

数学ソフトウェアの併用による教育効果の向上

日本大学生物資源科学部 五十嵐 正夫 (Masao IGARASHI)
College of Bioresource Sciences
Nihon University

E-mail igarashi.masao@nihon-u.ac.jp

日本大学生物資源科学部 山崎 高洋 (Takahiro YAMAZAKI)
College of Bioresource Sciences
Nihon University

日本大学大学院生物資源科学研究科 陳 静旋 (Chen Jing Xuan)
Graduate School of Bioresource Sciences
Nihon University

1 はじめに

1 年生対象の講義科目「情報科学」に数学 I の「データ分析」、数学 A の「場合の数と確率」、数学 B の「確率分布と統計的な推測」に近接する分野が含まれている。手元の高校教科書を調べてみるとその内容は次のようであった。

1. 「データ分析」はデータの散らばりとデータの相関が主な内容であり、キーワードには度数分布表、ヒストグラム、箱ひげ図、5 数要約、偏差、分散、表計算、相関係数等がある。
2. 「場合の数と確率」は順列、組み合わせ、確率の考え方が主な内容であり、キーワードには確率、独立試行、条件付き確率等がある。
3. 「確率分布と統計的な推測」は 2 項分布、正規分布、母分散や標本分散が主な内容であり、キーワードには確率変数、確率密度関数、分布曲線、標準偏差、推定等がある。

今年度の入学者は新課程履修がほとんどのはずだが、入学試験問題にこの分野の出題が少ないためか¹、ほとんどの学生さんは「学んだ記憶がない、または記憶に薄い」状態である。授業に際しては、その記憶を呼び戻すと同時に、この分野特有の用語解説や高校課程との差異の説明を身近な事例やアプリを用いて行っている。授業においては教育効果の向上のために特に次の 3 点に留意している。

1. 形容語がついた場合：例えば「変数」と「確率変数」、「関数」と「確率密度関数」、「曲線」と「分布曲線」のように従来学習してきた用語に形容語がついた場合の意味と両者の差異の説明を明確にする。数学分野では「変数」、確率・統計分野では「確率変数」と呼ぶと思っている学生さんもいる。

¹履修上は選択分野や選択範囲となっている。

2. この分野での積分と確率との同義性とその表記:例えば $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$ と高校教科書の正規分布表と大学テキストの正規分布表の表記の差異を明確にする. 高校の教科書では確率密度関数の対称性を利用して定義域 $(0, \infty)$ を基準として表が作られている.
3. 母集団分布と標本分布:母集団と標本の用語は中学校数学3で学習している². 農学系学部では母数統計量と標本統計量の区別を最初に明確にしておく必要がある. 特に計算ソフトとしてExcel(2010以降)を利用しての分散の計算式, VAR.PとVAR.Sの差異は重要になる. .Pや.SにおけるPやSの意味はExcel利用時に表示されるコメントだけで理解することは難しい.

以上の用語等の説明には, 板書, 数表, スマホ, Excel, Mathematica と言った身の回りの材料を駆使して多面的に用語を説明することが大事である. 例えば, 後ろめたそうに机の下でスマホをいじっている学生さんに「分散」や「不偏分散」を検索させ, その検索結果をプロジェクターに投映させながら説明させると, 急に教室が活性化する. 本稿はそんな工夫に関しての事例報告である.

2 変数と確率変数

まず手元にある教科書で「変数」と「確率変数」の取り扱いの差異を調べてみる. 中学校数学3で関数 $y = x^2$ を学習する³. このとき y の増加量, x の増加量の言葉も併せて学習する. 数学Iで初めて y は x の関数と変数 x を学習する. そのとき変数は「変化する量」として説明され, 次に変数 x のとりうる範囲をその関数の定義域という, といった説明がされる⁴. 確率変数の説明は「ある試行において, それぞれの根元事象に応じて値が決まる変数」⁵ と言った説明が多い.

確率変数は大文字で X , そのとる値は小文字で x と書き, X が1つの値 x_k をとる確率を $P(X = x_k)$ と表す, と言ったことを実例を示しながら学生に説明する. そのとき X の値が a 以上 b 以下である確率を $P(a \leq X \leq b)$ と書く, さらに端点を含まない $P(a < X < b)$ の値との差異も説明する.

高校の教科書には”連続型確率変数は無数に多くの値をとるから, 特定の値をとる確率は0と考える”といった説明があったが, 直感的にはこれで十分と思われる⁶. 離散型確率変数はさいころを利用して具体的な事例で教えることができるので理解度は良好である. 連続型確率変数をルーレットなどを例にあげて説明しているが理解度は低い. その理由の一つは不定積分記号と無限記号にあると思われる. 例えば次のような質問がよくある.

²104 数研, 数学 926

³104 数研, 数学 926

⁴104 数研, 数 I 312

⁵ 61 啓林, 数 B 306

⁶183 第一, 数 B 314

1. $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$ おける P と f の関係は？
2. $P(a \leq X \leq b) = [F(x)]_a^b$ において $f(x)$ の原始関数 $F(x)$ はどのようにして求めるのか？
3. a や b が $-\infty$ や ∞ の時の積分計算はどうするのか？

これらのことは、高校の教科書では分布曲線の網掛け部分と確率表から説明を試みている。授業では原始関数が求まる関数はほとんどないと説明し、数値積分を解説し、その適用は大変だからアプリを利用するのが一般的であると教えている。

3 正規分布表とアプリ

大学で利用するテキストに掲載の（標準）正規分布表は x_0 と $P(x_0 \leq X \leq \infty)$ で計算される値の対となっている。この x_0 は上側確率点と呼ばれることが多い。

一方、高校数学Bの教科書⁷は確率変数の表記⁸は様々であるが x_0 と $P(0 \leq X \leq x_0)$ で計算される値の対になっている。 $-\infty$ の代わり0を基準とした下側確率点である。積分区間に $-\infty$ や ∞ が含まれるのを避けての表づくりと思われるが、表を利用する際に説明が必要な箇所である。授業では次のような手順を踏んで教えることにしている。

1. 数学Bで学習した標準正規分布の確率密度関数 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$ の復習をする。このとき標準の意味やデータの標準化の意味を簡単な例で説明する。
2. 定義域 $-5 \leq x \leq 5$ におけるこのグラフの概形を Mathematica で書く。
3. Mathematica でその確率密度関数を区間 $(-\infty, \infty)$, $(0, \infty)$ で積分し、その値が1, 0.5 となることを確かめる。
4. 次にその確率密度関数を区間 $(-\infty, -1.96)$, $(-1.96, 1.96)$, $(1.96, \infty)$ で積分し、その値が0.0249979, 0.950004, 0.0249979 となることを確かめる。
5. 高校教科書掲載の表の確率点 x_0 は $P(0 \leq X \leq x_0)$ 、大学で利用するテキストの確率点 x_0 は $P(x_0 \leq X \leq \infty)$ であることを確かめる。
6. Manipulate を利用して x_0 をスライダーさせて図1を書く。グラフの対称性や確率点と面積との関係、特に 1σ , 2σ , 3σ の意味を解説する。スライダーを動かすとき x_0 を所定の点に停止させるには、刻み幅⁹を細かく制御する必要がある。次のプログラムは刻み幅 ($t = 0.1$) を組み込んだもので大橋真也先生（船橋啓明高校）に教えて頂いたものである。

⁷数研，東京，啓林，実況，第一

⁸ X , Z , U 等

⁹このプログラムでは0.1となっている。

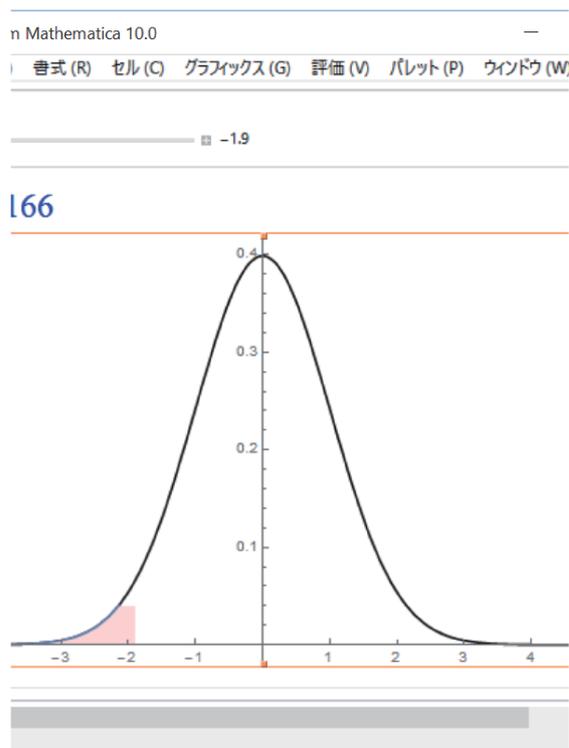


図 1: Manipulate の利用

```
Manipulate[
  Column[{Text[
    Style[N[CDF[NormalDistribution[0, 1], t], 10], Blue, Large]],
    Show[Plot[PDF[NormalDistribution[0, 1], x], {x, -5, 5},
      Ticks -> {Range[-4, 4], Automatic}, PlotStyle -> Black],
    Plot[PDF[NormalDistribution[0, 1], x], {x, -5, t},
      Filling -> Axis, FillingStyle -> LightRed],
    ImageSize -> 500]}], {{t, 0}, -3, 3, 0.1,
  Appearance -> "Labeled"}]
```

4 Excel の活用

高校教科書の数表と Excel を用いての計算値の表記（値）もまた異なるので注意が必要である。

高校教科書は 0.5 を中心として考え、他方 Excel は 1.0 を中心にして考えている。この対応関係は高校と大学の一つのギャップである。

例えば Excel で確率 0.025 をあてて確率点を計算させると 2010 版では下側確率

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx = 0.025$$

を計算し $a = -1.96$ を出力する。高校教科書の表から $0.5 - 0.025 = 0.475$ を探し、さらに対称性を利用し 1.96 から -1.96 を導き出すのは容易でない。

スチューデント t -分布は高校の範囲外であるが、大学では標本から母集団の統計量を調べるのによく用いられる。Excel は確率をあてえて、確率点を求めるのに二つの関数 $T.INV$ と $T.INV.2$ のを用意し、片側確率と両側確率の区分をしている。図 2 では上が Excel 2010, 下が Excel 2013 である。図上下の異なる点は確率の説明と自由度の説明で

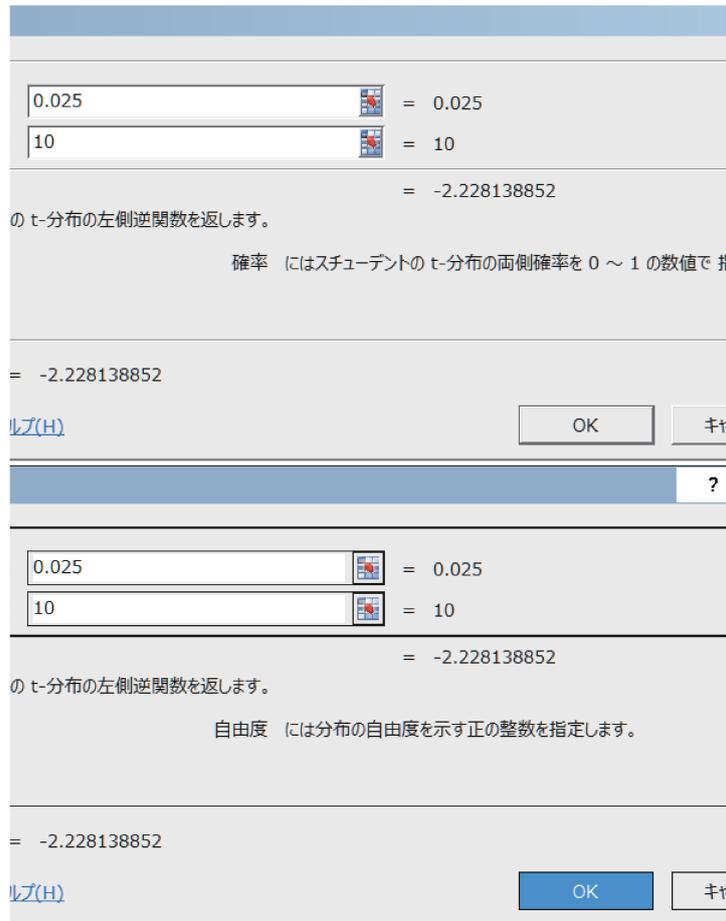


図 2: Excel のバージョンによるコメントの差異

ある。上図は前バージョンの直し忘れとも考えられる。このような場合、学生には英語版 Excel を参照を勧めている。そこには”the two-tailed”とあった。意味するところは両側確率の下側確率点である。

Mathematica で確率と自由度をあてえて下側確率点を計算するには `InverseCDF` の利用がある¹⁰。例えば自由度 10, 確率 0.025 の下側確率点は次の式で計算できる。出力は -2.22814 となる。

```
InverseCDF[StudentTDistribution[10], 0.025]
```

¹⁰これも大橋先生の教示による。

5 おわりに

一年生対象の総合教育分野で科目名「情報科学」を30年ほど前から分担担当している。30年前、情報科学を教える特別な教室はなく、講義の前に副手がノートパソコンを配布し授業終了後それを回収していた時代である。文書作成ソフトとN88 BASICを利用しての入出力命令、反復計算、判別命令といったごく基本的なことを教えていた。

学生時代リレー素子を用いたFACOM128Bを利用して計算機教育を受けた者にとって、高機能、高性能、安価、さらに大容量メモリの小型の計算機の出現に感動した。この頃の「情報科学」の授業評価における満足度は、他科目の授業科目の平均よりも高かった。科目名のもの珍しさや、プログラムやアルゴリズムといったことに対する目新しさが高い満足度の理由と思われた。

しかしながら最近の「情報科学」に対する満足度は、他科目平均よりも低くなってきている。学生さんが講義で仕入れたい知識が「キーワード」に偏り、後は「検索」を頼りにそのキーワードをつなぎ合わせてレポートを書き、友人同士で知識の共有化を計り、試験に備えると言ったことにあくせくしているようである。「知の創造や継承」といった視点からは好ましい傾向とは思われない。

いま学生さんは教室に入るとまず通信機器の充電を始める。教員やTAはその電源を蹴飛ばさないように教室内を机間巡回し、質問に答え、また理解度を確認する必要がある。スマホやタブレットの電源確保は「何時でも、何処でも、誰とでも」コミュニケーションを行うための必須条件となっている。

スマホ、タブレット、ノートパソコンの教室内での利用制限や全面禁止は「多勢に無勢」、あるいは「実効性」を考えると「労多くして効果薄」である。ならば、逆にスマホ、タブレット、またアプリを積極的に授業に利用し、検索結果を教室内で共有する事による教育効果向上を計ることが得策と思える。時々次のような事柄の検索結果をリアルタイムで教室内のプロジェクターに映し出す。

1. スマホで授業内容の検索時間をあたえる。例えば分布、確率、母集団は何年生で学んだか?¹¹
2. 同様に相関(数学A)、確率計算(数学A)、確率変数(数学B)、確率密度関数(数学B)、分布曲線(数学B)を検索させる。このとき検索のキーワードとして「学習指導要領」を教える。
3. ”Mathematica 正規分布”で検索し分布関数を書かせる。

IT機器を用いて、教員側が意図した学習効果を上げるにはかなり周到な準備が必要である。先日アプリ Classroom を利用して、リアルタイムで学生さんの計算結果を集計・表示する授業を行った。初回は、アプリのダウンロードやスマホの登録に多くの時間を必要としたが、学生さんにWiFiの処理能力を教える生きた教材となった¹²。

¹¹正解は中学時代

¹²学生さんの通信料を節約するために、アプリのダウンロード用のWiFiを教室に用意したが、56名の学生さんに対してWiFiはその処理能力を超えてしまった。ある学生が個人回線を利用すればダウンロードは早いと指摘したので事なきをえた。