数理解析研究所講究録
第1973巻 2015年 10-17

Kaneko-Zagier type differential equation for Jacobi forms

喜友名　朝也
Tomoya Kiyuna
九州大学大学院数理学府
Graduate School of Mathematics, Kyushu University

1　はじめに

本稿で用いる基本的な記号を整理する. 変数 w に対して $\exp(2\pi\sqrt{-1}w)$ を記号 $\mathbf{e}(w)$ で表す. 記号 τ は上半平面 $\mathfrak{H}$ の点を, 記号 z は $\mathbb{C}$ の点をそれぞれ表すとし, 記号 q, ζ をそれぞれ $q := \mathbf{e}(\tau), \zeta := \mathbf{e}(z)$ で定義する. 群 $SL_2(\mathbb{Z})$ に関する重さ k の (正則楕円) モジュラー形式全体のなす $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間を M_k で表す. モジュラー形式の中で最も基本的な例である重さ $k \in 2\mathbb{N}$ の (正規化された)Eisenstein 級数 $E_k(\tau)$ を

$$E_k(\tau) := 1 - \frac{2k}{B_k} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{0<d|n} d^{k-1} \right) q^n$$

で定義する. ここで B_k は k 番目の Bernoulli 数である. 次に Ramanujan の Δ 関数 $\Delta(\tau)$ と Klein の j 関数 $j(\tau)$ をそれぞれ

$$\Delta(\tau) := \frac{E_4(\tau)^3 - E_6(\tau)^2}{1728} = q - 24q^2 + 252q^3 - 1472q^4 + \cdots,$$
$$j(\tau) := \frac{E_4(\tau)^3}{\Delta(\tau)} = \frac{1}{q} + 744 + 196884q + \cdots$$

で定義する.

続いて Jacobi 形式に関する記号を述べる [EZ85]. 正則関数 $\phi : \mathfrak{H} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ が $SL_2(\mathbb{Z})$ に関する重さ k $(\in \mathbb{Z})$, 指数 m $(\in \mathbb{Z})$ の Jacobi 形式であるとは次の三つの条件を満たすときにいう：

- $\phi\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}, \frac{z}{c\tau+d}\right) = (c\tau+d)^k \mathbf{e}\left(\frac{cmz^2}{c\tau+d}\right)\phi(\tau,z) \quad \left({}^\forall\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in SL_2(\mathbb{Z}), {}^\forall(\tau,z) \in \mathfrak{H}\times\mathbb{C}\right)$,
- $\phi(\tau, z+\lambda\tau+\mu) = \mathbf{e}(-\lambda^2 m\tau - 2\lambda mz)\phi(\tau,z) \quad ({}^\forall(\lambda,\mu) \in \mathbb{Z}^2, {}^\forall(\tau,z) \in \mathfrak{H}\times\mathbb{C})$,
- $\phi(\tau,z)$ は次の形の Fourier 展開をもつ：

$$\phi(\tau,z) = \sum_{n,r\in\mathbb{Z}, 4mn\geq r^2} c(n,r) q^n \zeta^r.$$

群 $SL_2(\mathbb{Z})$ に関する重さ k, 指数 m の Jacobi 形式全体がなす $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間を $J_{k,m}$ と書くことにし, 特に $m=1$ のとき $J_{k,1}$ を単に J_k と書くことにする. 一番基本的な Jacobi 形式の例は次の Jacobi-Eisenstein 級数

$$E_{k,m}(\tau,z) := \frac{1}{2}\sum_{(c,d)=1}(c\tau+d)^{-k}\sum_{\lambda\in\mathbb{Z}}\mathbf{e}\left(\lambda^2 m\frac{a\tau+b}{c\tau+d} + 2\lambda m\frac{z}{c\tau+d} - \frac{cmz^2}{c\tau+d}\right) \in J_{k,m}$$

である. Cohen 関数などを用いると $E_{k,m}(\tau,z)$ の Fourier 展開を明示的に計算できる [EZ85, Theorem 2.1]. 例えば指数 $m=1$ の Jacobi-Eisenstein 級数 $E_{4,1} \in J_4, E_{6,1} \in J_6$ の Fourier 展開はそれぞれ次のようになる：

$$\begin{aligned} E_{4,1}(\tau,z) &= 1 + (\zeta^{-2} + 56\zeta^{-1} + 126 + 56\zeta + \zeta^2)q \\ &\quad + (126\zeta^{-2} + 576\zeta^{-1} + 756 + 576\zeta + 126\zeta^2)q^2 + \cdots, \\ E_{6,1}(\tau,z) &= 1 + (\zeta^{-2} - 88\zeta^{-1} - 330 - 88\zeta + \zeta^2)q \\ &\quad + (-330\zeta^{-2} - 4224\zeta^{-1} - 7524 - 4224\zeta - 330\zeta^2)q^2 + \cdots. \end{aligned}$$

最後に微分に関する記号を述べる. 記号 $'$ を $' := (2\pi\sqrt{-1})^{-1}\partial/\partial\tau$ で定義し, また二変数関数 $\phi = \phi(\tau,z)$ に対して, 記号 $\phi^{(n)}$, $\phi^{[n]}$ をそれぞれ $\phi^{(n)} := (2\pi\sqrt{-1})^{-n}\partial^n\phi/\partial\tau^n$, $\phi^{[n]} := (2\pi\sqrt{-1})^{-n}\partial^n\phi/\partial z^n$ で定義する.

2 モジュラー形式に対する金子・Zagier 型保型微分方程式 $(\sharp_k)$

モジュラー形式に対する金子・Zagier 型保型微分方程式とは, 論文 [KZ98] で金子昌信氏と Don Zagier 氏により導入された二階線形常微分方程式

$$f''(\tau) - \frac{k+1}{6}E_2(\tau)f'(\tau) + \frac{k(k+1)}{12}E_2'(\tau)f(\tau) = 0 \qquad (\sharp_k)$$

のことである. 本節では最初に, 金子氏と Zagier 氏がどのようにして微分方程式 $(\sharp_k)$ を導出したのかをおさらいする. 彼らは Ramanujan-Serre 微分

$$\vartheta_k := \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\frac{d}{d\tau} - \frac{k}{12}E_2 : M_k \longrightarrow M_{k+2}$$

を用いて $(\sharp_k)$ を導出した. まず $k \equiv 0$ または $4 \pmod 6$ を仮定する. このとき古典的に良く知られている M_k の次元公式より, 等式 $\dim_{\mathbb{C}} M_{k+4} = \dim_{\mathbb{C}} M_k$ が導かれ, 従って $M_{k+4} = E_4 \cdot M_k$ となる. ゆえに $k \equiv 0$ または $4 \pmod 6$ のとき, M_k の自己準同型

$$\varphi_k := \frac{1}{E_4} \vartheta_{k+2} \circ \vartheta_k : M_k \longrightarrow M_k$$

は well-defined である. ここで

- Ramanujan-Serre 微分 ϑ_k はカスプ形式をカスプ形式に写す,

- 重さ k のカスプ形式がなす $\mathbb{C}$ 部分空間の余次元は 1 である,

- $f \in M_k$ に対して, ($\varphi_k(f)$ の定数項)$=\frac{k(k+2)}{144} \times$ (f の定数項)

の三つの事実に注意すると $k(k+2)/144$ が φ_k の固有値であることがわかる. そして, 公式 $E_2' = (E_2^2 - E_4)/12$ を用いると, 微分方程式 $(\sharp_k)$ と固有値 $k(k+2)/144$ に対する固有ベクトルを求める方程式

$$\varphi_k(f)(\tau) = \frac{k(k+2)}{144} f(\tau) \tag{1}$$

が同値であることが確かめられる. このようにして彼らは微分方程式 $(\sharp_k)$ を導出したのである.

注意 2.1. 微分方程式 $(\sharp_k)$ の形から直ちにわかるように, 一般の複素数 k と $\mathfrak{H}$ 上の正則関数 $f(\tau)$ に対しても $(\sharp_k)$ を定義することができるが, もちろんその場合 $f(\tau)$ が $(\sharp_k)$ の解であること ($\Leftrightarrow$ 等式 (1) を満たすこと) と $f(\tau)$ がモジュラー形式であることは無関係である. つまり一般には $(\sharp_k)$ の解であってもそれがモジュラー形式であるとは限らない.

次に金子・Zagier 型保型微分方程式 $(\sharp_k)$ に関連する先行研究を述べよう. 金子昌信氏と Don Zagier 氏は, 超特異多項式

$$\mathrm{ss}_p(X) := \prod_{E/\overline{\mathbb{F}}_p:\text{超特異}} (X - j(E)) \in \mathbb{F}_p[X]$$

の研究 [KZ98] において, 微分方程式 $(\sharp_k)$ のモジュラー形式解と $\mathrm{ss}_p(X)$ の間に次の密接な関係があることを証明した:

定理 2.2. ([KZ98]) 素数 $p \geq 5$ に対して, 整数 $\gamma \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\delta \in \{0,1,2\}$, $\epsilon \in \{0,1\}$ を $p-1 = 12\gamma + 4\delta + 6\epsilon$ で定める. 重さ $p-1$ のモジュラー形式 $f_{p-1} \in M_{p-1}$ を $(\sharp_{p-1})$ の解で

かつその Fourier 展開の定数項が $(-1)^\gamma\binom{\frac{p}{6}-1}{\gamma}$ となるものとする. 多項式 $F_{p-1}(X)\in\mathbb{Q}[X]$ を $f_{p-1}=\Delta^\gamma E_4^\delta E_6^\epsilon F_{p-1}(j)$ で定めるとき次が成り立つ：

$$\mathrm{ss}_p(X)\equiv X^\delta(X-1728)^\epsilon F_{p-1}(X)\ (\mathrm{mod}\ p).$$

金子氏と Zagier 氏の研究 [KZ98] 以降, 微分方程式 $(\sharp_k)$ のモジュラー形式解や準モジュラー形式解の明示的研究 (cf. [KK03]) などが行われてきたが, 近年になって微分方程式 $(\sharp_k)$ のモジュラー形式解が二次元共形場理論に応用できること [KNS13] や, 新しいモジュラー形式である「混合モックモジュラー形式」[DMZ12] が $(\sharp_k)$ の解として現れること [G15] が証明され大きく進展した.

3 Jacobi 形式に対する金子・Zagier 型保型微分方程式 $(\flat_{k,m})$ とその性質

筆者は多変数保型形式に対する保型微分方程式があっても不思議ではないと考え, 手始めに二変数保型形式である Jacobi 形式に対して研究してみた. そして, Jacobi 形式に対する金子・Zagier 型保型微分方程式を導出することができた. それは次の形の四階線形偏微分方程式のことである [Ki14]：

$$\begin{aligned}\phi^{[4]}(\tau,z)-8m\phi^{[2](1)}(\tau,z)+\frac{(2k+1)m}{3}E_2(\tau)\phi^{[2]}(\tau,z)\\+16m^2\phi^{(2)}(\tau,z)-\frac{4(2k+1)m^2}{3}E_2(\tau)\phi'(\tau,z)\\+\frac{(2k-1)(2k+1)m^2}{3}E_2'(\tau)\phi(\tau,z)=0.\end{aligned}\tag{$\flat_{k,m}$}$$

微分方程式 $(\flat_{k,m})$ は, 第 2 節で述べた金子・Zagier 型保型微分方程式 $(\sharp_k)$ の導出法を, Ramanujan-Serre 微分 ϑ_k の代わりに Richter 氏 [R09] が研究した修正された熱作用素

$$\partial_{k,m}:=L_m-\frac{(2k-1)m}{6}E_2:J_{k,m}\longrightarrow J_{k+2,m}$$

で実行することにより得られる. (方程式 $(\flat_{k,m})$ を「金子・Zagier 型」と呼ぶ所以はここにある.) ただし $\partial_{k,m}$ の定義で現れた L_m は古典的な熱作用素

$$L_m:=\frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^2}\left(8\pi\sqrt{-1}m\frac{\partial}{\partial\tau}-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$$

である.

元々の金子・Zagier 型保型微分方程式 $(\sharp_k)$ の導出法を微分作用素 $\partial_{k,m}$ に置き換えて行うという単純なアイディアで導出された $(\flat_{k,m})$ であるが, それにもかかわらず $(\flat_{k,m})$ は次の性質をもつ:

命題 3.1. ([Ki14]) (i) (解空間の保型性) 関数 $\phi(\tau,z)$ が $(\flat_{k,m})$ の解ならば, 任意の $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in SL_2(\mathbb{Z}), (\lambda,\mu) \in \mathbb{Z}^2$ に対して, 関数

$$(c\tau+d)^{-k}\mathbf{e}\Big(-\frac{cmz^2}{c\tau+d}\Big)\phi\Big(\frac{a\tau+b}{c\tau+d},\frac{z}{c\tau+d}\Big),\ \mathbf{e}(\lambda^2 m\tau+2\lambda mz)\phi(\tau,z+\lambda\tau+\mu)$$

もまた $(\flat_{k,m})$ の解である.

(ii) (特徴付け) 微分方程式

$$\begin{aligned}\phi^{[4]}(\tau,z)&+A_1(\tau)\phi^{[2](1)}(\tau,z)+A_2(\tau)\phi^{[2]}(\tau,z)\\&+A_3(\tau)\phi^{(2)}(\tau,z)+A_4(\tau)\phi'(\tau,z)+A_5(\tau)\phi(\tau,z)=0\end{aligned} \tag{2}$$

(ここで $A_i(\tau)$ $(1\le i\le 5)$ は $\mathfrak{H}$ 上正則な関数) で次の二つの条件 (a), (b) を満たすものは本質的に $(\flat_{k,m})$ しかない:

(a) 関数 $\phi(\tau,z)$ が (2) の解ならば, 任意の $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in SL_2(\mathbb{Z}), (\lambda,\mu) \in \mathbb{Z}^2$ に対して, 関数

$$(c\tau+d)^{-k}\mathbf{e}\Big(-\frac{cmz^2}{c\tau+d}\Big)\phi\Big(\frac{a\tau+b}{c\tau+d},\frac{z}{c\tau+d}\Big),\ \mathbf{e}(\lambda^2 m\tau+2\lambda mz)\phi(\tau,z+\lambda\tau+\mu)$$

もまた (2) の解である.

(b) $y=\mathrm{Im}(\tau)\to\infty$ のとき関数 $A_i(\tau)$ $(1\le i\le 5)$ は有界である.

注意 3.2. 注意 2.1 と同様の理由により, 一般には微分方程式 $(\flat_{k,m})$ の解であってもそれが Jacobi 形式であるとは限らない.

微分方程式 $(\flat_{k,m})$ の導出や命題 3.1 の証明の詳細は [Ki14] を参照していただきたい.

本節の最後に, 二つの金子・Zagier 型保型微分方程式 $(\flat_{k,m}), (\sharp_k)$ と熱方程式

$$L_m(\psi)=\partial_{\frac{1}{2},m}(\psi)=0 \tag{3}$$

の間にある関係を述べる. 次の定理は, 方程式 $(\flat_{k,m})$ の解は方程式 $(\sharp_k)$ と (3) の解を組み合わせることによって得られることを主張している:

定理 3.3. 関数 $\psi_i:\mathfrak{H}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ $(1\le i\le N)$ は上半平面 $\mathfrak{H}$ 上の正則関数全体がなす環の上で一次独立であり, かつ全ての i に対して ψ_i が熱方程式 (3) の解であるとする. 次に正則関

数 $f_i : \mathfrak{H} \to \mathbb{C}$ $(1 \le i \le N)$ に対して, 関数 $\phi : \mathfrak{H} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ を

$$\phi := \sum_{i=1}^{N} f_i \psi_i.$$

で定義する. このとき ϕ が方程式 $(\flat_{k+1/2,m})$ の解であることと, 全ての i に対して f_i が方程式 $(\sharp_k)$ の解であることは必要十分である.

定理 3.3 の証明は Leibniz ルール (もどき)

$$\partial_{k+l,m}(f\phi) = 4m\vartheta_k(f)\phi + f\partial_{l,m}(\phi) \qquad (\text{ただし } f : \mathfrak{H} \to \mathbb{C},\ \phi : \mathfrak{H} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C})$$

に注意すれば容易であるから省略する.

4 金子・Zagier 型保型微分方程式 $(\flat_{k,1})$ の Jacobi 形式解

本研究の主結果である, 重さ $k \equiv 4 \pmod 6$ $(k \in \mathbb{Z}_{\ge 0})$ に対する微分方程式 $(\flat_{k,1})$ の指数 1 の Jacobi 形式解を明示的に構成して本稿を終えよう. まず四つの多項式 $P_n(X), Q_n(X), R_n(X), S_n(X)$ $(n \ge 0)$ を次のように定義する:

$$\begin{aligned}
&P_0(X) := 1,\ Q_0(X) := 0,\ R_0(X) := 1,\ S_0(X) := 1,\\
&P_{n+1}(X) := (X - 1728)R_n(X) + \lambda_{2n+1}P_n(X) && (n \ge 0),\\
&Q_{n+1}(X) := S_n(X) + \lambda_{2n+1}Q_n(X) && (n \ge 0),\\
&R_{n+1}(X) := P_{n+1}(X) + \lambda_{2n+2}R_n(X) && (n \ge 0),\\
&S_{n+1}(X) := (X - 1728)Q_{n+1}(X) + \lambda_{2n+2}S_n(X) && (n \ge 0),
\end{aligned}$$

ただし

$$\lambda_n := \begin{cases} \dfrac{5472}{7} & n = 1 \text{ のとき},\\[2ex] 48\dfrac{(12n-1)(12n+7)}{(4n-1)(4n+3)} & n \ge 2 \text{ のとき} \end{cases}$$

である. 定義から直ちにわかるように $\deg P_n(X) = \deg R_n(X) = \deg S_n(X) = n$ $(n \ge 0)$, $\deg Q_n(X) = n - 1$ $(n \ge 1)$ である. これら四つの多項式を用いて重さ $k \equiv 4 \pmod 6$ $(k \in \mathbb{Z}_{\ge 0})$, 指数 1 の Jacobi 形式 $\phi_k \in J_k$ を

$$\phi_k := \begin{cases} \Delta^n P_n(j)E_{4,1} + \dfrac{7}{11}\Delta^{n-1}E_4E_6Q_n(j)E_{6,1} & k = 4 + 12n \ (n \in \mathbb{Z}_{\ge 0}) \text{ のとき},\\[2ex] \Delta^n E_6R_n(j)E_{4,1} + \dfrac{7}{11}\Delta^n E_4S_n(j)E_{6,1} & k = 10 + 12n \ (n \in \mathbb{Z}_{\ge 0}) \text{ のとき} \end{cases}$$

で定義する.

定理 4.1. ([Ki14]) Jacobi 形式 ϕ_k は微分方程式 $(\flat_{k,1})$ の解である.

構成した Jacobi 形式解 ϕ_k の最初の方をいくつか挙げておく：

$$
\begin{aligned}
\phi_4 &= E_{4,1},\\
\phi_{10} &= E_6E_{4,1}+\frac{7}{11}E_4E_{6,1},\\
\phi_{16} &= \Delta\Big(j-\frac{6624}{7}\Big)E_{4,1}+\frac{7}{11}E_4E_6E_{6,1}=\frac{19E_4^3+23E_6^2}{42}E_{4,1}+\frac{7}{11}E_4E_6E_{6,1},\\
\phi_{22} &= \Delta E_6\Big(j-\frac{5520}{11}\Big)E_{4,1}+\frac{7}{11}\Delta E_4\Big(j-\frac{98832}{77}\Big)E_{6,1}\\
&= \frac{281E_4^3+115E_6^2}{396}E_6E_{4,1}+\frac{713E_4^3+2059E_6^2}{4356}E_4E_{6,1}.
\end{aligned}
$$

「Rankin-Cohen 括弧積」と構成した Jacobi 形式解 ϕ_k が満たす漸化式を用いることにより定理 4.1 は証明される (詳細は [Ki14] を参照).

謝辞

講演と講究録執筆の機会を与えてくださった世話人の成田宏秋先生, 林田秀一先生に心より感謝申し上げます.

参考文献

[DMZ12] A. Dabholkar, S. Murthy and D. Zagier, *Quantum Black Holes, Wall Crossing, and Mock Modular Forms,* Cambridge Monographs in Mathematical Physics (2012, to appear).

[EZ85] M. Eichler and D. Zagier, *The Theory of Jacobi Forms,* Birkhäuser (1985), Boston-Basel-Stuttgart.

[G15] P. Guerzhoy, *A mixed mock modular solution of the Kaneko-Zagier equation,* Ramanujan J. **36** (2015), 149–164.

[KK03] M. Kaneko and M. Koike, *On modular forms arising from a differential equation of hypergeometric type,* Ramanujan J. **7** (2003), 145–164.

[KNS13] M. Kaneko, K. Nagatomo and Y. Sakai, *Modular forms and second order ordinary differential equations: applications to vertex operator algebras,* Lett. Math. Phys. **103** (2013), no. 4, 439–453.

[KZ98] M. Kaneko and D. Zagier, *Supersingular j-invariants, hypergeometric series, and Atkin's orthogonal polynomials,* AMS/IP Stud. Adv. Math. **7** (1998), 97-126.

[Ki14] T. Kiyuna, *Kaneko-Zagier type equation for Jacobi forms of index 1,* Ramanujan J. (2014). http://link.springer.com/article/10.1007/s11139-014-9641-0

[R09] O. Richter, *The action of the heat operator on Jacobi forms,* Proc. Amer. Math. Soc. **137** (2009), 869-875.

Tomoya Kiyuna
Graduate School of Mathematics, Kyushu University, 744 Motooka, Nishi-ku, Fukuoka, 819-0395, Japan
E-mail:t-kiyuna@math.kyushu-u.ac.jp