数理解析研究所講究録
第 1973 巻 2015 年 101-114

無限素点における $GL(3)\times GL(2)$ に関する局所ゼータ積分

愛媛大学理学部数学科　平野 幹
Miki Hirano
Department of Mathematics, Faculty of Science, Ehime University

成蹊大学理工学部　石井 卓
Taku Ishii
Faculty of Science and Technology, Seikei University

北里大学一般教育部　宮崎 直
Tadashi Miyazaki
College of Liberal Arts and Sciences, Kitasato University

1 序文

F は実数体 $\mathbb{R}$ または複素数体 $\mathbb{C}$ であるとする．Π と π をそれぞれ Whittaker 模型を持つ $GL(n+1,F)$ と $GL(n,F)$ の既約許容 Hilbert 表現とする．Jacquet と Shalika は論文 [JS] において，Π に付随する Whittaker 関数 W と π に付随する Whittaker 関数 W' から定義される局所ゼータ積分 $Z(s,W,W')$ は局所 L-因子 $L(s,\Pi\times\pi)$ の整関数倍である事を証明した．さらに，Jacquet は論文 [Ja] において，

$$Z(s,W_1,W_1')+Z(s,W_2,W_2')+\cdots+Z(s,W_m,W_m')=L(s,\Pi\times\pi)$$

となる自然数 m と Π に付随する Whittaker 関数 $W_1,W_2,\cdots,W_m$, π に付随する Whittaker 関数 $W_1',W_2',\cdots,W_m'$ が存在する事を証明した．我々は，より強い「任意の Π,π に対して，

$$Z(s,W,W')=L(s,\Pi\times\pi)$$

となる Π に付随する Whittaker 関数 W と π に付随する Whittaker 関数 W' が存在する」という主張が成立する事を期待している．この主張が $n=1$ の場合に成立する事は，Popa の論文 [Po] で既に証明されている．また，Stade は論文 [St] において，Π と π が共に球主系列表現であれば，球 Whittaker 関数 W,W' から定義される局所ゼータ積分 $Z(s,W,W')$ は局所 L-因子 $L(s,\Pi\times\pi)$ と一致する事を証明している．これらの結果に加えて，上記の主張が $n=2$ の場合に成立する事を証明する事ができたので，本稿ではその結果について報告する．

2 基本的な記法

$l \in F$ に対して，F の加法的ユニタリ指標 ψ_l を

$$\psi_l(\xi) = \begin{cases} e^{2\pi\sqrt{-1}l\xi} & (F = \mathbb{R} \text{ の場合}), \\ e^{2\pi\sqrt{-1}(l\xi+\overline{l\xi})} & (F = \mathbb{C} \text{ の場合}) \end{cases} \qquad (\xi \in F)$$

で定義し，F 上のノルム $|\cdot|_F$ を $|\xi|_{\mathbb{R}} = |\xi|$，$|\xi|_{\mathbb{C}} = |\xi|^2$ で定義する．ここで，$|\cdot|$ は通常の絶対値を表す．また，$\Gamma_{\mathbb{R}}(s) = \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)$，$\Gamma_{\mathbb{C}}(s) = 2(2\pi)^{-s}\Gamma(s)$ とおく．

n 次の単位行列を 1_n と表記し，(i,j)-成分が 1 でその他の成分が 0 である 3 次行列を E_{ij} と表記する．$t \in \mathbb{R}$ に対して，$\mathrm{sgn}(t)$ を次のように定義する：

$$\mathrm{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & (t \geq 0 \text{ の場合}), \\ -1 & (t < 0 \text{ の場合}). \end{cases}$$

G_n を F 上の n 次一般線型群 $GL(n,F)$ とする．G_n の部分群 N_n, A_n, K_n を

$$N_n = \{x = (x_{ij}) \in G_n \mid x_{ii} = 1 \ \ (1 \leq i \leq n), \quad x_{jk} = 0 \ \ (1 \leq k < j \leq n)\},$$
$$A_n = \{y = \mathrm{diag}(y_1y_2\cdots y_n,\, y_2\cdots y_n,\, \cdots,\, y_n) \mid y_i \in \mathbb{R}_{>0} \ \ (1 \leq i \leq n)\},$$
$$K_n = \begin{cases} O(n) & (F = \mathbb{R} \text{ の場合}), \\ U(n) & (F = \mathbb{C} \text{ の場合}) \end{cases}$$

で定めると，G_n は $G_n = N_nA_nK_n$ と岩澤分解される．$n_1 + n_2 + \cdots + n_m = n$ となる $n_1, n_2, \cdots, n_m \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して，$P_{n_1,n_2,\cdots,n_m}$ を G_n の放物型部分群で Levi 部分群が $G_{n_1} \times G_{n_2} \times \cdots \times G_{n_m}$ と同型であり，$N_nA_n \subset P_{n_1,n_2,\cdots,n_m}$ を満たすものとする．G_n の Lie 代数の複素化 $\mathfrak{gl}(n,F) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ を $\mathfrak{g}_n$ と表記し，$\mathfrak{g}_n$ の普遍包絡環を $U(\mathfrak{g}_n)$ と表記する．

3 K_2 と K_3 の既約表現

この章では，K_2 と K_3 の既約表現の実現を与える．本稿では，埋め込み

$$K_2 \ni k \mapsto \left(\begin{array}{c|c} k & \\ \hline & 1 \end{array}\right) \in K_3 \qquad (3.1)$$

によって，K_2 を K_3 の部分群と見なすものとする．

3.1 $O(2)$ と $O(3)$ の既約表現

この節では，$F = \mathbb{R}$ とする．まず，$K_2 = O(2)$ の既約表現の実現を与える．$\Lambda_2 = \{(\lambda_1, 0) \mid \lambda_1 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\} \cup \{(0,1)\}$ とおく．$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda_2$ に対して，$S_\lambda = \{\pm\lambda_1\}$ とおく．さらに，$q \in S_\lambda$ に対して，z_1, z_2 の多項式 $v_{\lambda,q}$ を $v_{\lambda,q}(z_1,z_2) = (\mathrm{sgn}(q)z_1 + \sqrt{-1}z_2)^{\lambda_1}$ で定める．

$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda_2$ に対して，$V_\lambda^{(2)}$ を $\{v_{\lambda,q}\}_{q \in S_\lambda}$ によって張られる $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間とし，K_2 の $V_\lambda^{(2)}$ 上の作用を

$$(\tau_\lambda^{(2)}(k)p)(z_1, z_2) = \det(k)^{\lambda_2} p((z_1, z_2)k) \qquad (k \in K_2,\ p \in V_\lambda^{(2)})$$

で定める．このとき，$(\tau_\lambda^{(2)}, V_\lambda^{(2)})$ は K_2 の既約表現であり，K_2 の既約表現の同値類はこれらの表現で尽くされる．

次に，$K_3 = O(3)$ の既約表現の実現を与える．$\Lambda_3 = \{(\lambda_1, \lambda_2) \mid \lambda_1 \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ \lambda_2 \in \{0, 1\}\}$ とおく．$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda_3$ に対して，$\mathcal{P}_\lambda$ を z_1, z_2, z_3 の λ_1 次同次多項式のなす $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間とし，K_3 の $\mathcal{P}_\lambda$ 上の作用 T_λ を

$$(T_\lambda(k)p)(z_1, z_2, z_3) = (\det k)^{\lambda_2} p((z_1, z_2, z_3)k) \qquad (k \in K_3,\ p \in \mathcal{P}_\lambda)$$

で定める．$\lambda \in \Lambda_3$ に対して，$V_\lambda^{(3)} = \mathcal{P}_\lambda / (z_1^2 + z_2^2 + z_3^2)\mathcal{P}_{\lambda-(2,0)}$ 上の T_λ の商表現を $\tau_\lambda^{(3)}$ とする．ただし，$\lambda - (2, 0) \notin \Lambda_3$ の場合は $\mathcal{P}_{\lambda-(2,0)} = \{0\}$ とする．このとき，$(\tau_\lambda^{(3)}, V_\lambda^{(3)})$ は K_3 の既約表現であり，K_3 の既約表現の同値類はこれらの表現で尽くされる．

$\lambda \in \Lambda_3$ に対して，Λ_2 の部分集合 $\Sigma(\lambda)$ を

$$\Sigma(\lambda) = \{(0, \lambda_2)\} \cup \{(\mu_1, 0) \mid \mu_1 \in \mathbb{Z},\ 1 \leq \mu_1 \leq \lambda_1\}$$

で定め，$\mu = (\mu_1, \mu_2) \in \Sigma(\lambda)$ と $q \in S_\mu$ に対して，$v_{\mu,q}^\lambda$ を $\mathrm{sgn}(q)^{\lambda_2}(\mathrm{sgn}(q)z_1 + \sqrt{-1}z_2)^{\mu_1} z_3^{\lambda_1 - \mu_1}$ の自然な射 $\mathcal{P}_\lambda \to V_\lambda^{(3)}$ による像とする．このとき，$\{v_{\mu,q}^\lambda \mid q \in S_\mu,\ \mu \in \Sigma(\lambda)\}$ は $V_\lambda^{(3)}$ の基底であり，$v_{\mu,q}^\lambda \leftrightarrow v_{\mu,q}$ という対応によって，$V_\lambda^{(3)}$ と $\bigoplus_{\mu \in \Sigma(\lambda)} V_\mu^{(2)}$ は K_2-加群として同型になる．

3.2 $U(2)$ と $U(3)$ の既約表現

この節では，$F = \mathbb{C}$ とする．まず，$K_2 = U(2)$ の既約表現の実現を与える．$\Lambda_2 = \{(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{Z}^2 \mid \lambda_1 \geq \lambda_2\}$ とおく．$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda_2$ に対して，$V_\lambda^{(2)}$ を z_1, z_2 の $\lambda_1 - \lambda_2$ 次同次多項式のなす $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間とし，K_2 の $V_\lambda^{(2)}$ 上の作用を

$$(\tau_\lambda^{(2)}(k)p)(z_1, z_2) = \det(k)^{\lambda_2} p((z_1, z_2)k) \qquad (k \in K_2,\ p \in V_\lambda^{(2)})$$

で定める．このとき，$(\tau_\lambda^{(2)}, V_\lambda^{(2)})$ は K_2 の既約表現であり，K_2 の既約表現の同値類はこれらの表現で尽くされる．さらに，$V_\lambda^{(2)}$ の基底 $\{v_{\lambda,q}\}_{q \in S_\lambda}$ を

$$v_{\lambda,q}(z_1, z_2) = z_1^{\lambda_1 - \lambda_2 - q} z_2^q, \qquad S_\lambda = \{q \in \mathbb{Z} \mid 0 \leq q \leq \lambda_1 - \lambda_2\}$$

で定めておく．

次に，$K_3 = U(3)$ の既約表現の実現を与える．$\Lambda_3 = \{(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{Z}^3 \mid \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3\}$ とおく．$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \Lambda_3$ に対して，$\mathcal{P}_\lambda$ を $z_1, z_2, z_3, z_{23}, z_{13}, z_{12}$ の多項式で z_1, z_2, z_3 につ

いて $\lambda_1-\lambda_2$ 次同次，z_{23}, z_{13}, z_{12} について $\lambda_2-\lambda_3$ 次同次であるもののなす $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間とし，K_3 の $\mathcal{P}_\lambda$ 上の作用 T_λ を

$$(T_\lambda(k)p)(z_1,z_2,z_3,z_{23},z_{13},z_{12}) = \det(k)^{\lambda_3} p((z_1,z_2,z_3)k, (z_{23},z_{13},z_{12})\tilde{k}) \quad (k\in K_3,\ p\in\mathcal{P}_\lambda)$$

で定める．ここで，$\tilde{k}=(\tilde{k}_{ij})\in G_3$ は，$k=(k_{ij})\in K_3$ に対して，

$$\tilde{k}_{ij} = \begin{vmatrix} k_{i_1j_1} & k_{i_1j_2} \\ k_{i_2j_1} & k_{i_2j_2} \end{vmatrix} \qquad \left(\begin{array}{l} i_1,i_2,j_1,j_2\in\{1,2,3\} \text{ を } i\notin\{i_1,i_2\},\ j\notin\{j_1,j_2\} \\ i_1<i_2,\ j_1<j_2 \text{を満たすようにとる．}\end{array}\right)$$

で定める．$\lambda\in\Lambda_3$ に対して，$V_\lambda^{(3)} = \mathcal{P}_\lambda/(z_1z_{23}-z_2z_{13}+z_3z_{12})\mathcal{P}_{\lambda-(2,1,0)}$ 上の T_λ の商表現を $\tau_\lambda^{(3)}$ とする．ただし，$\lambda-(2,1,0)\notin\Lambda_3$ の場合は $\mathcal{P}_{\lambda-(2,1,0)}=\{0\}$ とする．このとき，$(\tau_\lambda^{(3)}, V_\lambda^{(3)})$ は K_3 の既約表現であり，K_3 の既約表現の同値類はこれらの表現で尽くされる．

$\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\Lambda_3$ に対して，Λ_2 の部分集合 $\Sigma(\lambda)$ を

$$\Sigma(\lambda) = \{(\mu_1,\mu_2)\in\mathbb{Z}^2 \mid \lambda_1\ge\mu_1\ge\lambda_2\ge\mu_2\ge\lambda_3\}$$

で定め，$\mu=(\mu_1,\mu_2)\in\Sigma(\lambda)$ と $q\in S_\mu$ に対して，$v_{\mu,q}^\lambda$ を

$$\binom{\mu_1-\mu_2}{q}^{-1} \sum_{i=\max\{0,\mu_2-\lambda_2+q\}}^{\min\{q,\mu_1-\lambda_2\}} \binom{\mu_1-\lambda_2}{i}\binom{\lambda_2-\mu_2}{q-i} z_1^{\mu_1-\lambda_2-i} z_{13}^{\lambda_2-\mu_2-q+i} z_2^i z_{23}^{q-i} z_3^{\lambda_1-\mu_1} z_{12}^{\mu_2-\lambda_3}$$

の自然な射 $\mathcal{P}_\lambda\to V_\lambda^{(3)}$ による像とする．このとき，$\{v_{\mu,q}^\lambda \mid q\in S_\mu,\ \mu\in\Sigma(\lambda)\}$ は $V_\lambda^{(3)}$ の基底であり，$v_{\mu,q}^\lambda \leftrightarrow v_{\mu,q}$ という対応によって，$V_\lambda^{(3)}$ と $\bigoplus_{\mu\in\Sigma(\lambda)} V_\mu^{(2)}$ は K_2-加群として同型になる．

4 Whittaker 関数

4.1 Whittaker 関数の定義

$l\in F^\times$ に対して，$C^\infty(N_n\backslash G_n;\psi_l)$ を

$$f(xg) = \psi_l(x_{12}+x_{23}+\cdots+x_{n-1\,n})f(g) \qquad (x=(x_{ij})\in N_n,\ g\in G_n)$$

を満たす滑らかな関数 $f\colon G_n\to\mathbb{C}$ 全体のなす $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間とし，G_n はこの空間に右移動で作用するものとする．

(Π, H_Π) を G_n の既約許容 Hilbert 表現とし，H_Π^∞ を H_Π の滑らかな元全体のなす部分空間とする．このとき，連続 G_n-準同型写像のなす $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間 $\mathrm{Hom}_{G_n}(H_\Pi^\infty, C^\infty(N_n\backslash G_n;\psi_l))$ は高々1次元である事が Shalika の論文 [Sha] で証明されている．H_Π^∞ から $C^\infty(N_n\backslash G_n;\psi_l)$ への非自明な連続 G_n-準同型写像が存在するとき，その像を $\mathcal{W}(\Pi,\psi_l)$ と書き，Π の Whittaker 模型と呼ぶ．また，$\mathcal{W}(\Pi,\psi_l)$ の元を Π に付随する Whittaker 関数という．$\mathcal{W}(\Pi,\psi_l)$ の K_n-有限な元全体のなす部分空間を $\mathcal{W}(\Pi,\psi_l)_{K_n}$ と表記する．

4.2 無限素点における局所 L-因子と局所 ϵ-因子

Weil 群 W_F の完全可約な有限次元表現に対応する L-因子と ϵ-因子について簡単に復習する．詳しくは，[HIM] の §5.1 と §5.2 を参照．

$F=\mathbb{R}$ の場合，Weil 群 $W_\mathbb{R}$ の既約有限次元表現の同値類は，L-因子と ϵ-因子が

$$L(s,\phi_\nu^\delta)=\Gamma_\mathbb{R}(s+\nu+\delta),\qquad \epsilon(s,\phi_\nu^\delta,\psi_1)=(\sqrt{-1})^\delta,$$
$$L(s,\phi_{\nu,\kappa})=\Gamma_\mathbb{C}(s+\nu),\qquad \epsilon(s,\phi_{\nu,\kappa},\psi_1)=(\sqrt{-1})^{\kappa+1}$$

で与えられる 1 次元表現 ϕ_ν^δ ($\nu\in\mathbb{C}$, $\delta\in\{0,1\}$) と 2 次元表現 $\phi_{\nu,\kappa}$ ($\nu\in\mathbb{C}$, $\kappa\in\mathbb{Z}_{>0}$) で尽くされる．$F=\mathbb{C}$ の場合，Weil 群 $W_\mathbb{C}$ の既約有限次元表現の同値類は，L-因子と ϵ-因子が

$$L(s,\phi_\nu^d)=\Gamma_\mathbb{C}(s+\nu+|d|/2),\qquad \epsilon(s,\phi_\nu^d,\psi_1)=(\sqrt{-1})^{|d|}$$

で与えられる 1 次元表現 ϕ_ν^d ($\nu\in\mathbb{C}$, $d\in\mathbb{Z}$) で尽くされる．

W_F の有限次元表現 ϕ が $\phi\simeq\bigoplus_{i=1}^m\phi_i$ と既約分解されるとき，その L-因子と ϵ-因子を

$$L(s,\phi)=\prod_{i=1}^m L(s,\phi_i),\qquad \epsilon(s,\phi,\psi_1)=\prod_{i=1}^m\epsilon(s,\phi_i,\psi_1)$$

で定義する．局所 Langlands 対応により，G_n の既約許容表現 Π は W_F の完全可約な n 次元表現 $\phi[\Pi]$ に対応しており，$\phi[\Pi]$ は Π の Langlands パラメーターと呼ばれる．Π と π をそれぞれ G_3 と G_2 の既約許容表現とするとき，$\Pi\times\pi$ に関する局所 L-因子と局所 ϵ-因子を

$$L(s,\Pi\times\pi)=L(s,\phi[\Pi]\otimes\phi[\pi]),\qquad \epsilon(s,\Pi\times\pi,\psi_1)=\epsilon(s,\phi[\Pi]\otimes\phi[\pi],\psi_1)$$

で定義する．Weil 群の既約有限次元表現のテンソル積は，$F=\mathbb{R}$ の場合は

$$\phi_\nu^\delta\otimes\phi_{\nu'}^{\delta'}\simeq\phi_{\nu+\nu'}^{\delta-\delta'}\quad(\delta\geq\delta'),\qquad \phi_{\nu,\kappa}\otimes\phi_{\nu'}^{\delta'}\simeq\phi_{\nu+\nu',\kappa},$$
$$\phi_{\nu,\kappa}\otimes\phi_{\nu',\kappa'}\simeq\phi_{\nu+\nu',\kappa+\kappa'}\oplus\phi_{\nu+\nu'-\kappa',\kappa-\kappa'}\quad(\kappa>\kappa'),$$
$$\phi_{\nu,\kappa}\otimes\phi_{\nu',\kappa}\simeq\phi_{\nu+\nu',2\kappa}\oplus\phi_{\nu+\nu'-\kappa}^0\oplus\phi_{\nu+\nu'-\kappa}^1$$

と既約分解され，$F=\mathbb{C}$ の場合は $\phi_\nu^d\otimes\phi_{\nu'}^{d'}\simeq\phi_{\nu+\nu'}^{d+d'}$ となる．これらの既約分解を用いると，$\Pi\times\pi$ に関する局所 L-因子と局所 ϵ-因子を明示的に書き下す事ができる．

4.3 Whittaker 模型を持つ G_n の既約許容 Hilbert 表現

Whittaker 模型を持つ G_n の既約許容 Hilbert 表現は一般主系列表現と $(\mathfrak{g}_n,K_n)$-加群として同型になる事が知られている．(例えば，[Ja] の補題 2.5 を参照．) ここでは，$n=2,3$ の場合に，それらの表現の K_n-タイプや Langlands パラメーターについてまとめておく．

まず，$F=\mathbb{R}$ の場合について述べる．次のような G_1 の表現と G_2 の表現を考える：

- $\nu \in \mathbb{C}$ と $\delta \in \{0,1\}$ に対して，$\chi_{(\nu,\delta)}\colon G_1 \to \mathbb{C}^\times$ を $\chi_{(\nu,\delta)}(t) = (t/|t|)^\delta |t|_{\mathbb{R}}^\nu \quad (t \in G_1)$ で定義される指標とする．
- $\nu \in \mathbb{C}$ と $\kappa \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ に対して，$D_{(\nu,\kappa)}(t1_2) = t^{2\nu}$ $(t \in \mathbb{R}_{>0})$, $D_{(\nu,\kappa)}|_{SL(2,\mathbb{R})} \simeq D_\kappa^+ \oplus D_\kappa^-$ という性質で特徴づけられる G_2 の表現を $D_{(\nu,\kappa)}$ とする．ただし，D_κ^+ と D_κ^- はそれぞれ Blattner パラメーターが κ と $-\kappa$ である $SL(2,\mathbb{R})$ の離散系列表現とする．

Whittaker 模型を持つ G_3 の既約許容 Hilbert 表現 Π に対して，次のいずれかが成立する：

(1) ある $\nu_1, \nu_2, \nu_3 \in \mathbb{C}$ と $\delta_1 \geq \delta_2 \geq \delta_3$ をみたす $\delta_1, \delta_2, \delta_3 \in \{0,1\}$ が存在して，Π は主系列表現 $\mathrm{Ind}_{P_{1,1,1}}^{G_3}(\chi_{(\nu_1,\delta_1)} \boxtimes \chi_{(\nu_2,\delta_2)} \boxtimes \chi_{(\nu_3,\delta_3)})$ と $(\mathfrak{g}_3, K_3)$-加群として同型になる．このとき，Π の極小 K_3-タイプは $\tau^{(3)}_{(\delta_1-\delta_3,\delta_2)}$ であり，$\phi[\Pi] = \phi_{\nu_1}^{\delta_1} \oplus \phi_{\nu_2}^{\delta_2} \oplus \phi_{\nu_3}^{\delta_3}$ である．

(2) ある $\nu_1, \nu_2 \in \mathbb{C}$, $\kappa \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$, $\delta \in \{0,1\}$ が存在して，Π は一般主系列表現 $\mathrm{Ind}_{P_{2,1}}^{G_3}(D_{(\nu_1,\kappa)} \boxtimes \chi_{(\nu_2,\delta)})$ と $(\mathfrak{g}_3, K_3)$-加群として同型になる．このとき，Π の極小 K_3-タイプは $\tau^{(3)}_{(\kappa,\delta)}$ であり，$\phi[\Pi] = \phi_{\nu_1+(\kappa-1)/2,\,\kappa-1} \oplus \phi_{\nu_2}^{\delta}$ である．

Whittaker 模型を持つ G_2 の既約許容 Hilbert 表現 π に対して，次のいずれかが成立する：

(1) ある $\nu_1', \nu_2' \in \mathbb{C}$ と $\delta_1' \geq \delta_2'$ をみたす $\delta_1', \delta_2' \in \{0,1\}$ が存在して，π は主系列表現 $\mathrm{Ind}_{P_{1,1}}^{G_2}(\chi_{(\nu_1',\delta_1')} \boxtimes \chi_{(\nu_2',\delta_2')})$ と $(\mathfrak{g}_2, K_2)$-加群として同型になる．このとき，

$$\Lambda(\pi) = \{(\delta_1'-\delta_2', \delta_2')\} \cup \{(\lambda_1', 0) \mid \lambda_1' \in \delta_1' - \delta_2' + 2\mathbb{Z}_{>0}\}$$

とおくと，π の K_2-タイプは $\tau^{(2)}_{\lambda'}$ $(\lambda' \in \Lambda(\pi))$ であり，$\phi[\pi] = \phi_{\nu_1'}^{\delta_1'} \oplus \phi_{\nu_2'}^{\delta_2'}$ である．

(2) ある $\nu' \in \mathbb{C}$ と $\kappa' \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ が存在して，π は本質的離散系列表現 $D_{(\nu',\kappa')}$ と $(\mathfrak{g}_2, K_2)$-加群として同型になる．このとき，$\Lambda(\pi) = \{(\lambda_1', 0) \mid \lambda_1' \in \kappa' + 2\mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ とおくと，π の K_2-タイプは $\tau^{(2)}_{\lambda'}$ $(\lambda' \in \Lambda(\pi))$ であり，$\phi[\pi] = \phi_{\nu'+(\kappa'-1)/2,\,\kappa'-1}$ である．

次に，$F = \mathbb{C}$ の場合について述べる．$\nu \in \mathbb{C}$ と $d \in \mathbb{Z}$ に対して，$\chi_{[\nu,d]}\colon G_1 \to \mathbb{C}^\times$ を $\chi_{[\nu,d]}(t) = (t/|t|)^d |t|_{\mathbb{C}}^\nu \quad (t \in G_1)$ で定義される指標とする．Whittaker 模型を持つ G_3 の既約許容 Hilbert 表現 Π に対して，ある $\nu_1, \nu_2, \nu_3 \in \mathbb{C}$ と $d_1 \geq d_2 \geq d_3$ をみたす $d_1, d_2, d_3 \in \mathbb{Z}$ が存在して，Π は主系列表現 $\mathrm{Ind}_{P_{1,1,1}}^{G_3}(\chi_{[\nu_1,d_1]} \boxtimes \chi_{[\nu_2,d_2]} \boxtimes \chi_{[\nu_3,d_3]})$ と $(\mathfrak{g}_3, K_3)$-加群として同型になる．このとき，Π の極小 K_3-タイプは $\tau^{(3)}_{(d_1,d_2,d_3)}$ であり，$\phi[\Pi] = \phi_{\nu_1}^{d_1} \oplus \phi_{\nu_2}^{d_2} \oplus \phi_{\nu_3}^{d_3}$ である．Whittaker 模型を持つ G_2 の既約許容 Hilbert 表現 π に対して，ある $\nu_1', \nu_2' \in \mathbb{C}$ と $d_1' \geq d_2'$ をみたす $d_1', d_2' \in \mathbb{Z}$ が存在して，π は主系列表現 $\mathrm{Ind}_{P_{1,1}}^{G_2}(\chi_{[\nu_1',d_1']} \boxtimes \chi_{[\nu_2',d_2']})$ と $(\mathfrak{g}_2, K_2)$-加群として同型になる．このとき，$\Lambda(\pi) = \{(d_1'+m, d_2'-m) \mid m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ とおくと，π の K_2-タイプは $\tau^{(2)}_{\lambda'}$ $(\lambda' \in \Lambda(\pi))$ であり，$\phi[\pi] = \phi_{\nu_1'}^{d_1'} \oplus \phi_{\nu_2'}^{d_2'}$ である．

4.4 Whittaker 関数の明示式

この節では，$n=2,3$ の場合に，G_n 上の Whittaker 関数の動径成分の明示式を紹介する．

まず，$n=3$ の場合について，論文 [HIM] で与えた明示式を紹介する．(Π, H_Π) を Whittaker 模型を持つ G_3 の既約許容 Hilbert 表現とし，$\lambda \in \Lambda_3$ を $(\tau_\lambda^{(3)}, V_\lambda^{(3)})$ が Π の極小 K_3-タイプになるようにとる．極小 K_3-タイプは $\Pi|_{K_3}$ に重複度 1 で現れるから，$V_\lambda^{(3)}$ から $\mathcal{W}(\Pi,\psi_l)_{K_3}$ への K_3-準同型写像は定数倍を除いて唯 1 つである．適当に正規化した $V_\lambda^{(3)}$ から $\mathcal{W}(\Pi,\psi_l)_{K_3}$ への非自明な K_3-準同型写像を $\mathbf{W}_\Pi$ と書く事にする．

$F=\mathbb{R}$ の場合，v が単項式 $z_1^{r_1}z_2^{r_2}z_3^{r_3}$ の自然な射 $\mathcal{P}_\lambda \to V_\lambda^{(3)}$ による像であるとき，

$$\mathbf{W}_\Pi(v)(y) = (\sqrt{-1}l/|l|)^{r_1-r_3} y_1y_2 \frac{(y_2y_3)^\gamma}{(2\pi\sqrt{-1})^2}\int_{[\alpha_2]}\int_{[\alpha_1]} \frac{\Gamma_v(s_1,s_2)(|l|y_1)^{-s_1}(|l|y_2)^{-s_2}}{\Gamma_\mathbb{R}(s_1+s_2+r_1+r_3)} ds_1ds_2$$
$$(y=\mathrm{diag}(y_1y_2y_2, y_2y_3, y_3)\in A_3)$$

となる．ここで，$\int_{[\alpha]}$ の積分路は $\alpha-\sqrt{-1}\infty$ から $\alpha+\sqrt{-1}\infty$ への実軸と垂直な直線とし，α_1,α_2 は十分大きい実数とする．また，γ と $\Gamma_v(s_1,s_2)$ は次で与えられる：

(1) $\Pi \simeq \mathrm{Ind}_{P_{1,1,1}}^{G_3}(\chi_{(\nu_1,\delta_1)}\boxtimes\chi_{(\nu_2,\delta_2)}\boxtimes\chi_{(\nu_3,\delta_3)})$ $(\delta_1\geq\delta_2\geq\delta_3)$ のとき，$\gamma=\nu_1+\nu_2+\nu_3$,

$$\Gamma_v(s_1,s_2)=\prod_{i=1}^{3}\Gamma_\mathbb{R}\bigl(s_1+\nu_i+r_1+(-1)^{r_1}|\delta_i-\delta_2|\bigr)\Gamma_\mathbb{R}\bigl(s_2-\nu_i+r_3+(-1)^{r_3}|\delta_i-\delta_2|\bigr).$$

(2) $\Pi\simeq\mathrm{Ind}_{P_{2,1}}^{G_3}(D_{(\nu_1,\kappa)}\boxtimes\chi_{(\nu_2,\delta)})$ のとき，$\gamma=2\nu_1+\nu_2$,

$$\Gamma_v(s_1,s_2)=\Gamma_\mathbb{C}\left(s_1+\nu_1+\frac{\kappa-1}{2}\right)\Gamma_\mathbb{C}\left(s_2-\nu_1+\frac{\kappa-1}{2}\right)$$
$$\times\Gamma_\mathbb{R}(s_1+\nu_2+r_1)\Gamma_\mathbb{R}(s_2-\nu_2+r_3).$$

$F=\mathbb{C}$ の場合，$\Pi\simeq\mathrm{Ind}_{P_{1,1,1}}^{G_3}(\chi_{[\nu_1,d_1]}\boxtimes\chi_{[\nu_2,d_2]}\boxtimes\chi_{[\nu_3,d_3]})$ $(d_1\geq d_2\geq d_3)$ であり，v が単項式 $z_1^{r_1}z_{13}^{r_{13}}z_2^{r_2}z_{23}^{r_{23}}z_3^{r_3}z_{12}^{r_{12}}$ の自然な射 $\mathcal{P}_\lambda\to V_\lambda^{(3)}$ による像であるとき，

$$\mathbf{W}_\Pi(v)(y) = (\sqrt{-1}l/|l|)^{l_1+l_{12}-l_3-l_{23}}y_1^2y_2^2(y_2y_3)^{2\nu_1+2\nu_2+2\nu_3}$$
$$\times\frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^2}\int_{[\alpha_2]}\int_{[\alpha_1]}\frac{\Gamma_v(s_1,s_2)(|l|y_1)^{-2s_1}(|l|y_2)^{-2s_2}}{\Gamma_\mathbb{C}(s_1+s_2+(r_1+r_3+r_{12}+r_{23})/2)}ds_1ds_2$$
$$(y=\mathrm{diag}(y_1y_2y_2,y_2y_3,y_3)\in A_3)$$

となる．ここで，α_1,α_2 は十分大きい実数とし，$\Gamma_v(s_1,s_2)$ は次で与えられる：

$$\Gamma_v(s_1,s_2)=\Gamma_\mathbb{C}(s_1+\nu_1+(r_2+r_3+r_{23})/2)\Gamma_\mathbb{C}(s_2-\nu_1+(r_1+r_2+r_{12})/2)$$
$$\times\Gamma_\mathbb{C}(s_1+\nu_2+(r_1+r_{23})/2)\Gamma_\mathbb{C}(s_2-\nu_2+(r_3+r_{12})/2)$$

$$\times \Gamma_{\mathbb{C}}\left(s_1+\nu_3+(r_1+r_{12}+r_{13})/2\right)\Gamma_{\mathbb{C}}\left(s_2-\nu_3+(r_3+r_{13}+r_{23})/2\right).$$

次に，$n=2$ の場合について述べる．(π, H_π) を Whittaker 模型を持つ G_2 の既約許容 Hilbert 表現とし，$\lambda' \in \Lambda(\pi)$ とする．K_2-タイプ $\tau^{(2)}_{\lambda'}$ は $\pi|_{K_2}$ に重複度 1 で現れるから，$V^{(2)}_{\lambda'}$ から $\mathcal{W}(\Pi,\psi_l)_{K_2}$ への K_2-準同型写像は定数倍を除いて唯 1 つである．適当に正規化した $V^{(2)}_{\lambda'}$ から $\mathcal{W}(\Pi,\psi_l)_{K_2}$ への非自明な K_2-準同型写像を $\mathbf{W}_{\pi,\lambda'}$ と書く事にする．

$F=\mathbb{R}$ の場合，任意の $\lambda' \in \Lambda(\pi)$ と $q' \in S_{\lambda'}$ に対して，$\mathbf{W}_{\pi,\lambda'}(v_{\lambda',q'})|_{A_2}$ の明示式は様々な文献に書かれている．ここでは，本稿での計算に必要な結果のみ述べておく．

(1) $\pi \simeq \mathrm{Ind}^{G_2}_{P_{1,1}}(\chi_{(\nu'_1,\delta'_1)} \boxtimes \chi_{(\nu'_2,\delta'_2)})$ $(\delta'_1 \geq \delta'_2)$ とする．

- $\delta'_1=\delta'_2$ のとき，$q' \in S_{(2,0)}$ と $y=\mathrm{diag}(y_1y_2, y_2) \in A_2$ に対して，

$$\mathbf{W}_{\pi,(0,\delta'_2)}(v_{(0,\delta'_2),0})(y) = \frac{y_1^{1/2} y_2^{\nu'_1+\nu'_2}}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{[\alpha]} \Gamma_{\mathbb{R}}(s+\nu'_1)\Gamma_{\mathbb{R}}(s+\nu'_2)(|l|y_1)^{-s}ds,$$

$$\begin{aligned}\mathbf{W}_{\pi,(2,0)}(v_{(2,0),q'})(y) =& \mathrm{sgn}(q')^{\delta'_1}\frac{y_1^{1/2} y_2^{\nu'_1+\nu'_2}}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{[\alpha]} \{\Gamma_{\mathbb{R}}(s+\nu'_1+2)\Gamma_{\mathbb{R}}(s+\nu'_2)\\ &+(q'l/|l|)\Gamma_{\mathbb{R}}(s+\nu'_1+1)\Gamma_{\mathbb{R}}(s+\nu'_2+1)+\Gamma_{\mathbb{R}}(s+\nu'_1)\Gamma_{\mathbb{R}}(s+\nu'_2+2)\\ &-(2\pi)^{-1}\Gamma_{\mathbb{R}}(s+\nu'_1)\Gamma_{\mathbb{R}}(s+\nu'_2)\}(|l|y_1)^{-s}ds.\end{aligned}$$

- $(\delta'_1,\delta'_2)=(1,0)$ のとき，$q' \in S_{(1,0)}$ と $y=\mathrm{diag}(y_1y_2,y_2) \in A_2$ に対して，

$$\begin{aligned}\mathbf{W}_{\pi,(1,0)}(v_{(1,0),q'})(y) =& \frac{y_1^{1/2} y_2^{\nu'_1+\nu'_2}}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{[\alpha]} \{\Gamma_{\mathbb{R}}(s+\nu'_1+1)\Gamma_{\mathbb{R}}(s+\nu'_2)\\ &+(q'l/|l|)\Gamma_{\mathbb{R}}(s+\nu'_1)\Gamma_{\mathbb{R}}(s+\nu'_2+1)\}(|l|y_1)^{-s}ds.\end{aligned}$$

(2) $\pi \simeq D_{(\nu',\kappa')}$ とする．$q' \in S_{(\kappa',0)}$ と $y=\mathrm{diag}(y_1y_2,y_2) \in A_2$ に対して，

$$\mathbf{W}_{\pi,(\kappa',0)}(v_{(\kappa',0),q'})(y) = \begin{cases} \dfrac{y_1^{1/2}y_2^{2\nu'}}{2\pi\sqrt{-1}} \displaystyle\int_{[\alpha]} \Gamma_{\mathbb{C}}\left(s+\nu'+\frac{\kappa'-1}{2}\right)(|l|y_1)^{-s}ds & \text{if } lq'>0,\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

上の明示式において，α は十分大きい実数とする．

$F=\mathbb{C}$ の場合，極小 K_2-タイプにおける Whittaker 関数の明示式は Popa の論文 [Po] で与えられている．Popa の明示式に $U(\mathfrak{g}_2)$ の元を作用させる事で，任意の K_2-タイプにおける Whittaker 関数の明示式が得られる．$\pi \simeq \mathrm{Ind}^{G_2}_{P_{1,1}}(\chi_{[\nu'_1,d'_1]} \boxtimes \chi_{[\nu'_2,d'_2]})$ $(d'_1 \geq d'_2)$ とし，$\lambda'=(\lambda'_1,\lambda'_2) \in \Lambda(\pi)$ とする．このとき，$q' \in S_{\lambda'}$ と $y=\mathrm{diag}(y_1y_2,y_2) \in A_2$ に対して，

$$\begin{aligned}\mathbf{W}_{\pi,\lambda'}(v_{\lambda',q'})(y) =& (\sqrt{-1}l/|l|)^{\lambda'_1-q'} y_1 y_2^{2\nu'_1+2\nu'_2} \sum_{i=0}^{q'} \binom{q'}{i} \frac{(d'_1-\lambda'_1)_i\left(-\nu'_1+\nu'_2-\frac{\lambda'_1-\lambda'_2}{2}\right)_i}{(-\lambda'_1+\lambda'_2)_i(2\pi|l|y_1)^i}\\ &\times \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{[\alpha]} \Gamma_{\mathbb{C}}\left(s+\nu'_1-\frac{d'_1-\lambda'_1-q'+i}{2}\right)\Gamma_{\mathbb{C}}\left(s+\nu'_2+\frac{d'_1-\lambda'_2-q'+i}{2}\right)(|l|y_1)^{-2s}ds.\end{aligned}$$

ここで，$(a)_i=\Gamma(a+i)/\Gamma(a)$ は Pochhammer 記号とし，α は十分大きい実数とする．

5 $GL(3,F)\times GL(2,F)$ に関する局所ゼータ積分

5.1 主結果

Π と π をそれぞれ Whittaker 模型を持つ G_3 と G_2 の既約許容 Hilbert 表現とする．$W\in\mathcal{W}(\Pi,\psi_l)_{K_3}$ と $W'\in\mathcal{W}(\pi,\psi_{-l})_{K_2}$ に対して，局所ゼータ積分 $Z(s,W,W')$ を

$$Z(s,W,W')=\int_{N_2\backslash G_2} W\left(\begin{array}{c|c} h & \\ \hline & 1\end{array}\right) W'(h)|\det(h)|_F^{s-\frac{1}{2}}\,d\dot{h}$$

で定義する．ここで，$d\dot{h}$ は $N_2\backslash G_2$ 上の右 G_2-不変測度とする．Jacquet と Shalika は論文 [JS] において，任意の $W\in\mathcal{W}(\Pi,\psi_1)_{K_3}$ と $W'\in\mathcal{W}(\pi,\psi_{-1})_{K_2}$ に対して，$\dfrac{Z(s,W,W')}{L(s,\Pi\times\pi)}$ は整関数であり，局所関数等式

$$\frac{Z(1-s,\tilde{W},\tilde{W'})}{L(1-s,\tilde{\Pi}\times\tilde{\pi})}=\epsilon(s,\Pi\times\pi,\psi_1)\frac{Z(s,W,W')}{L(s,\Pi\times\pi)}$$

を満たす事を示した．ここで，$\tilde{\Pi}$ と $\tilde{\pi}$ はそれぞれ Π と π の反傾表現とし，$\tilde{W}$ と $\tilde{W'}$ はそれぞれ次の式で定義される $\mathcal{W}(\tilde{\Pi},\psi_{-1})_{K_3}$ と $\mathcal{W}(\tilde{\pi},\psi_1)_{K_2}$ の元とする：

$$\tilde{W}(g)=W\left(\begin{pmatrix} & & 1\\ & 1 & \\ 1 & & \end{pmatrix}{}^tg^{-1}\right),\quad \tilde{W'}(h)=W'\left(\begin{pmatrix} & 1\\ 1 & \end{pmatrix}{}^th^{-1}\right)\quad (g\in G_3,\ h\in G_2).$$

本稿の主結果は次の定理である：

定理 5.1. Π と π をそれぞれ *Whittaker* 模型を持つ G_3 と G_2 の既約許容 *Hilbert* 表現とする．このとき，

$$Z(s,W,W')=L(s,\Pi\times\pi)$$

を満たす $W\in\mathcal{W}(\Pi,\psi_1)_{K_3}$ と $W'\in\mathcal{W}(\pi,\psi_{-1})_{K_2}$ が存在する．

この定理は，適切な Whittaker 関数を選び，局所ゼータ積分を §4.4 の Whittaker 関数の明示式と次の Barnes' の補題を用いて計算する事で証明される：

補題 5.2 ([Ba, §1.7])**.** $-\min\{\mathrm{Re}(a),\mathrm{Re}(b)\}<\alpha<\min\{\mathrm{Re}(c),\mathrm{Re}(d)\}$ を満たす複素数 a,b,c,d と実数 α に対して，次の等式が成立する：

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{[\alpha]}\Gamma(s+a)\Gamma(s+b)\Gamma(-s+c)\Gamma(-s+d)ds=\frac{\Gamma(a+c)\Gamma(a+d)\Gamma(b+c)\Gamma(b+d)}{\Gamma(a+b+c+d)}.$$

どのように Whittaker 関数を選べば良いかについては，次の節で述べる．

5.2 局所 L-因子を与える Whittaker 関数

$\rho \in \Lambda_2$ に対して，$(\tilde{\tau}_\rho^{(2)}, \tilde{V}_\rho^{(2)})$ を $\tau_\rho^{(2)}$ の反傾表現とし，$\{\tilde{v}_{\rho,q}\}_{q\in S_\rho}$ を $\{v_{\rho,q}\}_{q\in S_\rho}$ の双対基底とする．また，$\rho = (\rho_1, \rho_2) \in \Lambda_2$ と $q \in S_\rho$ に対して，$\tilde{\rho} \in \Lambda_2$, $\tilde{q} \in S_{\tilde{\rho}}$, $c(\rho, q) \in \mathbb{C}$ を

$$\begin{array}{llll} \tilde{\rho} = \rho, & \tilde{q} = -q, & c(\rho,q) = 1 & (F = \mathbb{R} \text{ の場合}), \\ \tilde{\rho} = (-\rho_2, -\rho_1), & \tilde{q} = \rho_1 - \rho_2 - q, & c(\rho,q) = (-1)^q \begin{pmatrix} \rho_1 - \rho_2 \\ q \end{pmatrix} & (F = \mathbb{C} \text{ の場合}) \end{array}$$

と定義する．このとき，$\tilde{v}_{\rho,q} \leftrightarrow c(\rho,q) v_{\tilde{\rho},\tilde{q}}$ という対応によって，$\tilde{V}_\rho^{(2)} \simeq V_{\tilde{\rho}}^{(2)}$ となる．

Π と π をそれぞれ Whittaker 模型を持つ G_3 と G_2 の既約許容 Hilbert 表現とする．$\lambda' \in \Lambda(\pi)$ に対して，K_2-準同型写像 $\mathbf{W}_{\pi,\lambda'}\colon V_{\lambda'}^{(2)} \to \mathcal{W}(\pi, \psi_{-1})_{K_2}$ を §4.4 のようにとる．また，埋め込み (3.1) によって，K_2 を K_3 の部分群と見なす．このとき，Schur の直交関係式により，次の補題が得られる．

補題 5.3. 上の記法を用いる．$\rho \in \Lambda_2$ とし，$\mathbf{W}\colon V_\rho^{(2)} \to \mathcal{W}(\Pi, \psi_1)_{K_3}$ を K_2-準同型写像とする．$q \in S_\rho$ と $q' \in S_{\lambda'}$ に対して，$Z(s, \mathbf{W}(v_{\rho,q}), \mathbf{W}_{\pi,\lambda'}(v_{\lambda',q'}))$ は，$(\lambda', q') = (\tilde{\rho}, \tilde{q})$ ならば

$$\frac{1}{\dim V_\rho^{(2)}} \sum_{r \in S_\rho} \frac{c(\rho,r)}{c(\rho,q)} \int_0^\infty \int_0^\infty \mathbf{W}(v_{\rho,r}) \left(\begin{array}{c|c} y & \\ \hline & 1 \end{array} \right) \mathbf{W}_{\pi,\tilde{\rho}}(v_{\tilde{\rho},\tilde{r}})(y) |y_1|_F^{s-\frac{3}{2}} |y_2|_F^{2s-1} \frac{dy_1}{y_1} \frac{dy_2}{y_2}$$

と等しくなり，それ以外ならば 0 になる．ただし，$y = \mathrm{diag}(y_1 y_2, y_2) \in A_2$ とする．

$\lambda \in \Lambda_3$ を $\tau_\lambda^{(3)}$ が Π の極小 K_3-タイプになるようにとる．§4.4 で与えた Π に付随する Whittaker 関数の明示式は，極小 K_3-タイプ $\tau_\lambda^{(3)}$ におけるもののみである．しかし，補題 5.3 より，$\tilde{\rho} \in \Lambda(\pi)$ を満たす $\rho \in \Sigma(\lambda)$ が存在しない場合，極小 K_3-タイプ $\tau_\lambda^{(3)}$ における Π に付随する Whittaker 関数 W と $W' \in \mathcal{W}(\pi, \psi_{-1})_{K_2}$ をどのように選んでも $Z(s, W, W') = 0$ となってしまう．以下では，この問題を解決するために，様々な $\rho \in \Lambda_2$ に対して，K_2-準同型写像 $\mathbf{W}\colon V_\rho^{(2)} \to \mathcal{W}(\Pi, \psi_1)_{K_3}$ を構成する方法を紹介する．

まず，Λ_2 の部分集合 $\Sigma_\mathfrak{n}$ を

$$\Sigma_\mathfrak{n} = \begin{cases} \{(\sigma_1, 0) \mid \sigma_1 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\} & (F = \mathbb{R} \text{ の場合}), \\ \{(\sigma_1, \sigma_2) \in \mathbb{Z}^2 \mid \sigma_1 \geq 0 \geq \sigma_2\} & (F = \mathbb{C} \text{ の場合}) \end{cases}$$

で定める．$\sigma = (\sigma_1, \sigma_2) \in \Sigma_\mathfrak{n}$ と $r \in S_\sigma$ に対して，$U(\mathfrak{g}_3)$ の元 $E_{\sigma,r}$ を

- $F = \mathbb{R}$ の場合： $E_{\sigma,r} = (E_{23} \otimes 1 - \mathrm{sgn}(r) E_{13} \otimes \sqrt{-1})^{\sigma_1}$,
- $F = \mathbb{C}$ の場合：

$$\begin{aligned} E_{\sigma,r} = \sum_{i=\max\{0, r-\sigma_1\}}^{\min\{-\sigma_2, r\}} & \begin{pmatrix} \sigma_1 - \sigma_2 - r \\ -\sigma_2 - i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ i \end{pmatrix} \\ & \times (E_{13} \otimes 1 - \sqrt{-1} E_{13} \otimes \sqrt{-1})^{\sigma_1 - r + i} (E_{23} \otimes 1 - \sqrt{-1} E_{23} \otimes \sqrt{-1})^{r-i} \\ & \times (E_{23} \otimes 1 + \sqrt{-1} E_{23} \otimes \sqrt{-1})^{-\sigma_2 - i} (-E_{13} \otimes 1 - \sqrt{-1} E_{13} \otimes \sqrt{-1})^{i} \end{aligned}$$

で定義する．$\sigma \in \Sigma_{\mathfrak{n}}$ に対して，$\mathcal{D}_\sigma$ を $E_{\sigma,r}$ $(r \in S_\sigma)$ によって張られる $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間とする．このとき，$\mathcal{D}_\sigma$ は K_2 の随伴作用 Ad で閉じており，$(\mathrm{Ad}, \mathcal{D}_\sigma)$ は K_2 の既約表現となる．さらに，$E_{\sigma,r} \leftrightarrow v_{\sigma,r}$ という対応によって，$\mathcal{D}_\sigma \simeq V_\sigma^{(2)}$ となる．

K_3-準同型写像 $\mathbf{W}_\Pi \colon V_\lambda^{(3)} \to \mathcal{W}(\Pi, \psi_1)_{K_3}$ を §4.4 のようにとる．$\sigma = (\sigma_1, \sigma_2) \in \Sigma_{\mathfrak{n}}$ と $\mu \in \Sigma(\lambda)$ に対して，K_2-準同型写像 $\mathbf{W}_\Pi^{\sigma,\mu} \colon V_\sigma^{(2)} \otimes_{\mathbb{C}} V_\mu^{(2)} \to \mathcal{W}(\Pi, \psi_1)_{K_3}$ を

$$\mathbf{W}_\Pi^{\sigma,\mu}(v_{\sigma,r} \otimes v_{\mu,q}) = E_{\sigma,r}\mathbf{W}_\Pi(v_{\mu,q}^\lambda) \qquad (r \in S_\sigma,\ q \in S_\mu)$$

で定める．このとき，$y = \mathrm{diag}(y_1y_2y_3, y_2y_3, y_3) \in A_3$ に対して，

$$\mathbf{W}_\Pi^{\sigma,\mu}(v_{\sigma,r} \otimes v_{\mu,q})(y) = \begin{cases} 0 & (F = \mathbb{C}\text{かつ}\,r \neq \sigma_1\text{の場合}), \\ (2\pi\sqrt{-1}y_2)^{\sigma_1-\sigma_2}\mathbf{W}_\Pi(v_{\mu,q}^\lambda)(y) & (\text{その他の場合}) \end{cases}$$

より，$\mathbf{W}_\Pi^{\sigma,\mu}(v_{\sigma,r} \otimes v_{\mu,q})|_{A_3}$ の明示式は $\mathbf{W}_\Pi(v_{\mu,q}^\lambda)|_{A_3}$ の明示式から得られる事に注意する．

$V_\sigma^{(2)} \otimes_{\mathbb{C}} V_\mu^{(2)}$ は，K_2-加群として重複度 1 で既約分解される事が知られている．すなわち，Λ_2 のある部分集合 $\Sigma(\sigma,\mu)$ が存在して，$V_\sigma^{(2)} \otimes_{\mathbb{C}} V_\mu^{(2)} \simeq \bigoplus_{\rho \in \Sigma(\sigma,\mu)} V_\rho^{(2)}$ となる．$\rho \in \Sigma(\sigma,\mu)$ に対して，$I_\rho^{\sigma,\mu} \colon V_\rho^{(2)} \to V_\sigma^{(2)} \otimes_{\mathbb{C}} V_\mu^{(2)}$ を適当に正規化した非自明な K_2-準同型写像とする．K_2-準同型写像 $\mathbf{W}_{\Pi,\rho}^{\sigma,\mu} \colon V_\rho^{(2)} \to \mathcal{W}(\Pi, \psi_1)_{K_3}$ を $\mathbf{W}_{\Pi,\rho}^{\sigma,\mu} = \mathbf{W}_\Pi^{\sigma,\mu} \circ I_\rho^{\sigma,\mu}$ と定義する．

$F = \mathbb{R}$ の場合，$\sigma = (\sigma_1, 0) \in \Sigma_{\mathfrak{n}}$ と $\mu = (\mu_1, \mu_2) \in \Sigma(\lambda)$ に対して，

$$\Sigma(\sigma,\mu) = \begin{cases} \{(2\sigma_1, 0), (0,0), (0,1)\} & (\sigma_1 = \mu_1 > 0\text{ の場合}), \\ \{(0, \mu_2)\} & (\sigma_1 = \mu_1 = 0\text{ の場合}), \\ \{(\sigma_1 + \mu_1, 0)\} & (\sigma_1 \neq \mu_1\text{かつ}\,\sigma_1\mu_1 = 0\text{ の場合}), \\ \{(\sigma_1 + \mu_1, 0), (|\sigma_1 - \mu_1|, 0)\} & (\text{その他の場合}) \end{cases}$$

である．さらに，$\rho \in \Sigma(\sigma,\mu)$ に対して，$I_\rho^{\sigma,\mu}$ の明示的な表示は以下のようになる：

- $\sigma_1 \neq \mu_1$ または $\sigma_1 = \mu_1 = 0$ の場合，$r + q \in S_\rho$ を満たす $r \in S_\sigma$ と $q \in S_\mu$ に対して，

$$I_\rho^{\sigma,\mu}(v_{\rho,r+q}) = \mathrm{sgn}(r+q)^{\mu_2} v_{\sigma,r} \otimes v_{\mu,q}.$$

- $\sigma_1 = \mu_1 > 0$ の場合，

$$\begin{aligned} I_{(2\sigma_1,0)}^{\sigma,\mu}(v_{(2\sigma_1,0),2q}) &= v_{\sigma,q} \otimes v_{\mu,q} & (q \in S_\sigma), \\ I_{(0,0)}^{\sigma,\mu}(v_{(0,0),0}) &= v_{\sigma,\sigma_1} \otimes v_{\mu,-\sigma_1} + v_{\sigma,-\sigma_1} \otimes v_{\mu,\sigma_1}, \\ I_{(0,1)}^{\sigma,\mu}(v_{(0,1),0}) &= v_{\sigma,\sigma_1} \otimes v_{\mu,-\sigma_1} - v_{\sigma,-\sigma_1} \otimes v_{\mu,\sigma_1}. \end{aligned}$$

これらの表示により，各 $\rho \in \Sigma(\sigma,\mu)$ に対して，$\mathbf{W}_{\Pi,\rho}^{\sigma,\mu}(v_{\rho,q})|_{A_3}$ $(q \in S_\rho)$ の明示的な表示を得る事ができる．次のように σ, μ, ρ をとれば，局所ゼータ積分 $Z(s, \mathbf{W}_{\Pi,\rho}^{\sigma,\mu}(v_{\rho,q}), \mathbf{W}_{\pi,\tilde{\rho}}(v_{\tilde{\rho},\tilde{q}}))$ $(q \in S_\rho)$ は 0 でない定数倍を除いて $L(s, \Pi \times \pi)$ と一致する事が直接計算によって確認できる．

(1) $\Pi \simeq \mathrm{Ind}_{P_{1,1,1}}^{G_3}(\chi_{(\nu_1,\delta_1)} \boxtimes \chi_{(\nu_2,\delta_2)} \boxtimes \chi_{(\nu_3,\delta_3)})$ $(\delta_1 \geq \delta_2 \geq \delta_3)$ とする.

(1-1) $\pi \simeq \mathrm{Ind}_{P_{1,1}}^{G_2}(\chi_{(\nu_1',\delta_1')} \boxtimes \chi_{(\nu_2',\delta_2')})$ $(\delta_1' \geq \delta_2')$ とする.

(1-1-1) $\delta_1' = \delta_2' = \delta_2$ の場合： $\sigma = (0,0)$, $\mu = (0,\delta_2')$, $\rho = (0,\delta_2')$.
(1-1-2) $\delta_1' = \delta_2' \neq \delta_2$ かつ $\delta_1 = \delta_3$ の場合： $\sigma = (2,0)$, $\mu = (0,\delta_2)$, $\rho = (2,0)$.
(1-1-3) $\delta_1' = \delta_2' \neq \delta_2$ かつ $\delta_1 > \delta_3$ の場合： $\sigma = (1,0)$, $\mu = (1,0)$, $\rho = (0,\delta_2')$.
(1-1-4) $(\delta_1',\delta_2') = (1,0)$ かつ $\delta_1 = \delta_3$ の場合： $\sigma = (1,0)$, $\mu = (0,\delta_2)$, $\rho = (1,0)$.
(1-1-5) $(\delta_1',\delta_2') = (1,0)$ かつ $\delta_1 > \delta_3$ の場合： $\sigma = (0,0)$, $\mu = (1,0)$, $\rho = (1,0)$.

(1-2) $\pi \simeq D_{(\nu',\kappa')}$ とする.

(1-2-1) $\delta_1 = \delta_3$ の場合： $\sigma = (\kappa',0)$, $\mu = (0,\delta_2)$, $\rho = (\kappa',0)$.
(1-2-2) $\delta_1 > \delta_3$ の場合： $\sigma = (\kappa'-1,0)$, $\mu = (1,0)$, $\rho = (\kappa',0)$.

(2) $\Pi \simeq \mathrm{Ind}_{P_{2,1}}^{G_3}(D_{(\nu_1,\kappa)} \boxtimes \chi_{(\nu_2,\delta)})$ とする.

(2-1) $\pi \simeq \mathrm{Ind}_{P_{1,1}}^{G_2}(\chi_{(\nu_1',\delta_1')} \boxtimes \chi_{(\nu_2',\delta_2')})$ $(\delta_1' \geq \delta_2')$ とする.

(2-1-1) $\delta_1' = \delta_2' \neq \delta$ の場合： $\sigma = (1,0)$, $\mu = (1,0)$, $\rho = (0,\delta_2')$.
(2-1-2) $(\delta_1',\delta_2') = (1,0)$ の場合： $\sigma = (0,0)$, $\mu = (1,0)$, $\rho = (1,0)$.
(2-1-3) $\delta_2' = \delta$ の場合： $\sigma = (0,0)$, $\mu = (\delta_1'-\delta_2',\delta_2')$, $\rho = (\delta_1'-\delta_2',\delta_2')$.

(2-2) $\pi \simeq D_{(\nu',\kappa')}$ とする.

(2-2-1) $\kappa' \leq \kappa$ の場合： $\sigma = (0,0)$, $\mu = (\kappa',0)$, $\rho = (\kappa',0)$.
(2-2-2) $\kappa' \geq \kappa$ の場合： $\sigma = (\kappa'-\kappa,0)$, $\mu = (\kappa,0)$, $\rho = (\kappa',0)$.

$F = \mathbb{C}$ の場合，$\sigma \in \Sigma_n$ と $\mu \in \Sigma(\lambda)$ に対して，$\Sigma(\sigma,\mu) = \{\sigma + \mu + (-i,i) \mid i \in S_\sigma \cap S_\mu\}$ である．さらに，$\rho \in \Sigma(\sigma,\mu)$ に対して，$I_\rho^{\sigma,\mu}$ の明示的な表示は Koornwinder の論文 [Ko] で与えられている．従って，各 $\rho \in \Sigma(\sigma,\mu)$ に対して，$\mathbf{W}_{\Pi,\rho}^{\sigma,\mu}(v_{\rho,q})|_{A_3}$ $(q \in S_\rho)$ の明示的な表示を得る事ができる．$\Pi \simeq \mathrm{Ind}_{P_{1,1,1}}^{G_3}(\chi_{[\nu_1,d_1]} \boxtimes \chi_{[\nu_2,d_2]} \boxtimes \chi_{[\nu_3,d_3]})$ $(d_1 \geq d_2 \geq d_3)$ とし，$\pi \simeq \mathrm{Ind}_{P_{1,1}}^{G_2}(\chi_{[\nu_1',d_1']} \boxtimes \chi_{[\nu_2',d_2']})$ $(d_1' \geq d_2')$ とする．次のように σ, μ, ρ をとれば，局所ゼータ積分 $Z(s,\mathbf{W}_{\Pi,\rho}^{\sigma,\mu}(v_{\rho,q}),\mathbf{W}_{\pi,\tilde{\rho}}(v_{\tilde{\rho},\tilde{q}}))$ $(q \in S_\rho)$ は 0 でない定数倍を除いて $L(s,\Pi \times \pi)$ と一致する事が直接計算によって確認できる．

(3-3-1) $-d_1' \geq d_1$ の場合：
$\sigma = (-d_1'-d_2'-d_1-d_2,0)$, $\mu = (d_1,d_2)$, $\rho = (-d_1'-d_2'-d_1,d_1)$.
(3-3-2) $-d_2' \geq d_1 \geq -d_1' \geq d_2$ の場合：
$\sigma = (-d_1'-d_2'-d_1-d_2,0)$, $\mu = (d_1,d_2)$, $\rho = (-d_2',-d_1')$.

(3-3-3) $-d_2' \geq d_1$ かつ $d_2 \geq -d_1' \geq d_3$ の場合：

$$\sigma = (-d_2' - d_1, 0), \qquad \mu = (d_1, -d_1'), \qquad \rho = (-d_2', -d_1').$$

(3-3-4) $-d_2' \geq d_1$ かつ $d_3 \geq -d_1'$ の場合：

$$\sigma = (-d_2' - d_1, -d_1' - d_3), \qquad \mu = (d_1, d_3), \qquad \rho = (-d_2', -d_1').$$

(3-3-5) $d_1 \geq -d_2' \geq -d_1' \geq d_2$ の場合：

$$\sigma = (-d_1' - d_2, 0), \qquad \mu = (-d_2', d_2), \qquad \rho = (-d_2', -d_1').$$

(3-3-6) $d_1 \geq -d_2' \geq d_2 \geq -d_1' \geq d_3$ の場合：

$$\sigma = (0, 0), \qquad \mu = (-d_2', -d_1'), \qquad \rho = (-d_2', -d_1').$$

ここで，

(3-3-7) $d_2 \geq -d_2' \geq -d_1' \geq d_3$ の場合．

(3-3-8) $d_1 \geq -d_2' \geq d_2$ かつ $d_3 \geq -d_1'$ の場合．

(3-3-9) $d_2 \geq -d_2' \geq d_3 \geq -d_1'$ の場合．

(3-3-10) $d_3 \geq -d_2'$ の場合．

はそれぞれ (3-3-5), (3-3-3), (3-3-2), (3-3-1) の反傾の場合であるから，局所関数等式を用いる事で，$Z(s, W, W') = L(s, \Pi \times \pi)$ となる $W \in \mathcal{W}(\Pi, \psi_1)_{K_3}$ と $W' \in \mathcal{W}(\pi, \psi_{-1})_{K_2}$ が存在する事は証明できるので，ここでは省略する．

参考文献

[Ba] W. N. Bailey. *Generalized hypergeometric series.* Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, No. 32. Stechert-Hafner, Inc., New York, 1964.

[HIM] Miki Hirano, Taku Ishii, and Tadashi Miyazaki. The Archimedean Whittaker functions on $GL(3)$. In *Geometry and analysis of automorphic forms of several variables*, volume 7 of *Ser. Number Theory Appl.*, pages 77–109. World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2012.

[Ja] Hervé Jacquet. Archimedean Rankin-Selberg integrals. In *Automorphic forms and L-functions II. Local aspects*, volume 489 of *Contemp. Math.*, pages 57–172. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009.

[JS] Hervé Jacquet and Joseph Shalika. Rankin-Selberg convolutions: Archimedean theory. In *Festschrift in honor of I. I. Piatetski-Shapiro on the occasion of his sixtieth birthday, Part I (Ramat Aviv, 1989)*, volume 2 of *Israel Math. Conf. Proc.*, pages 125–207. Weizmann, Jerusalem, 1990.

[Ko] T. H. Koornwinder. Clebsch-Gordan coefficients for SU(2) and Hahn polynomials. *Nieuw Arch. Wisk. (3)*, 29(2):140–155, 1981.

[Po] Alexandru A. Popa. Whittaker newforms for Archimedean representations. *J. Number Theory*, 128(6):1637–1645, 2008.

[Sha] J. A. Shalika. The multiplicity one theorem for GL_n. *Ann. of Math. (2)*, 100:171–193, 1974.

[St] Eric Stade. Mellin transforms of $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ Whittaker functions. *Amer. J. Math.*, 123(1):121–161, 2001.