数理解析研究所講究録
第2003巻 2016年 77-81

p 飽和 Welter ゲーム

千葉大学大学院 理学研究科　入江 佑樹
Yuki Irie
Graduate School of Science,
Chiba University

p 飽和 Welter ゲームの Sprague-Grundy 関数 sg は, 対称群の通常既約表現の次数と深く関係している. このゲームの局面は分割 λ で表せる. ρ^{λ} を λ に対応する $\mathrm{Sym}(|\lambda|)$ の既約表現としよう. このとき, 全ての素数 p に対して次の二つを示した: (1) ρ^{λ} の次数が p と素である必要十分条件は $\mathrm{sg}(\lambda) = |\lambda|$ である; (2) ρ^{λ} の $\mathrm{Sym}(\mathrm{sg}(\lambda))$ への制限は次数が p と素な既約成分を持つ. さらに, 全ての 2 以上の整数 p に対して $\mathrm{sg}(\lambda)$ の明示公式を与えた.

1 Welter ゲーム

Welter ゲームは, 有限枚のコインを使った二人対戦ゲームである. 各コインは, 左から $0,1,2,\ldots$ と番号をつけたマス目上に置かれている. ただし, 一つのマス目に置くことができるコインは高々 1 枚である. 二人のプレイヤーは交互に 1 枚のコインを空いている小さい数字のマス目（左側のマス目）に移動する. 交互に移動していき, 先に動かせなくなった方が負けである. さて, コインが $x^1, x^2, \ldots, x^m$ のマス目にある局面 X を考えよう. Welter [14] は X の Sprague-Grundy 数 (次節で定義する) の公式を与えている:

$$\mathrm{sg}(X) = x^1 \oplus_2 \cdots \oplus_2 x^m \oplus_2 \left(\bigoplus_{i<j}{}_2 \ N_2(x^i - x^j) \right). \tag{1.1}$$

ただし $\oplus_2$ は 2 進展開して繰り上がりのない足し算を表し $N_2(x) = x \oplus_2 (x-1)$ である. 局面 X は m 点集合 $\{ x^1, \ldots, x^m \} \subset \mathbb{N}$ と $(x^1, \ldots, x^m) \in \mathbb{N}^m$ のどちらでも表せることに注意しておく. ただし $\mathbb{N}$ は非負整数全体である.

Welter ゲームは, ヤング図形を使ったゲームと思うこともできる [10]. 分割 $\lambda(X)$

を $(x^{\sigma(1)}-m+1, x^{\sigma(2)}-m+2, \ldots, x^{\sigma(m)})$ で定義する. ただし σ は $x^{\sigma(1)} > x^{\sigma(2)} > \cdots > x^{\sigma(m)}$ となる置換である. 分割 $\lambda(X)$ と対応するヤング図形 $\{(i,j) \in \mathbb{Z}^2 \mid 1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant x^{\sigma(i)} - m + i\}$ を同一視する. このとき, コインを動かすことは, フックを抜くことに対応する. 佐藤 [11, 12] は (1.1) に加えて, 別の形の公式を得ている . さらに, この別の形がフック長公式に似ていることから, Welter ゲームは対称群の表現と関係があることを予想している. 川中 [7] は $\mathrm{sg}(X)$ を $\lambda(X)$ の 2-core tower を使って表している. *1

本稿の目的は p 飽和という概念を導入し, p 飽和 Welter ゲームの Sprague-Grundy 関数と対称群の通常既約表現の次数の関係を与えることである. なお, 本稿の詳細は投稿準備中である [5].

2 p 飽和 Welter ゲーム

本稿では（不偏） ゲーム とは次を満たす有向グラフを表す：

(G) 各頂点 X について X を始点とするパスの長さの最大 $\mathrm{lg}(X)$ が有限である.

ゲームの頂点を 局面 と呼ぶ. 二つの局面 X と Y に対して, X から Y への辺 (X, Y) があるとき Y を X の 子 と呼ぶ. このとき条件 (G) より $\mathrm{lg}(Y) < \mathrm{lg}(X)$ に注意しよう.

ゲームは Sprague-Grundy 数で解析できる. 局面 X の **Sprague-Grundy** 数 $\mathrm{sg}(X)$ とは, 次を満たす非負整数 n の中で最小のものである：

- X の 子 Y に対して $\mathrm{sg}(Y) \neq n$.

ゲーム Γ の局面全体から $\mathbb{N}$ への写像 $X \mapsto \mathrm{sg}(X)$ を Γ の **Sprague-Grundy** 関数 と呼ぶ. 条件 (G) よりゲームには子を持たない局面 X がある. 定義から X の Sprague-Grundy 数は 0 と定まり, ここから lg が小さい順に Sprague-Grundy 数は定まっていく. 定義から $\mathrm{sg}(X) \leqslant \mathrm{lg}(X)$ である. 例えば Welter ゲームの局面 X の場合は $\mathrm{sg}(X) \leqslant \mathrm{lg}(X) = |\lambda(X)|$ である. さて Sprague-Grundy の定理 [4, 13] から任意のゲームの局面 X は, 1 枚のコインを使った Welter ゲームの局面 $\{\ \mathrm{sg}(X)\ \}$ と本質的に同じと思える. 特に X が後手必勝形であることと $\mathrm{sg}(X) = 0$ は同値である. そのため $\mathrm{sg}(X)$ を求めることがゲームの解析では重要である. Welter ゲームや Nim については, 全ての

*1 さらに, Welter ゲームを一般化し, 良手判定アルゴリズムを含む様々な結果を得ている [7].

局面に対して Sprague-Grundy 数の明示公式が知られている.[*2] しかし, これらの他にはそのような例は殆ど見つかっていない. なお, ゲーム理論については [1, 2] が詳しい.

以下 p を 2 以上の整数とする. m 枚のコインを使った Welter ゲームを $\mathcal{W}^m$ で表す.

p 飽和を定義するために, まず p 指数 k の $\mathcal{W}^m$ を定義しよう. このゲームは, Moore の Nim_k (指数 k の Nim) [9] と Flanigan の Rim_k が元になっている.[*3] 集合 $\mathcal{D}^m_{p,k}$ を次を満たす $(d^1,\ldots,d^m) \in \mathbb{N}^m$ 全体としよう:

1. 0 でない成分があり, その個数は高々 $k-1$ 個,
2. $\mathrm{ord}\left(\sum_{i=1}^{m} d^i\right) = \min\left\{ \mathrm{ord}(d^i) : 1 \leqslant i \leqslant m \right\}$,
   ただし $\mathrm{ord}(d)$ は d の p-adic order を表す. すなわち d を割り切る p 冪の内の最大冪指数である ($\mathrm{ord}(0) = \infty$).

このとき $\mathcal{W}^m_{p,k}$ を頂点集合 $\mathcal{V}$ が

$$\left\{ (x^1,\ldots,x^m) \in \mathbb{N}^m : x^i \neq x^j \ (1 \leqslant i < j \leqslant m) \right\}$$

であり, 辺集合が $\{(X,Y) \in \mathcal{V}^2 : X - Y \in \mathcal{D}^m_{p,k}\}$ であるゲームと定義する. このゲームを p 指数 k の $\mathcal{W}^m$ と呼ぶ. すなわち, 通常の Welter ゲームでは 1 枚のコインしか動かせなかったが, p 指数 k の Welter ゲームでは高々 $k-1$ 枚のコインを動かすことができる. 例えば $\mathcal{W}^2_{2,3}$ において, 局面 $(4,3)$ から局面 $(1,0)$ には移動できないが, 局面 $(0,1)$ には移動できる. 集合で書くと, 局面 $\{3,4\}$ から局面 $\{0,1\}$ に移動できる.

ゲーム $\mathcal{W}^m_{p,k}$ が $\mathcal{W}^m$ の p 飽和 とは $\mathcal{W}^m_{p,k}$ と $\mathcal{W}^m_{p,m+1}$ が同じ Sprague-Grundy 関数を持つことと定義する.[*4] さらに $\mathcal{W}^m_{p,k}$ が $\mathcal{W}^m$ の p 飽和となるような最小の k を $\mathcal{W}^m$ の p 飽和指数 と呼んで, 記号 $\mathrm{sat}_p(\mathcal{W}^m)$ で表す. 整数 h が $\mathrm{sat}_p(\mathcal{W}^m)$ 以上のとき $\mathcal{W}^m_{p,h}$ も $\mathcal{W}^m_{p,m+1}$ と同じ Sprague-Grundy 関数を持つことに注意しておく.

公式 (1.1) より $\mathrm{sat}_2(\mathcal{W}^m) = 2$ がわかる. 一般に $\mathrm{sat}_p(\mathcal{W}^m) \geqslant \min(p, m+1)$ を示せる. しかし, $3 \leqslant p \leqslant m$ の場合について $\mathrm{sat}_p(\mathcal{W}^m)$ の正確な値はわかっていない.

[*2] Nim は Welter ゲームから条件「1 マスに置くことができるコインは高々 1 枚」を外したゲームである.

[*3] Nim_k と Rim_k では, プレイヤーは高々 $k-1$ 枚のコインを動かすことができる. Rim_k は未発表論文 [3] で導入されている.

[*4] p 飽和の定義は Nim の誘導部分グラフとなっているゲームに一般化できる. 特に Nim の p 飽和は Rim_p と同じ Sprague-Grundy 関数を持ち, m 枚のコインを使った Nim の p 飽和指数は $\min(p, m+1)$ である. さらに 反転 Nim というゲームについて, 2 飽和した Sprague-Grundy 関数と 2 飽和指数がわかっている [6].

3 主結果

主結果を述べるため, 言葉の復習と記号の導入をしよう. X を Welter ゲームの局面, L を非負整数とする. 各 $(i,j) \in \lambda(X)$ に対して フック $H_{i,j}$ とは集合

$$\{(i',j') \in \lambda(X) : (i' \geqslant i \text{ かつ } j' = j) \text{ または } (i' = i \text{ かつ } j' \geqslant j)\}$$

のことである. フックは大きさが p^L の倍数であるとき p^L フック と呼ぶ. $\overline{\tau}_L(X)$ を $\lambda(X)$ の p^L フックの個数を p で割った余りとする. $\overline{\tau}(X)$ を次で定義する：

$$\overline{\tau}(X) = \sum_{L \in \mathbb{N}} \overline{\tau}_L(X) p^L. \tag{3.1}$$

$\oplus_p$ と $\ominus_p$ をそれぞれ p 進展開して繰り上がりのない足し算と引き算とする. たとえば $5 \oplus_3 10 = (2+3) \oplus_3 (1+9) = 3+9$ である. 整数 x に対して $N_p(x) = x \ominus_p (x-1)$ とする.

定理 3.1. X を p 飽和 Welter ゲームの局面 $\{x^1, \ldots, x^m\}$ とする. このとき局面 Y で $|\lambda(Y)| = \overline{\tau}(Y) = \overline{\tau}(X)$ と（ヤング図形として）$\lambda(Y) \subseteq \lambda(X)$ を満たすものがある. さらに

$$\begin{aligned}
\mathrm{sg}(X) &= \overline{\tau}(X) \\
&= x_1 \oplus_p \cdots \oplus_p x_m \ominus_p \left(\bigoplus_{i<j} N_p(x_i - x_j) \right) \\
&= \bigoplus_{(i,j) \in \lambda(X)} N_p(|H_{i,j}|).
\end{aligned}$$

p を素数としよう. X を p-飽和 Welter ゲームの局面として ρ^X を $\lambda(X)$ に対応する $\mathrm{Sym}(|\lambda|)$ の既約表現とする. このとき, Macdonald の結果 [8] を使うと, 表現 ρ^X の次数が p と素であることと $|\lambda(X)| = \overline{\tau}(X)$ が同値であることがわかる. よって, 定理 3.1 より次を得る.

系 3.2. X を p 飽和 Welter ゲームの局面とする. p が素数ならば, 次が成立する：

1. ρ^X の次数が p と素であることと $\mathrm{sg}(X) = |\lambda(X)|$ であることは同値である.
2. ρ^X の $\mathrm{Sym}(\mathrm{sg}(X))$ への制限は次数が p と素な既約成分を持つ.
   ただし $\mathrm{Sym}(0) = \mathrm{Sym}(1)$ とする.

参考文献

[1] E. R. Berlekamp, J. H. Conway, and R. K. Guy. *Winning Ways for Your Mathematical Plays*. A.K. Peters, Natick, Mass., 2nd edition, 2001.

[2] J. H. Conway. *On numbers and games*. A.K. Peters, Natick, Mass., 2nd edition, 2001.

[3] J. Flanigan. Nim, Trim and Rim. Working Paper, Mathematics Department, University of California, Los Angeles, 1980.

[4] P. M. Grundy. Mathematics and games. *Eureka*, 2:6–8, 1939.

[5] Y. Irie. p-Saturations of Welter's Game and the Irreducible Representations of Symmetric Groups. in preparation.

[6] 入江佑樹. 反転ニムゲーム. 第 32 回代数的組合せ論シンポジウム報告集, pp. 14–17, June 22-24, 2015.

[7] 川中宣明. フック構造をもつゲームとアルゴリズム. 数学, 63(4):421–441, 2011.

[8] I. G. Macdonald. On the Degrees of the Irreducible Representations of Symmetric Groups. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 3(2):189–192, Jan. 1971.

[9] E. H. Moore. A Generalization of the Game Called Nim. *Annals of Mathematics*, 11(3):93–94, 1910.

[10] 佐藤幹夫 (上野健爾 記). あるゲームについて. 第 12 回代数分科会シンポジューム報告集, pp. 123–136, 1968.

[11] 佐藤幹夫 (榎本彦衛 記). Maya game について. 数学のあゆみ, 15(1):73–84, 1970.

[12] 佐藤幹夫 (榎本彦衛 記). マヤ・ゲームの数学的理論. 数理解析研究所講究録, 第 98 巻, pp. 105–135, 1970.

[13] R. Sprague. Über mathematische Kampfspiele. *Tohoku Mathematical Journal, First Series*, 41:438–444, 1935.

[14] C. P. Welter. The Theory of a Class of Games on a Sequence of Squares, in Terms of the Advancing Operation in a Special Group. *Indagationes Mathematicae (Proceedings)*, 57:194–200, 1954.