

# The integrality of $p$ -adic multiple zeta values (joint work with M. Hirose, S. Yasuda)

大阪大学大学院理学研究科 赤木 和真

Kazuma Akagi

Department of Mathematics, Graduate School of Science,  
Osaka University

## 1 Introduction

本稿では、古庄氏 [F] によって定義された  $p$ -進多重ゼータ値の integrality に関する結果について解説する。この研究は広瀬氏と安田氏との共同研究である。非負整数  $k$  に対して、集合  $\{\frac{p^l}{l!} \mid l \geq k\}$  によって生成される  $\mathbb{Z}_p$  のイデアルを  $(p\mathbb{Z}_p)^{[k]}$  と表すことにする。主結果は  $p$ -進多重ゼータ値  $\zeta_p(\mathbf{k})$  に関する次の定理である。

**Theorem 1.1** (赤木-広瀬-安田 [AHY], Chatzistamatiou[Cha]).  $n$  を非負整数とする。重さ  $k$  の index  $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n)$  に対して、

$$\zeta_p(\mathbf{k}) \in (p\mathbb{Z}_p)^{[k]}$$

が成り立つ。

本稿は 5 つの章からなる。第 2 章で  $p$ -進多重ゼータ値の特徴付けを行う。第 3 章ログ・スキームを用いて、 $p$ -進有理数体  $\mathbb{Q}_p$  上のコホモロジー  $H_{\mathbb{Q}_p}$  を定義し、 $p$ -進多重ゼータ値との関係を見る。第 4 章では第 3 章で構成したコホモロジーの  $H_{\mathbb{Q}_p}$  の  $\mathbb{Z}_p$  モデル  $H$  を構成するために複体  $C^\bullet$  を導入する。第 5 章で複体  $C^\bullet$  に Frobenius 作用を定義し主定理の証明を行う。

## 2 $p$ -進多重ゼータ値と iterated formal integral

初めに、 $p$ -進多重ゼータ値を定義する前に  $p$ -進多重ポリログを定義する。以下  $a \in \mathbb{C}_p$  を固定する。写像  $\log^a: \mathbb{C}_p \rightarrow \mathbb{C}_p$  を  $\log^a(p) = a$  となる  $p$ -進対数関数とする。

**Definition 2.1** (古庄 [F]). 任意の index  $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n)$  に対して、 $p$ -進多重ポリログ関数  $\text{Li}_{\mathbf{k}}^a(t)$  を次のように定める:

$$\text{Li}_{\mathbf{k}}^a(t) = \begin{cases} \int_0^t \frac{1}{t} \text{Li}_{k_1, \dots, k_{n-1}}^a(t) dt & \text{if } k_1 > 1, \\ \int_0^t \frac{1}{1-t} \text{Li}_{k_1, \dots, k_{n-1}}^a(t) dt & \text{if } k_1 = 1, n > 1, \\ \int_0^t \frac{1}{1-t} dt = -\log^a(1-t) & \text{if } k_1 = 1, n = 1. \end{cases}$$

$f$  を  $\mathbb{C}_p$  上定義された関数とする。元  $\alpha \in \mathbb{C}_p$  に収束する数列  $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$  であって、体拡大  $\mathbb{Q}_p(t_1, t_2, \dots)/\mathbb{Q}_p$  の分岐指数が有限であるような任意の数列に対して、数列に依らずに極限  $\lim_{i \rightarrow \infty} f(t_i)$  が存在するとき、この極限を  $\lim_{t \rightarrow \alpha} f(t)$  と書くことにする。

**Theorem 2.2** (古庄 [F]).  $\lim_{t \rightarrow 1} \text{Li}_k^a(t)$  が収束するか発散するかは枝  $a$  に依らない。さらに、収束するときは収束の値も枝  $a$  に依らない。

次に、 $p$ -進多重ゼータ値を定義する。

**Definition 2.3** (古庄 [F]).  $\lim_{t \rightarrow 1} \text{Li}_k^a(t)$  が収束するとき、その値を  $\zeta_p(\mathbf{k})$  と書き、 $p$ -進多重ゼータ値と呼ぶ。

**Theorem 2.4** (古庄 [F]).  $k_1 > 1$  であるとき、 $\lim_{t \rightarrow 1} \text{Li}_k^a(t)$  はつねに収束する。

注意として、 $k_1 = 1$  のときでも収束することがある。

**Theorem 2.5** (古庄 [F]).  $\zeta_p(\mathbf{k}) \in \mathbb{Q}_p$  が成り立つ。

以下、枝  $a = 0$  とする。次に、 $p$ -進多重ゼータ値  $\zeta_p(\mathbf{k})$  を特徴付けるために次のような集合を準備する。

$$R := \{ f(t) \in \mathbb{Q}_p[[t]] \mid f(t) \text{ は } |t|_p < 1 \text{ 上収束する} \}$$

$$R^\dagger := \{ f(t) \in \mathbb{Q}_p[[t]] \mid f(t) \text{ は } |t|_p < \epsilon \text{ 上収束する, } \epsilon > 1 \}$$

このとき、任意の元  $f \in R^\dagger$  に対して、 $t = 1$  での値  $f(1)$  は  $p$ -進数である。Frobenius 射  $\varphi$  を

$$\varphi(t) := \frac{t^p}{(1-t)^p + t^p}$$

により定義する。このとき、任意の元  $f \in \mathbb{Q}_p[[t]]$  に対して、 $\varphi(f)(t) := f(\varphi(t))$  とおくことで、Frobenius 射  $\varphi$  は自己準同型  $\varphi: R^\dagger \rightarrow R^\dagger$  に延びて、次が成り立つ。

**Theorem 2.6.** 任意の index  $\mathbf{k}$  に対して、 $R^\dagger$  の元からなる族  $(h_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} )_{\mathbf{k}' \text{ s.t. } |\mathbf{k}'| < |\mathbf{k}|}$  で次の条件を満たすものがただ一つ存在する:

$$\varphi(\text{Li}_{\mathbf{k}}) = p^{|\mathbf{k}|} \text{Li}_{\mathbf{k}} + \sum_{\mathbf{k}' \text{ s.t. } |\mathbf{k}'| < |\mathbf{k}|} h_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \text{Li}_{\mathbf{k}'}$$

Coleman 積分は Frobenius 射の持ち上げに依らないということから、古庄氏によって定義された  $p$ -進多重ゼータ値  $\zeta_p(\mathbf{k})$  は次の性質 (i), (ii) により特徴付けられる:

$$(i) \quad \zeta_p(\emptyset) = 1,$$

$$(ii) \quad \zeta_p(\mathbf{k}) = p^{|\mathbf{k}|} \zeta_p(\mathbf{k}) + \sum_{\mathbf{k}'} h_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}(1) \zeta_p(\mathbf{k}')$$

Theorem 2.6 を証明するために formal iterated integral を導入する。まず  $\mathbb{Q}_p((t))$  上の  $t$ -進連続な 1-form の空間を  $\Omega_{\mathbb{Q}_p((t))/\mathbb{Q}_p}^1$  と表す。この空間は  $dt$  によって生成される階数 1 の自由

$F((t))$ -加群である. また  $dt$  によって生成された  $\Omega_{\mathbb{Q}_p((t))/\mathbb{Q}_p}^1$  の  $\mathbb{Q}_p[[t]]$ -部分加群 (resp.  $R^+$ -部分加群) を  $\Omega_{\mathbb{Q}_p[[t]]}^1$  (resp.  $\Omega_{R^+}^1$ ) と表すことにし, 写像  $\int_0: \Omega_{\mathbb{Q}_p[[t]]}^1 \rightarrow t\mathbb{Q}_p[[t]]$  は

$$\int_0 \omega = \sum_{n \geq 0} a_n \frac{t^{n+1}}{n+1}, \quad \omega = \left( \sum_{n \geq 0} a_n t^n \right) dt$$

により定義する.  $\int_0 \omega$  を  $\omega$  の formal integral と呼ぶ.  $k$  を非負整数とする.  $\omega_1, \dots, \omega_k \in \frac{1}{t}\Omega_{\mathbb{Q}_p[[t]]}^1$  に対して,  $\int_0 \omega_1 \circ \dots \circ \omega_k$  を帰納的に次のように定義する (ただし,  $k=0$  のときは  $\int_0 \omega_1 \circ \dots \circ \omega_k = 1$  とする).  $f = \int_0 \omega_2 \circ \dots \circ \omega_k$  とおくと,  $f\omega_1 \in \Omega_{\mathbb{Q}_p[[t]]}^1$  であることから, formal integral  $\int_0 f\omega_1$  を  $\int_0 \omega_1 \circ \dots \circ \omega_k$  と表すことにする. これを  $\omega_1, \dots, \omega_k$  の formal iterated integral と呼ぶ. また  $\Omega_{R^+}^1$  についても同様に定義できる.

先ほど定義した iterated formal integral を用いて多重ボリログを考えることができる. index  $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n)$  とし  $w = x^{k_1-1}y \dots x^{k_n-1}y$  を  $\mathbb{k}$  と対応する  $x, y$  からなる語とする. この  $w$  を  $w = w_1 \dots w_k$  と表すことにする (ただし,  $k = |\mathbf{k}|$  とする). 各  $i = 1, \dots, k$  に対して,

$$\omega_i = \begin{cases} \frac{dt}{t} & \text{if } w_i = x, \\ \frac{dt}{1-t} & \text{if } w_i = y, \end{cases}$$

とおき,  $\omega_i$  を  $\frac{1}{t}\Omega_{\mathbb{Q}_p[[t]]}^1$  の元とみなす. また  $w_k = y$  なので,  $\omega_k \in \Omega_{\mathbb{Q}_p[[t]]}^1$  である. したがって, formal iterated integral は形式べき級数  $\text{Li}_{\mathbf{k}}(t)$  と一致する:

$$\text{Li}_{\mathbf{k}}(t) = \int_0 \omega_1 \circ \dots \circ \omega_k.$$

**Proposition 2.7.**  $k$  を正の整数とし,  $\omega_1, \dots, \omega_{k-1} \in \frac{1}{t}\Omega_{\mathbb{Q}_p[[t]]}^1, \omega_k \in \Omega_{\mathbb{Q}_p[[t]]}^1$  とする. 整数  $i \in \{1, \dots, k\}$  を固定し,  $\omega_i \in \Omega_{\mathbb{Q}_p[[t]]}^1$  と仮定する. また,  $f_i = \int_0 \omega_i$  とおく. このとき, formal iterated integral

$$I = \int_0 \omega_1 \circ \dots \circ \omega_k$$

は次の表示を持つ.

(i)  $2 \leq i \leq k-1$  であるならば

$$I = \int_0 \omega_1 \circ \dots \circ \omega_{i-2} \circ f_i \omega_{i-1} \circ \omega_{i+1} \circ \dots \circ \omega_k \\ - \int_0 \omega_1 \circ \dots \circ \omega_{i-1} \circ f_i \omega_{i+1} \circ \omega_{i+2} \circ \dots \circ \omega_k.$$

(ii)  $i=1$  かつ  $k \geq 2$  であるならば

$$I = f_1 \int_0 \omega_2 \circ \dots \circ \omega_k - \int_0 f_1 \omega_2 \circ \omega_{i+2} \circ \dots \circ \omega_k.$$

(iii)  $i=k$  かつ  $k \geq 2$  であるならば

$$I = \int_0 \omega_1 \circ \dots \circ \omega_{k-2} \circ f_k \omega_{k-1}.$$

(iv)  $i = k = 1$  であるならば,  $I = f_1$  である.

次に  $R^\dagger$  上の formal iterated integral について考える. 各整数  $k$  に対して,  $|k| \leq k$  である多重ポリログ  $\text{Li}_k$  によって生成される  $\mathbb{Q}_p[[t]]$  上の  $R^\dagger$ -部分加群を  $M_k$  と書き表すことにする.

**Proposition 2.8.** 整数  $k \geq 0$  とし,  $\omega_1, \dots, \omega_k \in \frac{1}{i}\Omega_{R^\dagger}^1 + \frac{1}{1-i}\Omega_{R^\dagger}^1$  とする. もし  $k \geq 1$  なら,  $\omega_k \in \frac{1}{1-i}\Omega_{R^\dagger}^1$  と仮定する. このとき,  $\int_0^1 \omega_1 \circ \dots \circ \omega_k$  は  $M_k$  に属する. さらに, もしある  $i \in \{1, \dots, k\}$  に対し,  $\omega_i \in \Omega_{R^\dagger}^1$  であるなら,  $\int_0^1 \omega_1 \circ \dots \circ \omega_k$  は  $M_{k-1}$  に属する.

*Proof.*  $\frac{1}{i}\Omega_{R^\dagger}^1 + \frac{1}{1-i}\Omega_{R^\dagger}^1 = \mathbb{Q}_p \frac{dt}{t} + \mathbb{Q}_p \frac{dt}{1-t} + \Omega_{R^\dagger}^1$  ということと Proposition 2.7 から従う.  $\square$

*Proof of Theorem 2.6.*  $\omega = fdt \in \Omega_{\mathbb{Q}_p((t))/\mathbb{Q}_p}^1$  に対して,  $\varphi(\omega) = \varphi(f)d(\varphi(t))$  とおくと, これは  $\mathbb{Q}_p$ -線形写像  $\varphi: \Omega_{R^\dagger}^1 \rightarrow \Omega_{R^\dagger}^1$  を与える. 直接計算すると,

$$\varphi\left(\frac{dt}{t}\right) \in \frac{pdt}{t} + \Omega_{R^\dagger}^1, \quad \varphi\left(\frac{dt}{1-t}\right) \in \frac{pdt}{1-t} + \Omega_{R^\dagger}^1$$

である. これより, Proposition 2.8 から, 重さ  $k$  の index  $k$  に対して,  $\varphi(\text{Li}_k) \in p^k \text{Li}_k + M_{k-1}$  であることがわかる. また, これらの多重ポリログたちは  $R^\dagger$  上線形独立であることから, Theorem 2.6 が従う.  $\square$

### 3 Rational fundamental complex

1次元アフィン空間  $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}_p}^1$  に正規交差因子  $\{0, 1\}$  に付随する対数構造  $M_{\mathbb{Q}_p}$  を入れたログ・スキームを  $U$  と表すことにする (ログ・スキームについては [Ka] を参照せよ). 整数  $k \geq 1$  に対して, fine ログ・スキームの圏で自明なログ・スキーム  $\text{Spec } \mathbb{Q}_p$  上  $U$  の  $k$ -fold fiber product を  $U^k$  と表すことにする. ログ・スキーム  $U^k$  に付随する log poles 付き de Rham 複体を  $\Omega_{U^k/\mathbb{Q}_p}^\bullet$  と表す. 各整数  $i$  に対して,

$$\Omega_{U^k/\mathbb{Q}_p}^{\dagger, i} = \Omega_{U^k/\mathbb{Q}_p}^i \otimes_{\Gamma(U^k, \mathcal{O}_{U^k})} \Gamma(U^k, \mathcal{O}_{U^k})^\dagger,$$

とおき, これを log poles 付き overconvergent de Rham 複体と呼ぶ. 定義から, 埋め込み  $\Omega_{U^k/\mathbb{Q}_p}^\bullet \hookrightarrow \Omega_{U^k/\mathbb{Q}_p}^{\dagger, \bullet}$  がある. このとき, 任意の整数  $k \geq 1$  と各整数  $i$  に対して,

$$H_{\text{dR}}^i((\mathbb{A}_{\mathbb{Q}_p}^1 \setminus \{0, 1\})^k/\mathbb{Q}_p) \simeq H^i(\Omega_{U^k/\mathbb{Q}_p}^\bullet) \simeq H^i(\Omega_{U^k/\mathbb{Q}_p}^{\dagger, \bullet}).$$

が成り立つ.

次に, 複体の射  $s^k: \Omega_{U^k/\mathbb{Q}_p}^{\dagger, \bullet} \rightarrow \Omega_{U^{k-1}/\mathbb{Q}_p}^{\dagger, \bullet}$  を構成する. 整数  $k \geq 1$  とし, 各  $l = 0, 1, \dots, k$  に対し, 複体間の写像  $s_l^k: \Omega_{U^k/\mathbb{Q}_p}^{\dagger, \bullet} \rightarrow \Omega_{U^{k-1}/\mathbb{Q}_p}^{\dagger, \bullet}$  を次のように定義する.

(i)  $1 \leq l \leq k-1$  の場合.

写像  $s_l^k$  を  $\tau_l^k(t_1, \dots, t_{k-1}) = (t_1, \dots, t_l, t_l, t_{l+1}, \dots, t_{k-1})$  によって定義された写像  $\tau_l^k: U^{k-1} \rightarrow U^k$  に関する pull-back とする.

(ii)  $l = 0, k$  の場合.

まず写像  $\tau_l^k : \mathbb{A}_{\mathbb{Q}_p}^{k-1} \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{Q}_p}^k$  を次のように定義する:

$$\tau_l^k(t_1, \dots, t_{k-1}) = \begin{cases} (1, t_1, \dots, t_{k-1}) & (l = 0) \\ (t_1, \dots, t_{k-1}, 0) & (l = k). \end{cases}$$

これから, 写像  $s_l^k$  を  $\tau_l^k$  に関する pull-back 写像として定義する. これらの写像に関して  $s_0^k(\frac{dt_1}{1-t_1} \wedge \dots) = 0$ ,  $s_k^k(\dots \wedge \frac{dt_{k-1}}{t_{k-1}}) = 0$  と考える.

これらの写像を用いて, 写像

$$s^k := \sum_{l=0}^k (-1)^l s_l^k : \Omega_{U^k/\mathbb{Q}_p}^{\dagger, \bullet} \rightarrow \Omega_{U^{k-1}/\mathbb{Q}_p}^{\dagger, \bullet}$$

とおくと, この写像は複体の射となる. このとき, sequence

$$\dots \xrightarrow{s^{k+1}} \Omega_{U^k/\mathbb{Q}_p}^{\dagger, \bullet} \xrightarrow{s^k} \Omega_{U^{k-1}/\mathbb{Q}_p}^{\dagger, \bullet} \xrightarrow{s^{k-1}} \dots \xrightarrow{s^1} \Omega_{U^0/\mathbb{Q}_p}^{\dagger, \bullet} \rightarrow 0$$

は二重複体である. ここで,  $\Omega_{U^k/\mathbb{Q}_p}^{\dagger, i}$  は bidegree  $(-k, i)$  である. これから, この二重複体に対応する複体  $C_{\mathbb{Q}_p}^{\dagger, \bullet}$  が得られる. また  $H_{\mathbb{Q}_p} := H^0(C_{\mathbb{Q}_p}^{\dagger, \bullet})$  とおく.

formal iterated integral に関するコホモロジークラスを考える. 整数  $k \geq 1$  と  $\omega_1, \dots, \omega_k \in \frac{1}{t}\Omega_{R^\dagger}^1 + \frac{1}{1-t}\Omega_{R^\dagger}^1$  に対して,  $H_{\mathbb{Q}_p}$  上  $\omega_1(t_1) \wedge \dots \wedge \omega_k(t_k) \in \Omega_{U^k/\mathbb{Q}_p}^{\dagger, k}$  のクラスを  $[\omega_1 \circ \dots \circ \omega_k]$  と表すことにする. ただし,  $k=0$  のときは  $[\omega_1 \circ \dots \circ \omega_k]$  を  $1 \in \Omega_{U^0/\mathbb{Q}_p}^{\dagger, 0}$  のクラスとする. また  $x, y$  に関する任意の語  $w = w_1 \dots w_k$  に対して,

$$\omega_i = \begin{cases} \frac{dt}{t} & \text{if } w_i = x, \\ \frac{dt}{1-t} & \text{if } w_i = y, \end{cases}$$

とおくと, クラス  $[w] = [\omega_1 \circ \dots \circ \omega_k] \in H_{\mathbb{Q}_p}$  が成り立つ. これより, 集合  $\{[w] = [\omega_1 \circ \dots \circ \omega_k] \mid k \geq 0, w \text{ は } x, y \text{ に関する語}\}$  は  $H_{\mathbb{Q}_p}$  の  $\mathbb{Q}_p$ -basis になる.

**Proposition 3.1.** 整数  $k \geq 0$ ,  $\omega_1, \dots, \omega_k \in \frac{1}{t}\Omega_{R^\dagger}^1 + \frac{1}{1-t}\Omega_{R^\dagger}^1$  とする. もし  $k \geq 1$  なら,  $\omega_k \in \frac{1}{1-t}\Omega_{R^\dagger}^1$  と仮定する (Proposition 2.7 より,  $\int_0 \omega_1 \circ \dots \circ \omega_k \in M_k$  である). また formal iterated integral

$$\int_0 \omega_1 \circ \dots \circ \omega_k = \sum_{|k'| < k} h_{k'} \text{Li}_{k'},$$

と書き表す. ここで,  $h_{k'}$  は  $R^\dagger$  のある元である. このとき, 次の等式が成り立つ:

$$[\omega_1 \circ \dots \circ \omega_k] = \sum_{k'} \pm h_{k'}(1)[w'].$$

ここで,  $w'$  は  $k'$  と対応する語であり,  $\pm$  は単体的複体から定まる符号である.

## 4 Integral fundamental complex

次に  $\mathbb{Z}_p$ -加群  $H$  であり同型  $H \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p \simeq H_{\mathbb{Q}_p}$  となる  $\mathbb{Z}_p$ -加群を構成していく (この  $H$  を  $H_{\mathbb{Q}_p}$  の  $\mathbb{Z}_p$  モデルと呼ぶ).  $p$ -進整数環  $\mathbb{Z}_p$  上の 1 次元射影空間  $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}_p}^1$  に正規交差因子  $\{0, 1, \infty\}$  に付随する対数構造  $M$  を入れたログ・スキームを  $X$  と表すことにする. またアフィンスキーム  $\text{Spec } \mathbb{Z}_p$  に自明な対数構造を入れたログ・スキームを  $W$  とする. 各整数  $k \geq 0$  に対して, fine ログ・スキームの圏で  $W$  上  $X$  の  $k$ -fold fiber product を  $X^k$  と表す.

ある  $\mathbb{Z}_p$ -加群の複体  $C_k^\bullet$  を構成する. ログ・スキーム  $X^k$  の modulo  $p$  reduction したログ・スキームを  $Y^k$  とおくと, 複体  $C_k^\bullet$  はログ・クリスタリンコホモロジー  $H_{\text{cris}}^i(Y^k/W)$  を計算するために必要である.

まず,  $P = \{\{0\}, \{\infty\}, \{0, \infty\}\}$  とおく. 集合  $\{1, \dots, k\}$  から  $P$  への写像全体の集合を  $I_k = \text{Map}(\{1, \dots, k\}, P)$  と表すことにする. 元  $f \in I_k$  に対して, アフィン開部分ログ・スキーム  $U(f) \subset X^k$  を各  $l = 1, \dots, k$  に対して  $t_l \notin f(l)$  によって定義されたログ・スキームとする. ただし,  $t_l$  は  $X^k$  の  $l$  番目の座標である. ログ・スキーム  $U(f)$  上の de Rham 複体を  $\omega^\bullet(f)$  と表し, その  $p$ -進完備化を  $\hat{\omega}^\bullet(f)$  と表す.

各  $d \in I_k$  に対して, 集合  $\{\ell \in \{1, \dots, k\} \mid f(\ell) = \{0, \infty\}\}$  を  $J_f$  と表し, 集合  $J_f$  の位数を  $|J_f|$  と表す. 各  $\ell \in J_f$  と  $t \in \{0, \infty\}$  に対して,  $I_k$  の元  $f_{\ell,t}$  を次のように定義する:

$$f_{\ell,t}(\ell') = \begin{cases} f(\ell'), & \text{if } \ell' \neq \ell, \\ \{t\}, & \text{if } \ell' = \ell. \end{cases}$$

各整数  $j \geq 0$  に対し, 複体

$$C_k^{(j), \bullet} = \bigoplus_{\substack{f \in I_k \\ |J_f| = j}} \hat{\omega}^\bullet(f)$$

とおく. 複体間の写像  $d_k^j : C_k^{(j), \bullet} \rightarrow C_k^{(j+1), \bullet}$  を定義する. 複体  $C_k^{(j), \bullet}$  の元  $a = (a_g)_{g \in I_k, |J_g| = j}$  と  $|J_f| = j+1$  を満たす  $f \in I_k$  に対して,  $d_k^j(a)$  の  $f$  での座標を

$$\sum_{m=0}^j (-1)^m (l_{f, \ell_m, 0}^* a_{f_{\ell_m, 0}} - l_{f, \ell_m, \infty}^* a_{f_{\ell_m, \infty}})$$

とする. ここで,  $J_f = \{\ell_0, \dots, \ell_j\}$ ,  $\ell_0 < \dots < \ell_{j+1}$  であり,  $\ell \in J_f$  と  $t \in \{0, \infty\}$  に対して,  $l_{f, \ell, t}^*$  は open immersion  $U(f) \hookrightarrow U(f_{\ell, t})$  に関する pull-back 写像  $\hat{\omega}^\bullet(f_{\ell, t}) \rightarrow \hat{\omega}^\bullet(f)$  である.

この複体の射を用いると, sequence

$$C_k^{(0), \bullet} \xrightarrow{d_k^0} C_k^{(1), \bullet} \xrightarrow{d_k^1} C_k^{(2), \bullet} \xrightarrow{d_k^2} \dots$$

は二重複体となる. ここで,  $C_k^{(j), \ell}$  は bidegree  $(j, \ell)$  とおく. この二重複体に付随する単体的複体を  $C_k^\bullet$  と表す. 構成から, 複体  $C_k^\bullet$  は  $k$ -fold 完備テンソル積  $C_1^\bullet \hat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p} \dots \hat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p} C_1^\bullet$  に付随する単体的複体と同型である.

また同様に  $\omega^\bullet(f)$  を overconvergent de Rham 複体  $\omega^{\dagger, \bullet}(f)$  に置き換えることよって, 部分複体  $C_k^{\dagger, \bullet} \subset C_k^\bullet$  を定義できる.

**Proposition 4.1.** 複体の射  $C_k^{\dagger, \bullet} \hookrightarrow C_k^{\bullet}$  は quasi-isomorphism である。

次に、複体  $C_k^{\bullet}, C_k^{\dagger, \bullet}$  と結びつく簡単な複体  $C_k^{\prime \bullet}$  を導入する。まず  $c_k \in I_k$  を  $\{\infty\}$  へ送る定数写像とする。複体  $\mathbb{Z}_p \xrightarrow{0\text{-map}} \mathbb{Z}_p \frac{dt}{t} \oplus \mathbb{Z}_p \frac{dt}{1-t}$  を  $C_1^{\prime \bullet}$  と表す。ここで  $\mathbb{Z}_p$  は degree 0 に位置する。対角写像  $C_1^{\prime \bullet} \hookrightarrow C_1^{(0), \bullet}$  と graded  $\mathbb{Z}_p$ -加群の埋め込み  $C_1^{(0), \bullet} \hookrightarrow C_1^{\bullet}$  との合成写像  $C_1^{\prime \bullet} \hookrightarrow C_1^{\bullet}$  を考える。この合成写像  $C_1^{\prime \bullet} \hookrightarrow C_1^{\bullet}$  は複体の射であり、quasi-isomorphism である。各  $k \geq 0$  に対して、 $k$ -fold テンソル積  $C_1^{\prime \bullet} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \cdots \otimes_{\mathbb{Z}_p} C_1^{\prime \bullet}$  に付随する単体的複体を  $C_k^{\prime \bullet}$  とする。このとき、合成写像から quasi-isomorphism  $C_k^{\prime \bullet} \hookrightarrow C_k^{\bullet}$  が誘導される。以上の議論より、Proposition 4.1 によって次の系が得られる。

**Corollary 4.2.** 合成写像

$$C_k^{\prime \bullet} \hookrightarrow C_k^{\dagger, (j), \bullet} \hookrightarrow C_k^{\dagger, \bullet}$$

は quasi-isomorphism である。

次に複体  $C^{\bullet}$  を  $C_k^{\bullet}$  から構成する。整数  $k \geq 1$  とする。各  $\ell = 0, \dots, k$  に対して、複体の射

$$s_{k, \ell} : C_k^{\bullet} \rightarrow C_{k-1}^{\bullet}$$

で  $C_k^{\dagger, \bullet} \rightarrow C_{k-1}^{\dagger, \bullet}$  を誘導する射を導入する。まず写像  $s'_{k, \ell} : I_{k-1} \rightarrow I_k$  を

$$s'_{k, \ell}(f)(m) = \begin{cases} f(m), & \text{if } 1 \leq m \leq \min(\ell, k-1), \\ f(m-1), & \text{if } \max(\ell, 1) < m \leq k, \\ \infty, & \text{if } (\ell, m) = (0, 1), (k, k). \end{cases}$$

とする。この写像  $s'_{k, \ell}$  は単射である。各  $f \in I_{k-1}$  に対して、複体の射

$$s_{k, \ell, f} : \widehat{\omega}^*(s'_{k, \ell}(f)) \rightarrow \widehat{\omega}^*(f)$$

を次のように定義する。各  $\ell = 0, \dots, k$  に対して、closed immersion  $\iota_{k, \ell} : (\mathbb{P}_{\mathbb{Z}_p}^1)^{k-1} \hookrightarrow (\mathbb{P}_{\mathbb{Z}_p}^1)^k$  を

$$\iota_{k, \ell}(t_1, \dots, t_{k-1}) = \begin{cases} (1, t_1, \dots, t_{k-1}), & \text{if } \ell = 0, \\ (t_1, \dots, t_{\ell}, t_{\ell}, \dots, t_{k-1}), & \text{if } 1 \leq \ell \leq k-1, \\ (t_1, \dots, t_{k-1}, 0), & \text{if } \ell = k \end{cases}$$

と定義する。

$1 \leq \ell \leq k-1$  の場合について、射  $\iota_{k, \ell}$  はログ・スキーム間の closed immersion  $\iota_{k, \ell, f} : U(f) \hookrightarrow U(s'_{k, \ell}(f))$  を誘導する。射  $\iota_{k, \ell, f}$  による複体の pull-back 写像を  $s_{k, \ell, f}$  とする。

$\ell = 0$  (resp.  $\ell = k$ ) の場合は、射  $\iota_{k, \ell}$  はログ・スキームの closed immersion  $\iota_{k, \ell, f} : U(f) \hookrightarrow U(s'_{k, \ell}(f))$  を誘導しないが、 $d \log(t_1) \wedge \omega$  (resp.  $d \log(t_k) \wedge \omega$ ) の形の微分形式を 0 へ送ることによって、複体の pull-back 写像  $s_{k, \ell, f} : \widehat{\omega}^*(s'_{k, \ell}(f)) \rightarrow \widehat{\omega}^*(f)$  を定義することができる。写像  $s_{k, \ell}^{(j)} : C_k^{(j), \bullet} \rightarrow C_{k-1}^{(j), \bullet}$  を  $(\omega_f)_{f \in I_{k-1}, |J_f|=j}$  を  $(s_{\ell, f}(\omega_{s'_{k, \ell}(f)}))_{f \in I_{k-1}, |J_f|=j}$  へ送る写像とする。

写像  $s_{k,\ell}^{(j)}$  たちは複体の射  $s_{k,\ell}: C_k^\bullet \rightarrow C_{k-1}^\bullet$  を与えて, 射  $s_{k,\ell}$  は  $C_k^{\dagger,\bullet} \rightarrow C_{k-1}^{\dagger,\bullet}$  を誘導する. 射  $s_k := \sum_{\ell=0}^k (-1)^\ell s_{k,\ell}$  とおくと, sequence

$$\dots \xrightarrow{s_3} C_2^\bullet \xrightarrow{s_2} C_1^\bullet \xrightarrow{s_1} C_0^\bullet$$

は二重複体となる. ここで,  $C_k^m$  は bidegree  $(-k, m)$  に位置する. この二重複体に付随する simple 複体を  $C^\bullet$  と表すことにする. 同様に複体  $C^{\dagger,\bullet}$  も定義できる.

各  $k \geq 0$  に対し, 自然な射影  $C_k^{\dagger,\bullet} \rightarrow C_k^{\dagger,(0),\bullet} \rightarrow \hat{\omega}^{\dagger,\bullet}(c_k)$  は複体の全射  $C_k^{\dagger,\bullet} \rightarrow \hat{\omega}^{\dagger,\bullet}(c_k)$  を与える. もし  $k \geq 1$  なら, 各  $\ell = 0, \dots, k$  に対し, 写像  $s'_{k,\ell}: I_{k-1} \rightarrow I_k$  を  $c_{k-1}$  を  $c_k$  へ送る写像とする. これから, 複体の可換図式

$$\begin{array}{ccc} C_k^{\dagger,\bullet} & \xrightarrow{s_{k,\ell}} & C_{k-1}^{\dagger,\bullet} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \hat{\omega}^{\dagger,\bullet}(c_k) & \xrightarrow{s_{k,\ell,c_{k-1}}} & \hat{\omega}^{\dagger,\bullet}(c_{k-1}) \end{array}$$

を得る. また,  $s'_k := \sum_{\ell=0}^k (-1)^\ell s_{k,\ell, \{f_{k-1}^\infty\}}$  とおく. このとき, 二重複体

$$\dots \xrightarrow{s'_3} \hat{\omega}^{\dagger,\bullet}(c_2) \xrightarrow{s'_2} \hat{\omega}^{\dagger,\bullet}(c_1) \xrightarrow{s'_1} \hat{\omega}^{\dagger,\bullet}(c_0)$$

を得る. この二重複体に付随する単体的複体を  $\hat{\omega}^{\dagger,\bullet}(c)$  と表し, 複体の全射  $C^\bullet \rightarrow \hat{\omega}^{\dagger,\bullet}(c)$  が得られる. したがって, 次の可換図式を得る:

$$\begin{array}{ccccc} C_k^{\dagger,\bullet} & \longrightarrow & \hat{\omega}^{\dagger,\bullet}(c_k) & \longleftarrow & C_k^{\dagger,\bullet} \xrightarrow{qis} C_k^\bullet \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ C_k^{\dagger,\bullet} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p & \xrightarrow{qis} & \hat{\omega}^{\dagger,\bullet}(c_k) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p & \xrightarrow{\cong} & \Omega_{U^k/\mathbb{Q}_p}^{\dagger,\bullet} \end{array}$$

また,  $H := H^0(C^\bullet)$ ,  $H^\dagger := H^0(C^{\dagger,\bullet})$  とおくと, 次の可換図式を得る:

$$\begin{array}{ccccc} H^0(C^\bullet) & \longrightarrow & H^0(\hat{\omega}^{\dagger,\bullet}(c)) & \longleftarrow & H^\dagger \xrightarrow{\cong} H \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ H^0(C^\bullet) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p & \xrightarrow{\cong} & H_{\mathbb{Q}_p}^\dagger & & \end{array}$$

したがって, コホモロジー  $H_{\mathbb{Q}_p}$  の  $\mathbb{Z}_p$  モデル  $H$  を構成することができた.

## 5 The proof of main Theorem

この章では, ログ・スキーム  $Z_T$  を構成し, compatible system of liftings of Frobenius である system  $(\phi_{T,n}: Z_{T,n} \rightarrow Z_{T,n})_n$  を構成する. この system から得られる log. PD-envelope  $Z_T$  上の複体  $\tilde{C}_k^\bullet$  は  $C_k^\bullet$  と quasi-isomorphism であり, Frobenius が作用する. この複体  $\tilde{C}_k^\bullet$  に作用する Frobenius を用いて, 主定理の証明を行う.

任意の空でない部分集合  $T \subset \{0, \infty\}$  に対して,  $U_T := X \setminus T$  とおく.  $T = \{0\}, \{\infty\}$  の場合は  $Z_T = U_T$  とおく.  $T = \{0, \infty\}$  の場合は fiber product  $U_{\{0\}} \times_W U_{\{\infty\}}$  を blow-up し strict transforms を除くことによって得られる fine ログ・スキームを  $Z_T$  とする. ログ・スキーム  $Z_T$  は次のように明示的に構成することができる.

まず  $t$  を  $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}_p}^1$  の標準座標とし,  $s = \frac{1}{t}$  とおく. このとき,  $U_T = X \setminus T$  は  $\text{Spec } \mathbb{Z}_p[t, s]$  に  $\{t = 1\}$  の対数構造を入れたログ・スキームである. ログ・スキーム  $U_{\{0\}} \times_W U_{\{\infty\}}$  の底スキームは  $\text{Spec } \mathbb{Z}_p[s_1, t_2]$  である. ここで,  $s_1 = (1-s) \otimes 1$ ,  $t_2 = 1 \otimes (1-t)$  である. これより, fine ログ・スキーム  $Z_T$  の底スキームは  $\text{Spec } \mathbb{Z}_p[s_1, (\frac{s_1}{t_2})^{\pm 1}]$  である.  $\frac{1-t}{1-s} = -\frac{1}{t}$  は  $U_T$  上可逆であるので, 準同型  $U_T^{\sharp}: \mathbb{Z}_p[s_1, (\frac{s_1}{t_2})^{\pm 1}] \rightarrow \mathbb{Z}_p[s, t]$  を  $U_T^{\sharp}(s_1) = 1-s$ ,  $U_T^{\sharp}(t_2) = 1-t$  によって定義する. これより, スキーム間の closed immersion  $\iota_T: U_T \hookrightarrow Z_T$  が得られた. また,  $Z_T$  上の対数構造については次のように考える. 因子  $\{s_1 = 0\} = \{t_2 = 0\} \subset Z_T$  は正規交差因子であり, この因子に付随する対数構造を  $M_Z$  と表すことにする. これより, ログ・スキームの射  $\iota_{T, \log}: (U_T, M_T) \hookrightarrow (Z_T, M_Z)$  は exact closed immersion である.

次に, compatible system of liftings of Frobenius の構成を行う. まず  $T = \{0\}, \{\infty\}$  の場合について考える. 元  $x \in \{0, \infty\}$  に対し,  $U_{\{x\}, n} := U_{\{x\}} \times_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}$  とおく. この底スキームは  $\text{Spec } \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}[u]$  である. ただし,  $x = \infty$  の場合は  $u = t$  とし,  $x = 0$  の場合は  $u = s$  とする.  $\mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}$  上の Frobenius 写像  $\phi_{u, n}$  を

$$\phi_{u, n}(u) = \frac{u^p}{(1-u)^p + u^p}$$

によって定義する.  $(1-u)^p + u^p$  は  $U_{\{x\}, n}$  上可逆であるので,  $U_{\{x\}, n}$  上の対数構造は 2 つ存在し, その対数構造  $\alpha: \mathbb{N}^{\oplus 2} \rightarrow \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}[u]$  と  $\beta: \mathbb{N}^{\oplus 3} \rightarrow \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}[u]$  は

$$\alpha(m_1, m_2) = (1-u)^{m_1} u^{m_2}, \quad \beta(m_1, m_2, m_3) = \frac{(1-u)^{m_1} u^{m_2}}{((1-u)^p + u^p)^{m_3}}$$

によって定義する. これより, 次の可換図式が得られる:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N}^{\oplus 2} & \longrightarrow & \mathbb{N}^{\oplus 3} \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\ \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}[u] & \longrightarrow & \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}[u]. \end{array}$$

ここで, 図式の上の写像  $\mathbb{N}^{\oplus 2} \rightarrow \mathbb{N}^{\oplus 3}$  は  $(m_1, m_2) \mapsto (pm_1, pm_2, m_1 + m_2)$  とする. したがって, Frobenius 写像  $\phi_{u, n}: U_{\{x\}, n} \rightarrow U_{\{x\}, n}$  はログ・スキームの射であることがわかる..

次に,  $T = \{0, \infty\}$  の場合について考える.  $Z_{T, n} := Z_T \times_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}$  とおくと, この底スキームは  $\text{Spec } \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}[s_1, (\frac{s_1}{t_2})^{\pm 1}]$  である.  $\text{Spec } \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}[s_1, (\frac{s_1}{t_2})^{\pm 1}]$  上の Frobenius 写像  $\phi_{T, n}$  は

$$\phi_{T, n}(s_1) = \frac{s_1^p}{(1-s_1)^p + s_1^p}, \quad \phi_{T, n}(t_2) = \frac{t_2^p}{(1-t_2)^p + t_2^p}$$

によって定義する.  $\phi_{T, n}(s_1) = \frac{s_1^p}{(1-s_1)^p + s_1^p}$  と  $\phi_{T, n}(t_2) = \frac{t_2^p}{(1-t_2)^p + t_2^p}$  は  $Z_{T, n}$  上可逆であるので, Frobenius 写像  $\phi_{T, n}$  はログ・スキームの射である. 任意の  $T \in P$  に対して, system  $(\phi_{T, n}: Z_{T, n} \rightarrow Z_{T, n})_n$  は compatible system of liftings of Frobenius である.

各  $f \in I_k$  に対し,  $W$  上の  $Z_{f(\ell)}$  ( $\ell = 1, \dots, k$ ) の fiber product を  $Z(f)$  と書き表すことにする. このとき, 射  $\iota_{T, \log}$  によって exact closed immersion  $\iota_f: U(f) \hookrightarrow Z(f)$  が誘導される. 射  $\iota_f$  を modulo  $p^n$  した射と  $W \bmod p^n$  の standard PD-structure に関する log. PD-envelope を  $n$  に関して帰納極限をとったログ・スキームを  $D(f)$  と書くことにする. また  $Z(f)$  上の de Rham 複体を  $D(f)$  へ pull-back した複体を  $\tilde{\omega}^\bullet(f)$  とする. 射  $\iota_f$  は quasi-isomorphism  $\tilde{\omega}^\bullet(f) \rightarrow \omega^\bullet(f)$  を誘導する. 複体  $\omega^\bullet(f)$  の代わりに  $\tilde{\omega}^\bullet(f)$  を用いることにより, 異なる複体  $\tilde{C}_k^\bullet$  と quasi-isomorphism  $\tilde{C}_k^\bullet \rightarrow C_k^\bullet$  が得られる. さらに整数  $k \geq 1$  と各  $\ell = 0, \dots, k$  に対して, 複体の射  $\tilde{s}_\ell^k: \tilde{C}_k^\bullet \rightarrow \tilde{C}_{k-1}^\bullet$  を同様の方法で定義でき, 次の図式

$$\begin{array}{ccc} \tilde{C}_k^\bullet & \xrightarrow{\tilde{s}_k^k} & \tilde{C}_{k-1}^\bullet \\ \downarrow & & \downarrow \\ C_k^\bullet & \xrightarrow{s_k^k} & C_{k-1}^\bullet \end{array}$$

は可換である.

複体  $\tilde{\omega}^\bullet(f)$  を張り合わせるにより, 複体  $\tilde{C}_k^\bullet, \tilde{C}^\bullet$  が定義され, 2つの quasi-isomorphisms  $\tilde{C}_k^\bullet \rightarrow C_k^\bullet$  と  $\tilde{C}^\bullet \rightarrow C^\bullet$  を得る. したがって,  $\tilde{H} := H^0(\tilde{C})$  とおくと,

$$\tilde{H} \simeq H \simeq H^\dagger$$

が得られる.

各  $f \in I_k$  に対して,  $Z(f) \bmod p^n$  上の Frobenius 持ち上げの compatible system  $\phi_{f(1), n} \times \dots \times \phi_{f(k), n}$  は  $\tilde{\omega}^\bullet(f)$  の自己準同型  $\phi_f$  を誘導する. これらを張り合わせるにより,  $\tilde{C}_k^\bullet$  上の自己準同型  $\phi$  が得られる. さらに, 写像  $\tilde{s}_k^k: \tilde{C}_k^\bullet \rightarrow \tilde{C}_{k-1}^\bullet$  は  $\phi$  と可換である. これより,  $\tilde{C}^\bullet$  上の自己準同型  $\phi$  が得られる.

次に,  $p$ -進多重ゼータ値とコホモロジー  $H$  の関係について述べる. まず  $x, y$  に関する語  $w = w_1 \cdots w_k$  として,

$$\omega_i = \begin{cases} \frac{dt_i}{t_i} & (\text{if } w_i = x) \\ \frac{dt_i}{1-t_i} & (\text{if } w_i = y). \end{cases}$$

とおく. このとき,  $\omega_1 \otimes \dots \otimes \omega_k \in C_k'^\bullet$  であるので, これは  $C'^\bullet$  の 0-cocycle である. このことから,  $H \simeq H^0(C'^\bullet)$  上  $\omega_1 \otimes \dots \otimes \omega_k$  のコホモロジークラスを  $[w]$  によって表すことにする.

**Proposition 5.1.** 集合  $\{[w] \mid w \text{ は } x, y \text{ に関する語}\}$  は  $H$  の  $\mathbb{Z}_p$ -basis である.

*Proof.* 集合  $\{[w] \mid w \text{ は } x, y \text{ に関する長さ } k \text{ の語}\}$  は  $H^k(C_k^\bullet) \simeq H^k(C_k'^\bullet)$  の  $\mathbb{Z}_p$ -basis である. また spectral sequence

$$E_1^{p, q} = H^q(C_p'^\bullet) \Rightarrow H^{p+q}(C'^\bullet).$$

が存在する. よって, 次を示せば十分である:

$$E_1^{-k, k} = E_2^{-k, k} = E_3^{-k, k} = \dots$$

これより, 写像  $d_1: E_1^{-k-1, k} \rightarrow E_1^{-k, k}$  がゼロ写像であることと  $E_2^{-k-1, k} = \{0\}$  であることを示せば十分である. これはすぐにわかる.  $\square$

**Proposition 5.2.**  $n$  を非負整数とし,  $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n)$  を重さ  $k$  の index とする. また,  $\mathbf{k}$  と対応する語を  $w = x^{k_1-1}y \dots x^{k_n-1}y$  とする.

$$\varphi(\mathrm{Li}_{\mathbf{k}}) = p^k \mathrm{Li}_{\mathbf{k}} + \sum_{\mathbf{k}' \text{ s.t. } |\mathbf{k}'| < k} h_{\mathbf{k}'} \mathrm{Li}_{\mathbf{k}'},$$

とおく. ここで  $k = |\mathbf{k}|$  であり, ある元  $h_{\mathbf{k}'} \in R_{\mathbb{Q}_p}^\dagger$  である. このとき,  $H \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$  上,

$$\phi([w]) = p^k [w] + \sum_{\mathbf{k}' \text{ s.t. } |\mathbf{k}'| < k} h_{\mathbf{k}'}(1)[w'],$$

が成り立つ. ここで,  $w'$  は  $\mathbf{k}'$  と対応する語である.

*Proof.* 同型  $H \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p \simeq H_{\mathbb{Q}_p}$  と合成

$$H^0(\tilde{C}^\bullet) \simeq H \simeq H^\dagger \rightarrow H^0(\tilde{\omega}^{\dagger, \bullet}(\infty)) \rightarrow H_{\mathbb{Q}_p}$$

が Frobenius 写像と可換であることから, Proposition 3.1 より従う.  $\square$

最後に Frobenius 写像と Hodge フィルトレーションに関して考える. ここで, Theorem 1.1 の証明を行う.  $f \in I_k$  とし,  $\mathcal{J}_f \subset \mathcal{O}_{Z(f)}$  を exact closed immersion  $\iota_f : U(f) \hookrightarrow Z(f)$  に対応するイデアル層とする.  $\tilde{\omega}^\bullet(f)$  上のフィルトレーションを次のように定義する:

$$F^n \tilde{\omega}^\bullet(f) = [\mathcal{J}_f^{[n]} \rightarrow \mathcal{J}_f^{[n-1]} \tilde{\omega}^1(f) \rightarrow \mathcal{J}_f^{[n-2]} \tilde{\omega}^2(f) \rightarrow \dots \rightarrow \tilde{\omega}^n(f) \rightarrow \tilde{\omega}^{n+1}(f) \rightarrow \dots],$$

ここで,  $\mathcal{J}_f^{[n]}$  は  $\mathcal{J}_f$  の  $n$ -th PD-ideal である. このフィルトレーションは  $\tilde{C}_k^{(j), \bullet}$  上のフィルトレーション  $F^n \tilde{C}_k^{(j), \bullet}$  を誘導する. さらに次のフィルトレーション

$$F^n \tilde{C}_k^\bullet = \mathrm{tot}[F^n \tilde{C}_k^{(0), \bullet} \rightarrow F^n \tilde{C}_k^{(1), \bullet} \rightarrow \dots],$$

$$F^n \tilde{C}^\bullet = \mathrm{tot}[F^n \tilde{C}_k^\bullet \rightarrow F^n \tilde{C}_{k-1}^\bullet \rightarrow \dots]$$

を誘導する. これより,  $F^n \tilde{H} \subset \tilde{H}$  である.

任意の長さ  $k$  の語  $w$  に対して,  $[w] \in F^k H$  が成り立つ. また構成から,

$$\phi(F^k \tilde{\omega}^\bullet(f)) \subset (p\mathbb{Z}_p)^{[k]} \cdot \tilde{\omega}^\bullet(f),$$

が成り立つ. したがって,

$$\phi(F^k H) \subset (p\mathbb{Z}_p)^{[k]} H$$

が成り立つ.

一方, スペクトラル系列

$$E_1^{p,q} = H^q(C_{-p}^\bullet) \Rightarrow H^{p+q}(C^\bullet)$$

から  $H$  上のフィルトレーション  $W_{2n}H = \mathbb{Z}_p\text{-span}\{[w] \mid w \text{ は長さ } n \text{ の語}\}$  が作られる。また Frobenius 写像  $\phi$  は  $E_1^{-k,k}$  上  $p^k$  倍で作用するので,  $\phi$  は  $\text{Gr}_{2n}^W H$  上  $p^k$  倍で作用する。もし  $w = \emptyset$  なら,  $\phi([\emptyset]) = [\emptyset]$  とする。したがって, 唯一つの  $\mathbb{Z}_p$ -線形写像  $z: H \rightarrow \mathbb{Q}_p$  で,  $z([\emptyset]) = 1$  と  $z \circ \phi = z$  が成り立つ。

Proposition 5.2 と  $p$ -進多重ゼータ値  $\zeta_p(\mathbf{k})$  の定義から,

$$\zeta_p(\mathbf{k}) = z([w])$$

が成り立つ。したがって, 写像  $z$  の性質とフィルトレーション  $F^k$  と Frobenius 作用から,

$$\zeta_p(\mathbf{k}) = z([w]) \in (p\mathbb{Z}_p)^{[k]}$$

が従う。したがって, Theorem 1.1 が証明された。

## References

- [AHY] Akagi, K. and Hirose, M. and Yasuda, S.: *Integrality of  $p$ -adic multiple zeta values and a bound for the space of finite multiple zeta values*, preprint.
- [Be] Besser, A.: *Syntomic regulators and  $p$ -adic integration II:  $K2$  of curves*, Isr. J. Math. **120**, (2000) pp.335–360.
- [BO] Berthelot, P. and Ogus, A.: *Notes on crystalline cohomology*, Princeton University Press, Princeton, 1978.
- [Cha] Chatzistamatiou, A.: *On integrality of  $p$ -adic iterated integrals*, preprint (2015) arXiv:1501.05760v2.
- [CdS] Coleman, R. and de Shalit, E.:  *$p$ -adic regulators on curves and special values of  $p$ -adic  $L$ -functions*, Invent. Math. **93**(2), (1988) pp.239–266.
- [Col] Coleman, R.: *Dilogarithms, regulators and  $p$ -adic  $L$ -functions*, Invent. Math. **69**, (1982) pp.171–208.
- [F] Furusho, H.:  *$p$ -adic multiple zeta values I*, Invent. Math. **155**, (2004) pp.253–286.
- [Ka] Kato, K.: *Logarithmic structure of Fontaine Illusie*, Algebraic Analysis, Geometry and Number Theory, John Hopkins University Press, (1989) pp.191–224.
- [Ma1] Mazur, B.: *Frobenius and the Hodge Filtration*, Bull. Amer. Math. Soc. **78**(5), (1972) pp.653–667.
- [Ma2] Mazur, B.: *Frobenius and the Hodge Filtration (estimates)*, Annals of Mathematics Second Series. **98**(1), (1973) pp.58–95