を得る. ただし $M_{\mathfrak{h}}(1)$ は $\mathfrak{h} := \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} L$ に付随する free bosonic VOA である. $\{\beta_i\}_{i=1}^n$ を $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底とすると, $\sum_{i=1}^n \beta_i(-3)\beta_i(-1)\mathbf{1}$ は $M_{\mathfrak{h}}(1)_4^{O(L)}$ の元である. また, $(V_\omega)_4$ の基底[6]を見ることで V_ω に属さないことがわかる. すなわち, $(V_L^+)_4^{\mathrm{Aut}(V_L^+)} \setminus V_\omega$ の元を見つけたことになる. したがって V_L^+ は $\mathcal{S}^4$ 級でないことを示した. □

特に, 格子 L の階数が 1 の場合, L は長さが 1 の重偶符号から構成法 B で得られることがわかる. そのような二元符号は $\{(0^1)\}$ しかない. よって注意 2.5 より次を得る.

系 2.7. L を, ルートを持たない階数が 1 の偶格子とする. このとき V_L^+ が $\mathcal{S}^4$ 級ならば $L \cong 2A_1$ である.

[5] $RM(1,4)$ は長さ 16 の一次リード・マラー符号である.

[6] V_L^+ において $\{L(-4)\mathbf{1}, L(-2)^2\mathbf{1}\}$ は $(V_\omega)_4$ の基底となる. ただし $L(m) = \omega_{m+1}$ である.

したがって, 以下では L の階数が1より大きい場合を考える.

命題 2.6 より, $L = L_B(C)$ となる二元符号 C が存在する. このとき命題 2.3 より $\mathrm{Aut}(V_L^+) = \langle G, \sigma_0 \rangle$ である. まず σ_0 と $\mathrm{Hom}(L, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ の固定点を考え, 次に $O(L_B(C))$ の固定点を考えることにする. つまり次の2点を考える.

(1) $(V_L^+)_4^{\sigma_0} \cap M_{\mathfrak{h}}(1)_4$ の基底を与える.

(2) $O(L_B(C))$ の生成元を与え, (1) で与えた $(V_L^+)_4^{\sigma_0} \cap M_{\mathfrak{h}}(1)_4$ の基底への作用を見る.

σ_0 の作用を見ることで (1) について次を得た.

補題 2.8. $L = L_B(C)$ を, 階数 n のルートを持たない偶格子とする. このとき

$$\{L_i(-4)\mathbf{1}, L_i(-2)L_j(-2)\mathbf{1} \mid 1 \leq i, j \leq n\}$$

は $(V_L^+)_4^{\sigma_0} \cap M_{\mathfrak{h}}(1)_4$ の基底となる. ただし, $L_i(m) = (\omega_i)_{m+1}$ であり, ω_i は $V_{2\mathbb{Z}\alpha_i}^+$ の Virasoro element である ($\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ は注意 2.2 で述べた $\mathbb{R}^n$ の直交基底).

次に (2) を考える. H を, 二元符号 C の自己同型群から誘導される $O(L_B(C))$ の部分群とする[7]. [KKM] にて, C の Type B の T-分解 S に対して, H に属さない $L_B(C)$ の直交変換 ρ_S が構成されている. T-分解は長さが4の倍数である二元符号に対して次で定義される.

定義 2.9 ([KKM, Section 3.3]). $C \subset \mathbb{F}_2^{4m}$ を二元符号とする. m 元部分集合 $S \subset \mathbb{F}_2^{4m}$ は次の3条件を満たすとき, C の T**-分解** (tetrad-分解) という.

1. S の任意の元 s に対して $\mathrm{wt}(s) = 4$.
2. S の任意の2つの元 s, t に対して $s + t \in C$.
3. S の相異なる2つの元 s, t に対して $\mathrm{supp}(s) \cap \mathrm{supp}(t) = \emptyset$.

更に, T-分解 S は, $S \not\subset C$ かつ $S \subset C^\perp$ を満たすとき, **Type B** であるという.

$\mathcal{T}_C$ を, C の Type B の T-分解全体の集合とする. 構成法 B で得られる偶格子の直交群について次を得た.

命題 2.10. $L = L_B(C)$ を, ルートを持たない偶格子とする. このとき, H が $O(L)$ の真部分群であることと, C が Type B の T-分解を持つことは同値である. さらに, $O(L)$ は, H と $\{\rho_S \mid S \in \mathcal{T}_C\}$ によって生成される群である.

命題 2.10 は, 定理 2.1 の格子における類似と言える. 命題 2.10 を用いることで $V_{L_B(C)}^+$ の $\mathcal{S}^n$ 級について次を得た.

命題 2.11. $L = L_B(C)$ を, 階数が1より大きい, ルートを持たない偶格子とする. このとき V_L^+ が $\mathcal{S}^4$ 級ならば, C は Type B の T-分解をもつ.

[7] H は $\mathrm{Aut}(C)$ と同型な部分群を持つ.

L の階数を n とする．証明の基本的な方針は命題 2.6 と同様である．C が Type B の T-分解を持たないと仮定すると，補題 2.8 と命題 2.10 を用いることで，$(V_L^+)_4$ の $\mathrm{Aut}(V_L^+)$ の固定点として

$$\sum_{i=1}^{n} L_i(-2)^2\mathbf{1} \tag{2.1}$$

を見つけられる．L の階数は 1 より大きいので (2.1) は V_ω に属さないことを示せる．

ここで，T-分解は長さが 4 の倍数の二元符号に対して定義されていたことを思い出そう．$L_B(C)$ の階数が C の長さと等しいので，命題 2.11 より $V_{L_B(C)}^+$ が $\mathcal{S}^4$ 級ならば $L_B(C)$ の階数は 4 の倍数となる．特に階数が 4 と 8 の場合に次を得る．

系 2.12. $L = L_B(C)$ を，ルートを持たない偶格子とし，V_L^+ は $\mathcal{S}^4$ 級と仮定する．このとき L の階数が 4 ならば $\sqrt{2}D_4$ と同型となり，L の階数が 8 ならば $\sqrt{2}E_8$ と同型となる．

Proof. $L_B(C)$ はルートを持たない偶格子であるので，C は重み 4 の符号語を持たない重偶符号である．よって C の長さが 4 のときは，$C = \{(0^4)\}$ となり，注意 2.5 より L は $\sqrt{2}D_4$ と同型となる．

次に L の階数が 8 の場合を考える．命題 2.11 より C は T-分解を持ち，このとき T-分解の性質から C は (1^8) を持つ．C は，重み 4 の符号語を持たない重偶符号であるので $\{(0^8), (1^8)\}$ とならなければならない．よって注意 2.5 より $L \cong \sqrt{2}E_8$ となる． □

系 2.7, 2.12 より L の階数が 8 以下での分類が完了したことになる．よって，L の階数が 8 より大きい場合を考える．$\mathcal{S}_C$ を，全ての Type B の T-分解の全ての元で生成される二元符号とする．つまり

$$\mathcal{S}_C := \left\langle \bigcup_{S \in \mathcal{T}_C} S \right\rangle_{\mathbb{F}_2} \subset \mathbb{F}_2^n$$

とする．$\mathcal{S}_C$ は，重みが 4 の符号語で生成される二元符号であるので，ただちに $\mathcal{S}_C$ は偶符号であることが分かる．$\mathcal{S}_C$ が重偶符号でない場合に次を得る．

補題 2.13. C を，長さが 8 より大きい，重み 4 の符号語を持たない重偶符号とする．このとき $\mathcal{S}_C$ が重偶符号でないならば，C は $RM(1,4)$ と同値である．

また，注意 2.5 より $RM(1,4)$ から構成法 B で得られる格子は BW_{16} と同型である．

今，我々は V_L^+ が $\mathcal{S}^4$ 級ならば L は $2A_1, \sqrt{2}D_4, \sqrt{2}E_8$，もしくは BW_{16} のいずれかと同型となることを示そうとしていた．すでに上にあげた格子は全てあらわれているので次の主張を示せば，本稿で考えている分類が完了したことになる．

主張 2.14. $\mathcal{S}_C$ が重偶符号であるとき $V_{L_B(C)}^+$ は $\mathcal{S}^4$ 級でない．

主張 2.14 を示す．$L = L_B(C)$ であるので，

$$(V_L^+)_4^{\mathrm{Aut}(V_L^+)} = ((V_L^+)_4^{\sigma_0} \cap M_{\mathfrak{h}}(1)_4)^{O(L_B(C))}, \quad O(L_B(C)) = \langle H, \rho_S \mid S \in \mathcal{T}_C \rangle$$

となる．今, $\mathrm{Aut}(C)$ は $\mathcal{T}_C$ 上に作用するので, $\mathrm{Aut}(\mathcal{S}_C)$ の部分群となる．ここで K を, $\mathrm{Aut}(\mathcal{S}_C)$ から得られる直交変換と $O(L_B(C))$ によって生成される直交群とする．$O(L_B(C))$ は K の部分群であるので

$$((V_L^+)_4^{\sigma_0} \cap M_{\mathfrak{h}}(1)_4)^K \subset (V_L^+)_4^{\mathrm{Aut}(V_L^+)}$$

となる．V_ω に属さない $((V_L^+)_4^{\sigma_0} \cap M_{\mathfrak{h}}(1)_4)^K$ の元を見つけることで主張 2.14 を示す．

$D_1, \ldots, D_r$ を, $\mathcal{S}_C$ の分解不可能[8]な部分符号で $\mathcal{S}_C = \bigoplus_{i=1}^r D_i$ となるものとする．このとき, $R = \{1 \le i \le r \mid D_1 \cong D_i\}$ とすると

$$\mathrm{Aut}(\mathcal{S}_C) \cong \mathrm{Aut}\left(\bigoplus_{i \in R} D_i\right) \mathrm{Aut}\left(\bigoplus_{i \notin R} D_i\right) \tag{2.2}$$

である．また, $1 \le i \le r$ に対して,

$$\omega_{D_i} := \sum_{k \in \mathrm{supp}(D_i)} \omega_k$$

とする．ただし $\mathrm{supp}(D_i) = \bigcup_{c \in D_i} \mathrm{supp}(c)$ である．このとき ω_{D_i} は, $\mathfrak{h}(D_i) := \langle \alpha_k \mid k \in \mathrm{supp}(D_i) \rangle_{\mathbb{C}}$ に付随する free bosonic VOA $M_{\mathfrak{h}(D_i)}(1)$ の Virasoro element となる．本稿では詳しく述べないが, $\mathcal{S}_C$ が重偶符号であることから ρ_S は ω_{D_i} を固定することがわかる．また, (2.2) より K は

$$\sum_{i \in R} L_{D_i}(-2)^2 \mathbf{1} \quad (\in (V_L^+)_4^{\sigma_0} \cap M_{\mathfrak{h}}(1)_4)$$

を固定する．ただし, $L_{D_i}(m) = (\omega_{D_i})_{m+1}$ である．特に $r > 1$ のとき $(V_\omega)_4$ の基底を見ることで, このベクトルは V_ω に属さないこともわかる．よって最後に考えるべきは $r = 1$ のとき, つまり $\mathcal{S}_C$ 自身が分解不可能な二元符号となるときである．Pless–Sloane によって次の命題が示されている．

命題 2.15. (cf.[PS, Theorem 6.5]). 重み 4 の符号語で生成される重偶符号は e_7, e_8, d_{4s} ($s > 0$) のいくつかの直和でできる二元符号と同値である[9].

$\mathcal{S}_C$ は, その定義から重み 4 の符号語で生成される．今, 符号の長さは 8 より大きい場合を考えており, $\mathcal{S}_C$ は分解不可能な重偶符号であるので命題 2.15 より $\mathcal{S}_C = d_{4s}$ ($s > 2$) と仮定して良い．詳しい計算を本稿では述べないが, $\mathrm{Aut}(d_{4s})$ ($\cong S_2 \wr S_{2s}$) の作用を考慮することで $((V_L^+)_4^{\sigma_0} \cap M_{\mathfrak{h}}(1)_4)^K \setminus V_\omega$ の元として,

$$2\sum_{i=1}^{2s} L_{2i-1}(-2)L_{2i}(-2)\mathbf{1} - \sum_{1 \le i < j \le 2s} L_{l_i}(-2)L_{l_j}(-2)\mathbf{1}$$

を見つけられる．ただし, $L_{l_i}(m) = L_{2i-1}(m) + L_{2i}(m)$ である．よって主張 2.14 は示された．

[8] 二元符号 C_1, C_2 の直和を $C_1 \oplus C_2 := \{(u, v) \mid u \in C_1, v \in C_2\}$ とする．二元符号は, 2 つ以上の直和で書けるとき**分解可能**といい, そうでないとき**分解不可能**という．

[9] e_7 は長さ 7 のハミング符号の偶符号語全体からなる部分符号, e_8 は長さ 8 の拡張ハミング符号, $d_{4s} = \langle (0^{2i}1^4 0^{4s-2i-2}) \mid 0 \le i \le 2s-2 \rangle_{\mathbb{F}_2}$ である

2.2 V_L^+ の $\mathcal{S}^5$ 級, $\mathcal{S}^7$ 級について

注意 2.5 で述べたように $2A_1, \sqrt{2}D_4, \sqrt{2}E_8, BW_{16}$ は, 二元符号から構成法 B で得られる偶格子である. このとき補題 2.8 のように $(V_L^+)_k^{\sigma_0} \cap M_{\mathfrak{h}}(1)_k$ $(k=5,7)$ の基底を与えることが出来る. 最後に $O(L)$ の作用を見ることで, $(V_L^+)_4$ の $\mathrm{Aut}(V_L^+)$ による固定点を決定する. D_4, E_8, BW_{16} は Barnes–Wall 格子の系列に属し, それら格子の直交群の不変式環について [NRS] や [Ba] で研究されている. その結果を用いることで V_L^+ の固定点を効率的に計算でき, 実際に $V_{\sqrt{2}D_4}^+$ は $\mathcal{S}^5$ 級, $V_{\sqrt{2}E_8}^+, V_{BW_{16}}^+$ は $\mathcal{S}^7$ 級となることを示せる.

3 最後に

今回の結果で, $\mathcal{S}^4$ 級の V_L^+ の分類を得たことになる. また, $V_{\sqrt{2}D_4}^+$ は $\mathcal{S}^5$ 級, $V_{\sqrt{2}E_8}^+, V_{BW_{16}}^+$ は $\mathcal{S}^7$ 級にはなるが, [Ma, Section 3] から $V_{\sqrt{2}D_4}^+$ は $\mathcal{S}^6$ 級に, $V_{\sqrt{2}E_8}^+, V_{BW_{16}}^+$ は $\mathcal{S}^8$ 級にならないこともわかる. 主結果で $V_{2A_1}^+$ は $\mathcal{S}^7$ 級になると言ったが, 実際は [DJ] での計算と σ_0 の固定点を考慮することで $\mathcal{S}^{15}$ 級となることが示せ, また $\mathcal{S}^{16}$ 級とならないことも示せる.

今後の方針の一つとして, $\mathcal{S}^n$ 級の $\widetilde{V}_L$ の分類問題があげられる. ここで $\widetilde{V}_L$ は偶ユニモジュラー格子 L から $\mathbb{Z}_2$-軌道体構成法で得られる VOA である. 2.2 節で述べた [NRS], [Ba] の結果を用いた計算方法は, 階数 32 の Barnes–Wall 格子 BW_{32} から $\mathbb{Z}_2$-軌道体構成法で得られる VOA $\widetilde{V}_{BW_{32}}$ にも適用出来る方法であり, $\widetilde{V}_{BW_{32}}$ は $\mathcal{S}^7$ 級となることが言える. また, リーチ格子から $\mathbb{Z}_2$-軌道体構成法で得られる VOA は Moonshine VOA $V^\natural$ であり, $\mathcal{S}^{11}$ 級となることが知られている (cf.[Bo, CN, Ma]). $V^\natural, \widetilde{V}_{BW_{32}}$ の例があるため, 他にも例があるかを探すことは重要だと考えられる.

Reference

[Ba] C. Bachoc, Designs, groups and lattices, *J. Théor. Nombres Bordeaux* **17** (2005), 25–44.

[Bo] R. E. Borcherds, Monstrous moonshine and monstrous Lie superalgebras, *Invent. Math.* **109** (1992), 405–444.

[CN] J. H. Conway and S. P. Norton, Monstrous Moonshine, *Bull. London. Math. Soc.* **11** (1979), 308–339.

[DJ] C. Dong and C. Jiang, Representation of the vertex operator algebra $V_{L_2}^{A_4}$, *J. Algebra.* **377** (2013), 76–96.

[FLM] I. B. Frenkel, J. Lepowsky, and A. Meurman. *Vertex Operator Algebras and the Monster, Pure and Applied Mathematics*, 134, Academic Press, Boston, 1988.

[NRS] G. Nebe, E. Rains, and N. J. A Sloane, The invariants of the Clifford groups, *Des, Codes, Cryptogr.* **24** (2001), 99–122.

[Ha1] 端川朝典, On the Symmetry of the Vertex Operator Algebra Associated with an Even Lattice without Roots, 修士論文, 2014 年 3 月.

[Ha2] 端川朝典, ルートを持たない偶格子に付随する頂点作用素代数の対称性について, 有限群とその表現, 頂点作用素代数, 代数的組合せ論の研究, RIMS 講究録. **1926** (2014), 98–105.

[Hö] G. Höhn, Conformal designs based on vertex operator algebras, *Adv. Math.* **217** (2008), 2301–2355.

[HS] T. Hashikawa and H. Shimakura, Classification of the vertex operator algebras V_L^+ of class $\mathcal{S}^4$, preprint.

[KKM] M. Kitazume, T. Kondo, and I. Miyamoto, Even lattices and doubly even codes, *J. Math. Soc. Japan.* **43** (1991), 67–87.

[Ma] A. Matsuo, Norton's trace formulae for the Griess algebra of a vertex operator algebra with larger symmetry, *Comm. Math. Phys.* **224** (2001), 565–591.

[PS] V. Pless and N.J.A. Sloane, On the Classification and Enumeration of self dual codes, *J. Combinatorial Theory Ser. A.* **18** (1975), 313–335.

[Sh] H. Shimakura, The automorphism group of the vertex operator algebra V_L^+ for an even lattice L without roots, *J. Algebra.* **280** (2004), 29–57.

[Tu] M. P. Tuite, Exceptional vertex operator algebras and the Virasoro algebra, in Vertex operator algebras and related areas, *Contemp. Math.* **497** (2009), 213–225.