数理解析研究所講究録
第1975巻 2015年 74-85

多様体上のディラック作用素のレゾナンスについて: hyperbolic surface の例

兵庫県立大学大学院・物質理学研究科　保城寿彦
Toshihiko Hoshiro
Graduate School of Material Science
University of Hyogo

1　導入

本稿は数理解析研究所の研究集会「スペクトル・散乱理論とその周辺」筆者が行った講演に基づいています。まずそのときの予稿集に書いた研究を始めた動機の説明を再掲載します。

多様体上のディラック作用素はアティヤー・ジンガーの作用素ともいわれるもので、Atiyah と Singer による有名な指数定理に登場する作用素である。その定義はかなり込み入っており、そのこともあって解析学者にとってなかなか近寄りがたい。ディラック作用素は1階の偏微分方程式系で表せるはずであるが、どの文献([2], [5], [9] 等)でもユークリッド空間の場合しか具体的に1階の偏微分方程式系で表されたものが書かれていない。参考文献の [6] はその作用素のスペクトルについてそのときまでの研究をまとめたものである。筆者はこの本をみたとき、連続スペクトルも扱っている部分があるのにレゾナンスを扱っていないことに気がついた。また多様体上のラプラシアンのレゾナンスについてはこれまで多く研究がなされてきたことは知っているが、ディラック作用素については聞いたことがない。よって計算できる例を作ることから始めることにした。しかし、それにはディラック作用素を1階の偏微分方程式系で表すことができなければならない。

多様体上にディラック作用素が定義可能な多様体を"スピン構造が入る"と言うが、このときの多様体にはトポロジーについての制限がある。それは"向きづけされた多様体にスピン構造が入るための必要十分条件は第2 Stiefel-Whitney 類が消えることである"というものである([6] の2ページを参照)。我々にとって、これだけでこの分野を避けるに十分に思えるが、これはこの分野の最も評判の高い文献 [9] の87ページの Examlpe 2.3 に、この制限は多様体が (i) Lie 群 または (ii) 次元が3以下の向きづけ可能な多様体であれば、自動的に満たされるという記述によって我々は救済されることがわかる。つまり3次元以下の多様体にリーマン計量を与えて、局所的にディラック作用素を1階の偏微分方程式系で表すことは可能であるはずである。

上記のように本分野の研究のためにはスピン幾何についてのある程度の理解が不可欠です。本稿ではセクション3でその部分の説明に努めました。力量不足の為、うまく説明できているという自信はありませんが、興味を持っていただけたら幸いです。

2 主結果

ここでは hyperbolic cylinder と呼ばれる hyperbolic surface について考えます。それは $M = (-\infty, \infty) \times S^1$ にリーマン計量

$$ds^2 = dt^2 + \ell^2 \cosh^2 t \, d\theta^2$$

を与えたものです。ただし ℓ は正定数で、変数 θ は $\int_{S^1} d\theta = \int_0^1 d\theta = 1$ と parametrize されているものとします。このときのラプラシアンは

$$-\Delta = -\partial_t^2 - \tanh t \, \partial_t - \frac{1}{\ell^2 \cosh^2 t} \partial_\theta^2.$$

となり、レゾナンスについては文献の [3] や [12] で詳しく述べられています。まずこのときのディラック作用素を、上の変数 t と θ の 1 階の偏微分方程式のシステムにおける作用素として表すと

$$D = \begin{pmatrix} 0 & D^- \\ D^+ & 0 \end{pmatrix},$$

となります。ただし

$$D^+ = i\left(\partial_t + \frac{\tanh t}{2}\right) - \frac{\partial_\theta}{\ell \cosh t}, \quad D^- = i\left(\partial_t + \frac{\tanh t}{2}\right) + \frac{\partial_\theta}{\ell \cosh t}.$$

です。これについては次のセクションで説明します。本稿の目的は以下の定理の証明の概要を説明することです。

定理 2.1 *(i)* レゾルベント $(D-k)^{-1}$ は $\Im k > 0$ または $\Im k < 0$ のとき、$\mathbf{C}^2$ 値関数空間 $L^2((-\infty, \infty) \times [0,1]; \ell \cosh t \, dt d\theta)^2$ で有界な作用素である。各々の範囲でそれらは $k \in \mathbf{C}$ に関して正則である。またスペクトルについては $\sigma(D) = \sigma_{ac}(D) = \mathbf{R}$ となる。
(ii) $\Im k > 0$ *(resp.* $\Im k < 0$*)* におけるレゾルベント $(D-k)^{-1}$ は $\Im k \leqq 0$ *(resp.* $\Im k \geqq 0$*)* の有理関数として解析的に延長でき、極は

$$k = -\left(m + \frac{1}{2}\right) i + \frac{2\pi n}{\ell} \quad \left(resp.\ k = \left(m + \frac{1}{2}\right) i + \frac{2\pi n}{\ell}\right)$$

にある。ここで m は $m = 0, 1, 2, \ldots$ で n は
(a) スピン構造が自明のときには $n = \pm 1, \pm 2, \ldots,$
(b) 非自明のときには $n = \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \ldots$ を動くものとする。
(iii) 極の *multiplicity* はどの極でも *2* である。

注意 2.2 *1.* ここで *multiplicity* とは一般化された固有関数の空間の次元のことです。詳細は参考文献 *[3]* を参照してください。

2. スピン構造については次のセクションで説明します。そのスピン構造に伴って $\mathbf{C}^2$ 値の関数 $u(t,\theta) = {}^t(u_+(t,\theta), u_-(t,\theta))$, $(-\infty < t < \infty,\ 0 \leqq \theta \leqq 1)$ の変数 θ に関する境界条件を、自明の場合では周期的 *(*$u(t,1) = u(t,0)$*)*、非自明の場合では反周期的 *(*$u(t,1) = -u(t,0)$*)* にします。その理由についても次のセクションで説明します。上の作用素 D はその境界条件をつけた $\mathbf{C}^2$ 値 L^2 空間で自己共役な作用素になります。

この定理から得られる帰結として1次元シュレディンガー作用素

$$L_n = -\frac{d^2}{dt^2} + \left\{\frac{1}{4} + \left(\frac{2\pi n}{\ell}\right)^2\right\}\frac{1}{\cosh^2 t}$$

と

$$D_n = -\frac{d^2}{dt^2} + \left(\frac{2\pi n}{\ell\cosh t}\right)^2 + \frac{2\pi n}{\ell}\cdot\frac{\sinh t}{\cosh^2 t}$$

とが実パラメター n が $n \neq 0$ ならばレゾナンス（集合）が一致することがわかります。

3 スピン幾何と方程式

ここではディラック作用素の表現を導きます。始めにこの分野の参考文献についてですが、解析学者に最も馴染み深い本は [2] であると思いますが、幾何学の専門家に最も評判が高い本は [9] と思われます。この本は代数的なことから始めて、順序だってほとんどのことの証明が与えられています。代数的なことについては [8] がわかりやすいと思います。

まずスピン幾何の概要と用語について解説します。

1. ディラック作用素はクリフォード代数を係数に持つ偏微分作用素です。そのクリフォード代数ではベクトル空間でありながら積が定義されます。ここでは元のベクトル空間が d 次元で、e_1,e_2, $\dots e_d$ が

$$e_j \cdot e_k + e_k \cdot e_j = -2(e_j,\, e_k) = -2\delta_{jk}$$

となるもの、つまりクリフォード代数が $Cl_{0,d}$ で e_1,e_2, $\dots e_d$ は正規直交基底とします。ただし $(\,,\,)$ はベクトル空間の内積、$\cdot$ をクリフォード積といいます。

2. クリフォード代数はスピノル表現 σ によって行列として表すことができます（ここで表現とは代数から行列の空間への準同型のことを意味する）。そのときの表現空間あるいはその表現空間のベクトルをスピノルといいます。元のベクトル空間が d 次元ならスピノル空間は $n = 2^{[\frac{d}{2}]}$ 次元になります。スピノル空間にはエルミート内積が定義されており、いま $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n$ がスピノル空間の正規直交基底で、上の正規直交基底 $e_1, \dots e_d$ が　d 個の n 次正方行列 $\sigma^1 = \sigma(e_1), \dots \sigma^d = \sigma(e_d)$ で表現されるとします。すると

$$\langle e_j \cdot \varphi_k,\, \varphi_\ell\rangle = -\langle \varphi_k,\, e_j \cdot \varphi_\ell\rangle = \sigma^j_{k\ell}, \quad (j = 1, \dots d,\ k, \ell = 1, \dots n)$$

が成立します。ここで $e_j \cdot \varphi_k$ は e_j と φ_k のクリフォード積、$\langle\,,\,\rangle$ はスピノル空間のエルミート内積、$\sigma^j_{k\ell}$ は表現行列 σ^j の (k,ℓ) 成分です。

3. スピン群とはクリフォード代数の元で $(u,\, u) = 1$ となるベクトル空間の元 u の偶数個の積で表されるものの全体のことをいいます。ここではスピン群を $\mathrm{Spin}(d)$ と表します。

$$g\left(\sum_{j=1}^{d} x_j e_j\right)g^{-1} = \sum_{j=1}^{d}\sum_{k=1}^{d} a_{jk} x_j e_k,$$

$$\mathrm{Ad}(g) = (a_{jk})$$

とすると、g がスピン群の元なら、行列 $\mathrm{Ad}(g)$ は行列式の値が 1 の直交行列になります。また随伴表現 $\mathrm{Ad}: \mathrm{Spin}(d) \to \mathrm{SO}(d, \mathbf{R})$ は上への 2 対 1 の写像 となることが知られています。

4. ディラック作用素はスピノル場 (スピノルバンドルの切断) に作用します。従ってディラック作用素の定義の前にスピノルバンドルを定義する必要があります。そのスピノルバンドルは主ファイバー束 (principal fibre bundle) の概念に従って定義されるものです。詳しくは前述の [9] を参照して下さい。また主ファイバー束については小林昭七著「接続の微分幾何とゲージ理論」や野水克己著「現代幾何学入門」に詳しく解説されているので参照して下さい。まず主ファイバー束の用語に構造群があります。多様体に計量が定義されてない場合では構造群は $\mathrm{GL}(d, \mathbf{R})$ です。向き付けされた多様体に計量が与えられると、正規直交フレーム束が定義できるので、構造群を正規直交群 $\mathrm{SO}(d, \mathbf{R})$ とした主ファイバー束 $\mathrm{SO}(M)$ が定義できます。更に多様体 M がスピン構造を持つときは、構造群が上述のスピン群 $\mathrm{Spin}(d)$ の主ファイバー束 $\mathrm{Spin}(M)$ が定義できます。そしてスピノルバンドルはスピノル表現 σ (このとき $\sigma: \mathrm{Spin}(d) \to \mathrm{Mat}(n, \mathbf{C})$ は同型写像) を用いた $\mathrm{Spin}(M)$ の同伴束 (associated bundle) $\mathrm{Spin}(M) \times_\sigma \mathbf{C}^n$ ($\mathrm{Spin}(M) \times \mathbf{C}^n$ を同値関係 $(p, u) \sim (q, v) \Leftrightarrow p = qg,\ v = \sigma(g)\,u$ で割った商空間) という役まわりなのです。ここで、多様体上にどのようにして主ファイバー束 $\mathrm{Spin}(M)$ を定義するかというと、まず計量が定義されていると随伴表現 Ad の逆の対応を用いて(2つの逆像のどちらかに決める)局所的に構造群を正規直交群 $\mathrm{SO}(d, \mathbf{R})$ からスピン群 $\mathrm{Spin}(d)$ に持ち上げることができます。それを大域的に矛盾なく張り合わせることができるかどうかは多様体のトポロジーの性質が関係します。その答えが導入のところの "向きづけされた多様体にスピン構造が入るための必要十分条件は 第 2 Stiefel-Whitney 類が消えることである" になるのです。また矛盾の無い張り合わせ (スピン構造) は一意的とはいえません。 Milnor によって各スピン構造と $H^1(M, \mathbf{Z}_2)$ の元とが 1 対 1 に対応することが示されています ([10])。定理中の非自明なスピン構造とは cylinder をユークリッド空間 $\mathbf{R}^3$ に はめ込む際に cylinder 上の点 $p \in M$ に $g \in \mathrm{Spin}(d)$ が対応するとき、張り合わせを行っていって元の点 $p \in M$ に戻ったときに、$-g \in \mathrm{Spin}(d)$ になることがある場合 ($\mathrm{Ad}(-g) = \mathrm{Ad}(g)$ であることに注意)、自明なスピン構造では必ず $g \in \mathrm{Spin}(d)$ になる場合のことをいいます。前者は はめ込みの重複度が奇数の場合、後者は偶数にあたるものです。

5. 最後にディラック作用素はスピノルの共変微分を用いて定義されます。そのためスピノル接続を定義する必要があるのですが、それはタンジェントバンドルの Levi-Civita 接続から引き起こされた接続 (induced connection) なのです。もう少し詳しくいうと、主ファイバー束の接続は接続 1 次形式 (connection 1-form) という Lie 代数値の 1 次形式で決定されますが、 Levi-Civita 接続の接続 1 次形式の係数 ($\mathfrak{so}(d, \mathbf{R})$ 値) をすべて上述の随伴表現 Ad の微分 ad で引き戻したもの ($\mathfrak{spin}(d)$ 値) が主ファイバー束 $\mathrm{Spin}(M)$ の接続 1 次形式となるのです。また同伴束の接続は主ファイバー束の接続から決まります。

以上をうけてディラック作用素の表現を求めることを始めます。まず我々の設定では多様体の次元が 2 なので、e_1 と e_2 を計量 $ds^2 = dt^2 + \ell^2 \cosh^2 t\, d\theta^2$ に関する tangent bundle TM の正規直交フレーム (orthonormal moving frame)、つまり

$$
\begin{aligned}
e_1 &= \partial_t, \\
e_2 &= \ell^{-1} \mathrm{sech}\, t\, \partial_\theta
\end{aligned}
$$

とします。すると e_1, e_2 は hyperbolic cylinder 上の各点でクリフォード代数の関係式

$$e_j \cdot e_k + e_k \cdot e_j = -2\delta_{jk} \quad (j, k = 1, 2)$$

をみたすことになります。

次元が 2 ならスピノル空間の次元も 2 なので、e_1, e_2 に対応する正規直交スピノルフレーム (orthonormal spinor frame) を φ_+, φ_- とし、更にそのとき表現行列が

$$\sigma_1 = \sigma(e_1) = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_2 = \sigma(e_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

となるとします。これは上記の正規直交フレーム e_1, e_2 より主ファイバー束 $\mathrm{SO}(M)$ の切断が決まり、それを（局所的に）随伴表現 Ad で引き戻した主ファイバー束 $\mathrm{Spin}(M)$ の切断を $p = p(t, \theta)$ $(-\infty < t < \infty, 0 \leqq \theta \leqq 1)$ とおきます。そして $\mathbf{C}^2$ のベクトル $v_+ = {}^t(1, 0)$, $v_- = {}^t(0, 1)$ に対し、スピノルバンドルの切断 φ_+, φ_- を

$$\varphi_\pm = [(p, v_\pm)],$$

クリフォード積を

$$e_j \cdot \varphi_\pm = [(p, \sigma_j v_\pm)], \quad (j = 1, 2)$$

と定義するということです（$[(p, v)]$ は $(p, v) \in \mathrm{Spin}(M) \times \mathbf{C}^2$ を代表元に持つ $\mathrm{Spin}(M) \times_\sigma \mathbf{C}^2$ の元）。

ディラック作用素を求めるにはスピノルの共変微分を求める必要がありますが、ここではスピノル場を φ_+, φ_- の線形結合で表します。そこで、まず φ_+, φ_- の共変微分（接続）を求めます。上述の説明から、それは e_1, e_2 の共変微分、つまり Levi-Civita 接続の共変微分から求まります。以下の Christoffel の symbol の求め方は多くの微分幾何の教科書に書かれています。

多様体の計量が (g_{ij}) なら $\Gamma_{ij,k}$ は

$$2\Gamma_{ij,k} = -\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial u^j}.$$

で与えられるので hyperbolic cylinder の場合では

$$\Gamma_{t\theta,\theta} = \Gamma_{\theta t,\theta} = \ell^2 \cosh t \cdot \sinh t,$$

$$\Gamma_{\theta\theta,t} = -\ell^2 \cosh t \cdot \sinh t$$

となり、その他は $\Gamma_{ij,k} = 0$ となります。

次に Christoffel の symbol Γ_{ij}^k は等式

$$\Gamma_{ij,k} = \sum_m \Gamma_{ij}^m g_{mk}.$$

より求まります。我々の場合では

$$\Gamma_{t\theta}^\theta = \Gamma_{\theta t}^\theta = \tanh t,$$

$$\Gamma^t_{\theta\theta} = -\ell^2 \cosh t \cdot \sinh t.$$

となり、その他は $\Gamma^k_{ij} = 0$ となります。

以上の計算から、ベクトル場 $X_1 = \partial_t$ と $X_2 = \partial_\theta$ の共変微分は

$$\nabla_{X_t} X_t = \Gamma^t_{tt}\, X_t + \Gamma^\theta_{tt}\, X_\theta = 0,$$
$$\nabla_{X_\theta} X_t = \Gamma^t_{\theta t}\, X_t + \Gamma^\theta_{\theta t}\, X_\theta = \tanh t \cdot X_\theta,$$

$$\nabla_{X_t} X_\theta = \Gamma^t_{t\theta}\, X_t + \Gamma^\theta_{t\theta}\, X_\theta = \tanh t \cdot X_\theta,$$
$$\nabla_{X_\theta} X_\theta = \Gamma^t_{\theta\theta}\, X_t + \Gamma^\theta_{\theta\theta}\, X_\theta = -\ell^2 \cosh t \cdot \sinh t \cdot X_t.$$

となるので、これらより正規直交基底 $e_1 = X_t$, $e_2 = \frac{X_\theta}{\ell \cosh t}$ の共変微分は $\nabla_1 = \nabla_{e_1}$ $\nabla_2 = \nabla_{e_2}$ とすると

$$\nabla_1\, e_1 = 0, \quad \nabla_2\, e_1 = \tanh t \cdot e_2,$$
$$\nabla_1\, e_2 = 0, \quad \nabla_2\, e_2 = -\tanh t \cdot e_1.$$

となることがわかります。

以上で e_1 と e_2、つまり主ファイバー束 $\mathrm{SO}(M)$ の接続が求まりましたが、φ_+, φ_- の接続は e_1 と e_2 の接続から求めることができます。その理由は上述の 5 でも説明しましたが、もう一度述べると以下の 2 つのことによります。

- 主ファイバー束 $\mathrm{Spin}(M)$ の接続 1 次形式は、随伴表現 ad で主ファイバー束 $\mathrm{SO}(M)$ の接続 1 次形式を引き戻したものになる。
- 主ファイバー束 $\mathrm{Spin}(M)$ の接続は同伴束 $\mathrm{Spin}(M) \times_\sigma \mathbf{C}^n$ の接続を誘導する。

具体的には多様体の計量を $g(\,,\,)$ とするとき、一般的に次の公式が成立します。

$$\nabla \varphi_\alpha = \frac{1}{4} \sum_{j,k} g(\nabla e_j,\, e_k)\, e_j \cdot e_k \cdot \varphi_\alpha,$$

ここで $\{e_j\}$ は多様体の正規直交フレーム、$\{\varphi_\alpha\}$ は対応する正規直交スピノルフレームです。この公式は Leci-Civita 接続の共変微分が

$$\nabla X = -\frac{1}{2} \sum_{j,k} g(\nabla e_j,\, e_k)\, e_j \wedge e_k(X)$$

で表せることと、$\mathfrak{so}(d, \mathbf{R})$ の基底 $e_j \wedge e_k$ $(j, k = 1, \ldots, d)$ の ad による引き戻しが $\frac{1}{4}[e_j, e_k] = \frac{1}{2} e_j \cdot e_k \in \mathfrak{spin}(d)$ であることの帰結です。証明については参考文献 [9] の第 2 章 §4 を参照して下さい。この公式と e_1 と e_2 の共変微分より

$$\nabla_1\, \varphi_+ = 0, \quad \nabla_2\, \varphi_+ = -\frac{i}{2} \cdot \tanh t \cdot \varphi_+,$$
$$\nabla_1\, \varphi_- = 0, \quad \nabla_2\, \varphi_- = \frac{i}{2} \cdot \tanh t \cdot \varphi_-.$$

が得られます。

ここでスピノル接続と Levi-Civita 接続の関係を再考しましょう。e_1 の表現行列が σ_1 だったので等式

$$e_1 \cdot \varphi_+ = i\varphi_-, \quad e_1 \cdot \varphi_- = i\varphi_+$$

が成立します。これらの関係式の両辺を微分して、上で得られた e_1 と φ_+, φ_- の共変微分についての関係式を代入すると左辺と右辺が等しくなることがわかります。また e_2 についても同様な結果が得られます。以上からスピン接続は Levi-Civita 接続から引き起こされた接続ですが、スピノルの正規直交基底は表現行列を不変にするようにタンジェントバンドルの正規直交基底と連動しているということが判ります。また上の e_1, e_2 と φ_+, φ_- の共変微分の式の右辺の大きさを比較すると $\varphi_\pm$ の共変微分は e_1, e_2 の場合の半分ということから、e_1, e_2 が 1 回転する間に $\varphi_\pm$ は半回転することが判ります。更に $\varphi_\pm$ の回転する方向は逆であることも判ります。

遂にディラック作用素の表現を導く過程の最終段階に入りました。まずスピノル場 ψ を

$$\psi = u_+ \varphi_+ + u_- \varphi_-,$$

とスピノルの正規直交基底の線形結合で表します。ここで $u_+ = u_+(t,\theta)$ と $u_- = u_-(t,\theta)$ は複素数値の関数でスピン構造が自明のときは $u_\pm(t,1) = u_\pm(t,0)$、非自明のときは $u_\pm(t,1) = -u_\pm(t,0)$ とします。この様な境界条件の違いは主ファイバー束の $\theta = 0$ のところと $\theta = 1$ のところの張り合わせ方の違いからくるものです。また上式の列ベクトル表現は

$$\begin{pmatrix} u_+ \\ u_- \end{pmatrix}.$$

となります。

上式の両辺に ∇_1 を作用させると

$$\begin{aligned} \nabla_1 \psi &= \nabla_1 u_+ \cdot \varphi_+ + \nabla_1 u_- \cdot \varphi_- \\ &= \partial_t u_+ \cdot \varphi_+ + \partial_t u_- \cdot \varphi_-. \end{aligned}$$

となります。一方、両辺に ∇_2 を作用させると

$$\begin{aligned} \nabla_2 \psi &= \nabla_2 u_+ \cdot \varphi_+ + \nabla_2 u_- \cdot \varphi_- + u_+ \cdot \nabla_2 \varphi_+ + u_- \cdot \nabla_2 \varphi_- \\ &= \frac{1}{\ell \cosh t}\left(\frac{\partial u_+}{\partial \theta} - i\,\frac{\ell \sinh t}{2} \cdot u_+\right) \cdot \varphi_+ \\ &\quad + \frac{1}{\ell \cosh t}\left(\frac{\partial u_-}{\partial \theta} + i\,\frac{\ell \sinh t}{2} \cdot u_-\right) \cdot \varphi_-. \end{aligned}$$

となります。以上の計算によって、共変微分 ∇_1 の列ベクトル ${}^t(u_+, u_-)$ に対する作用素としては

$$\nabla_1 = \partial_t$$

と表現され、共変微分 ∇_2 の同列ベクトルに対する作用素としては

$$\nabla_2 = \frac{1}{\ell \cosh t}\left(\partial_\theta - i\,\frac{\ell \sinh t}{2} \cdot \sigma\right),$$

と表現されることがわかります。ここで

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

です。

計量が与えられた多様体上のディラック作用素は以下のように定義されるものです：

定義 3.1 $\Gamma(S)$ を n 次元スピン多様体 M 上のスピノル場、つまりスピノルバンドルの切断の全体とする。このときディラック作用素は写像 $\mathfrak{D} : \Gamma(S) \to \Gamma(S)$ であって以下で定義されるものである。

$$\mathfrak{D}\,\psi = \sum_{j=1}^{n} e_j \cdot \nabla_{e_j}\psi,$$

ここで $\{e_j\}_{j=1}^{n}$ は M 上の正規直交フレーム、∇_{e_j} は e_j 方向のスピノルの共変微分、$\cdot$ はクリフォード積である。

これからディラック作用素の列ベクトルに対する作用素としての表現は

$$\begin{aligned} D &= \sigma(e_1)\,\nabla_1 + \sigma(e_2)\,\nabla_2 \\ &= \sigma(e_1)\,\partial_t + \sigma(e_2)\,\frac{1}{\ell\cosh t}\left(\partial_\theta - i\,\frac{\ell\sinh t}{2}\cdot\sigma\right) \\ &= \sigma(e_1)\left(\partial_t + \frac{\tanh t}{2}\right) + \sigma(e_2)\,\frac{\partial_\theta}{\ell\cosh t}, \end{aligned}$$

となることがわかります。遂に前セクションの off diagonal な表示と同等な表示が得られました。

4 古典解析

ここでは前 section で得られたディラック作用素の表現より、レゾルベント作用素 $(D^+D^- - k^2)^{-1}$, の散乱極を求めます。上半平面 $\Im k > 0$ で正則なレゾルベント作用素を下半平面 $\Im k \leqq 0$ に解析的に拡張するときについて考えます。まず作用素 D^+D^- を変数 θ についてフーリエ展開します。すると

$$-\left(\left(\partial_t + \frac{\tanh t}{2}\right) - \frac{2\pi n}{\ell\cosh t}\right)\left(\left(\partial_t + \frac{\tanh t}{2}\right) + \frac{2\pi n}{\ell\cosh t}\right)$$

となります。ここで離散パラメーター n はスピン構造が自明なら $n \in \mathbf{Z}$、非自明なら $n \in \mathbf{Z} + \frac{1}{2}$ とします。ここで未知関数の置き換え $v = u\exp(-\frac{\tanh t}{2})$ を行って上式の $\frac{\tanh t}{2}$ を消すと

$$\begin{aligned} D_n &= -\left(\partial_t - \frac{2\pi n}{\ell\cosh t}\right)\left(\partial_t + \frac{2\pi n}{\ell\cosh t}\right) \\ &= -\frac{d^2}{dt^2} + \left(\frac{2\pi n}{\ell\cosh t}\right)^2 + \frac{2\pi n}{\ell}\cdot\frac{\sinh t}{\cosh^2 t}, \end{aligned}$$

となります。

我々がここでやるべきことは方程式

(1) $$(D_n - k^2)\,v_n(t;\,k) = 0$$

の解で $t\to\pm\infty$ のときに急減少するものの wronskian を求めることです。そのために以下の作業を行います。

- 上の常微分方程式と関連する超幾何関数をみつける。
- 超幾何関数の接続公式より $t\to\pm\infty$ のときに急減少する解どうしの接続係数をもとめる。

第1の作業では

$$x=\frac{1-i\sinh t}{2},\quad \nu=\frac{2\pi n}{\ell},$$

とおき、更に未知関数の置き換え

$$v_n(t\,;\,k)=(1-x)^{i\nu/2}(-x)^{-i\nu/2}\cdot y_n(x\,;\,k).$$

を行うと次の補題が成り立ちます。

補題 4.1 関数 $v_n(t\,;\,k)$ は方程式 $(D_n-k^2)\,v_n(t;\,k)=0$ をみたすとする。すると関数 $y=y_n(x\,;\,k)$ は超幾何微分方程式

$$x(1-x)y''+\{\gamma-(\alpha+\beta+1)x\}y'-\alpha\beta\,y=0 \tag{2}$$

をみたす。ここで $\alpha=i\,k$、$\beta=-i\,k$、$\gamma=-i\nu+\frac{1}{2}$ とする。

第2の作業では接続係数を求めます。ここでは $\Im k>0$ とします。上式 (2) の解は $x=\infty$ の近傍では $(-x)^{-\alpha}\,F(\alpha,\alpha+1-\gamma,1+\alpha-\beta;\,x^{-1})$ と $(-x)^{-\beta}\,F(\beta,\beta+1-\gamma,1+\beta-\alpha;\,x^{-1})$ の線形結合で表されますが（ここで $F(\alpha,\,\beta,\,\gamma;\,x)$ はガウスの超幾何級数）、$\Im k>0$ では $t\to\infty$ のとき急減少するのは指数が β の場合です。これから方程式 (1) の解で $t\to\infty$ のときと $v\sim e^{ikt}$ 漸近する解は

$$\begin{aligned} v_n(t\,;\,k)&=(1-x)^{i\nu/2}(-x)^{-i\nu/2}\cdot y_n(x\,;\,k)\\ &=(1-x)^{i\nu/2}(-x)^{-i\nu}\cdot e^{\pi k/2}\cdot 2^{2ik}\cdot\\ &\quad\cdot(-x)^{-\beta}\cdot F(\beta,\beta+1-\gamma,1+\beta-\alpha;\,x^{-1})\end{aligned}$$

と表せることがわかります。

更にこの関数 $v_n(t\,;\,k)$ を $t\to 0$ に延長するときの挙動を調べるときに次の等式が役立ちます。

$$\begin{aligned} &(-x)^{-\beta}\cdot F(\beta,\beta+1-\gamma,1+\beta-\alpha;\,x^{-1})\\ &=C(\beta\,,\beta+1-\gamma,1+\beta-\alpha)\cdot F(\beta\,,\,\alpha\,,\,\gamma;\,x)\\ &+C(\beta+1-\gamma\,,\,\beta\,,\,1+\beta-\alpha)\cdot\\ &\quad\cdot(-x)^{1-\gamma}\cdot F(\beta+1-\gamma,\alpha+1-\gamma,2-\gamma;\,x)\end{aligned} \tag{3}$$

ここで

$$C(\alpha\,,\,\beta\,,\,\gamma)=\frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta)\,\Gamma(\gamma-\alpha)}.$$

です。これは Kummer による接続公式

$$
\begin{aligned}
F(\alpha,\,\beta,\,\gamma\,;\,x) = C(\alpha,\,\beta,\,\gamma)\cdot&\\
&\cdot(-x)^{-\alpha}\cdot F(\alpha,\alpha+1-\gamma,1+\alpha-\beta;\,x^{-1})\\
&+C(\beta,\,\alpha,\,\gamma)\cdot\\
&\cdot(-x)^{-\beta}\cdot F(\beta,\beta+1-\gamma,1+\beta-\alpha;\,x^{-1})
\end{aligned}
$$

の簡単な帰結です。

ここで $x=\frac{1-i\sinh t}{2}$ であったので、上式 (3) の $(-x)^{1-\gamma}$ は $t=0$ において分岐していることに注意する必要があります。従って $t<0$ で上式 (3) の右辺は

$$
\begin{aligned}
&C(\beta\,,\beta+1-\gamma,1+\beta-\alpha)\cdot F(\beta\,,\,\alpha\,,\,\gamma;\,x)\\
&+C(\beta+1-\gamma\,,\,\beta\,,\,1+\beta-\alpha)\cdot\\
&\cdot e^{2\pi i(1-\gamma)}\,(-x)^{1-\gamma}\cdot F(\beta+1-\gamma,\alpha+1-\gamma,2-\gamma;\,x),
\end{aligned}
$$

に変更されます。

更に $t\to-\infty$ に延長する際には次の等式が役立ちます。

$$
\begin{aligned}
&F(\beta\,,\,\alpha,\,\gamma\,;\,x)\\
&=\;C(\beta\,,\alpha,\gamma)\cdot(-x)^{-\beta}\cdot F(\beta\,,\,\beta-\gamma+1\,,\,1+\beta-\alpha;\,x^{-1})\\
&+C(\alpha,\beta,\,\gamma)\cdot(-x)^{-\alpha}\cdot F(\alpha\,,\,\alpha-\gamma+1\,,\,1+\alpha-\beta;\,x^{-1}),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(-x)^{1-\gamma}\cdot F(\beta+1{-}\gamma,\,,\,\alpha+1-\gamma,\,2-\gamma\,;\,x)&\\
&=C(\beta+1-\gamma\,,\alpha+1-\gamma,2-\gamma)\cdot\\
&\cdot(-x)^{-\beta}\cdot F(\beta+1-\gamma\,,\,\beta\,,\,1+\beta-\alpha;\,x^{-1})\\
&+C(\alpha+1-\gamma,\beta+1-\gamma,\,2-\gamma)\cdot\\
&\cdot(-x)^{-\alpha}\cdot F(\alpha+1-\gamma\,,\,\alpha\,,\,1+\alpha-\beta;\,x^{-1}).
\end{aligned}
$$

これらも Kummer による接続公式の帰結です。

以上の表示から

$$
v_n(t\,;\,k)\sim A(k)\,e^{ikt}+\,B(k)\,e^{-ikt},\qquad t\to-\infty.
$$

とすると

$$
\begin{aligned}
&A(k)\\
&=e^{\pi\nu}\cdot e^{\pi k/2}\cdot 2^{2ik}\cdot e^{-\pi k/2}\cdot 2^{2ik}\cdot\{\,C(\beta,\beta+1-\gamma,1+\beta-\alpha)\cdot C(\alpha,\beta,\gamma)\\
&+e^{2\pi i(1-\gamma)}\cdot C(\beta+1-\gamma,\beta,1+\beta-\alpha)\cdot C(\alpha+1-\gamma,\beta+1-\gamma,2-\gamma)\}\\
&=e^{\pi\nu}\cdot 2^{4ik}\cdot\{\,\frac{\Gamma(1+\beta-\alpha)\,\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(1+\beta-\gamma)\,\Gamma(1-\alpha)}\cdot\frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta)\,\Gamma(\gamma-\alpha)}\\
&+e^{2\pi i(1-\gamma)}\cdot\frac{\Gamma(1+\beta-\alpha)\,\Gamma(\gamma-1)}{\Gamma(\beta)\,\Gamma(\gamma-\alpha)}\cdot\frac{\Gamma(2-\gamma)\,\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(1+\beta-\gamma)\,\Gamma(1-\alpha)}\}.
\end{aligned}
$$

といういささか繁雑な等式が得られます。ここで恒等式

$$e^{\pi\nu}\{\Gamma(1-\gamma)\cdot\Gamma(\gamma)+e^{2\pi i(1-\gamma)}\cdot\Gamma(\gamma-1)\cdot\Gamma(2-\gamma)\}=2\pi.$$

をもちいてこの等式を整理すると

$$A(k)=\frac{\Gamma(\frac{1}{2}-ik)^2}{\Gamma(\frac{1}{2}-ik-i\nu)\Gamma(\frac{1}{2}-ik+i\nu)}$$

と比較的美しい等式になりますが、更にガンマ関数の公式

$$\Gamma(2z)=\frac{2^{2z}}{2\sqrt{\pi}}\cdot\Gamma(z)\cdot\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)$$

をもちいると

$$A(k)=\frac{\Gamma(\frac{1}{2}-ik)^2}{\Gamma(\frac{1}{2}-ik-i\nu)\Gamma(\frac{1}{2}-ik+i\nu)}$$

という大変美しい等式が現れます。ここで $\nu=\frac{2\pi n}{\ell}$ です。散乱極は $A(k)=0$ となる k の値です。これから定理の主張が得られます。詳細は省略します。

定理から得られる帰結について：

このセクションでは作用素 D^+D^- を変数 θ に関してフーリエ級数に展開することにより D_n が出て来ました。一方、作用素 $-\Delta-\frac{1}{4}$(Δ はラプラス作用素) に同じ操作をすると、作用素 L_n が出て来ます。いま D_n と L_n の散乱行列を求めると（上では $A(k)$ を求めました)、前者の散乱行列

$$S_{D_n}=\begin{pmatrix}T(k) & R_-(k)\\ R_+(k) & T(k)\end{pmatrix}.$$

では

$$T(k)=\frac{\Gamma(\frac{1}{2}-ik-i\nu)\Gamma(\frac{1}{2}-ik+i\nu)}{\Gamma(\frac{1}{2}-ik)^2},$$

$$R_+(k)=-R_-(k)=\frac{i\Gamma(\frac{1}{2}+ik)\Gamma(\frac{1}{2}-ik-i\nu)\Gamma(\frac{1}{2}-ik+i\nu)}{\Gamma(\frac{1}{2}-ik)\Gamma(1-i\nu)\Gamma(i\nu)}.$$

となります。また後者の散乱行列

$$S_{L_n}=\begin{pmatrix}T(k) & R_-(k)\\ R_+(k) & T(k)\end{pmatrix}.$$

では

$$T(k)=\frac{\Gamma(\frac{1}{2}-ik-i\nu)\Gamma(\frac{1}{2}-ik+i\nu)}{\Gamma(1-ik)\Gamma(-ik)},$$

$$R_+(k)=R_-(k)=\frac{\Gamma(ik)\Gamma(\frac{1}{2}-ik-i\nu)\Gamma(\frac{1}{2}-ik+i\nu)}{\Gamma(-ik)\Gamma(\frac{1}{2}-i\nu)\Gamma(\frac{1}{2}+i\nu)},$$

となります。散乱極は透過係数 $T(k)$ の極ですが、帰結は $T(k)$ の分子が共通していることからわかります（$n=0$ のときは S_D は分母の部分より単位行列になりますので極を持ちません)。

参考文献

[1] C. Bär , The Dirac operator on hyperbolic manifolds of finite volume, Journal of Differential Geometry, 54, 439-488 (2000)

[2] N. Berline, E. Getzler, M. Vergne, Heat Kernels and Dirac Operators, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg (1991)

[3] D. Borthwick, Spectral Theory of Infinite-Area Hyperbolic Surfaces, Birkhäuser, Boston MA (2007)

[4] H.L. Cycon, R.G. Froese, W. Kirsch and B. Simon, Schrödinger Operators, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg (1987)

[5] T. Friedrich, Dirac Operators in Riemannian Geometry, American Mathematical Society, Providence Rhode Island (2000)

[6] N. Ginoux, The Dirac Spectrum, Lecture Notes in Mathematics 1976, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg (2009)

[7] L. Guillopé and M. Zworski, Upper bounds on the number of resonances for noncompact Riemannian surfaces, Journal of Functional Analysis, 129, 364–389 (1995)

[8] P. Lounesto, Clifford Algebra and Spinor (2nd ed.), Cambridge University Press (2001)

[9] H.B. Lawson and M.-L. Michelsohn, Spin Geometry, Princeton University Press, Princeton (1989)

[10] J. Milnor, Spin structures on manifolds, Enseign. Math. 9, 198-203 (1963)

[11] R. Penrose and W. Rindler, Spinor and Space-time volume 1, Cambridge University Press (1984)

[12] P. Perry, Introduction to scattering theory, Lecture notes given in the Conference on Inverse Spectral Geometry, the University of Kentucky (2002)

[13] N. Shimakura, Ordinary Differential Equations, Shōkabo, Tokyo (1988)(in Japanese)