数理解析研究所講究録
第2015巻 2017年 71-82

ラフパス理論への招待*

九州大学数理学研究院　　稲浜　譲
Yuzuru INAHAMA
Graduate School of Mathematics, Kyushu University
Email: inahama@math.kyushu-u.ac.jp

1　ラフパス理論とは何か

本稿では確率論の非専門家向けにラフパス理論を紹介する．この理論はK. T. Chen というトポロジーの専門家が作った反復積分の理論を「解析化」して，ブラウン運動の見本路のような非常に性質の悪い連続なパスに沿った線積分を確率論を使わずに定式化しようという試みで，T. Lyons [7] によって発明された．現在は [9, 8, 3, 2] などが出版されているので，興味があれば参考にされたい．

この章では細かい話をいっさい抜きにして, ラフパス理論の大きな流れを説明したいと思う. 厳密でない部分も多々あるが, ご容赦いただきたい.

まずパス (道, 路, 経路) によって駆動される常微分方程式 (ODE) から始めよう．これは"controlled ODE" とか"driven ODE" と呼ばれることが多い．$x : [0,1] \to \mathbf{R}^d$ を原点から出発する十分よい性質を持った連続なパスとする．なお本稿では連続でないパスは考えない．また $\sigma : \mathbf{R}^n \to \mathrm{Mat}(n,d)$ と $b : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ を十分よい関数だとする．ここで $\mathrm{Mat}(n,d)$ は $n \times d$ 実行列全体がなす集合である．パス x によって駆動される次の ODE を考えよう．

$$dy_t = \sigma(y_t)dx_t + b(y_t)dt \qquad \text{with given } y_0 \in \mathbf{R}^n.$$

これはいわば省略形であり, 正式な定義は次の積分方程式である．

$$y_t = y_0 + \int_0^t \sigma(y_s)dx_s + \int_0^t b(y_s)ds.$$

仮に $\sigma \equiv 0$ であれば，通常の (学部生が習う意味での)ODE であることに注意せよ．もちろん controlled ODE の主役は σ を含む項である．

この方程式に一意解が存在する時には, y は x の関数 (写像) だと思える．これを確率論業界の慣例に従い伊藤写像と呼ぶことにする．伊藤写像はパス空間からパス空間への写像である．以下では, 簡単のため, $y_0 = 0$ かつ $b \equiv 0$ と仮定する．(x の代わりに $d+1$ 次元の

*研究集会「多重ゼータ値の諸相」(2016 年 7 月 11-14 日) の講究録への寄稿.

パス $t \mapsto (x_t, t)$ を考え, かつ σ と b からサイズ $(n, d+1)$ 型のブロック行列を作ればよいから.) したがって, 以下では

$$dy_t = \sigma(y_t)dx_t \quad \text{with } y_0 = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad y_t = \int_0^t \sigma(y_s)dx_s \tag{1.1}$$

を考えることにする.

煎じ詰めると, この方程式 (1.1) に意味がつくかどうかは, 右辺のパス x に沿った積分 (= 線積分) が定義できるかどうかにかかっている. 定義できる場合は, 係数行列 σ がそんなに悪くはないという仮定の下で, 必要ならば時間区間を縮めて, Picard 型の逐次近似法を使って (時間局所) 解を得るというのが, 最も典型的な解法である.

注意すべき点は, 駆動する x の連続性のみでは線積分は定義できないので, もう少し仮定を追加する必要があることである. 例えば x が区分的に C^1 級であるとすれば, $dx_s = x'_s ds$ なので, 簡単に線積分に意味がつく. もう少し高級な例としては, x が有界変動な場合がある. このときは, Riemann-Stieltjes 積分が可能なので, (1.1) は意味がつき, しかも一意解が存在する. しかもパス空間に有界変動 (1 次変動) ノルムを入れると, 線積分写像や伊藤写像は連続になる. もちろん Lipschitz 連続 (1-Hölder 連続) な場合も同様である. ここまでは微分積分のちょっとした応用であり, そんなに難しくはない.

実はあまり知られていないが, Riemann-Stieltjes 積分を拡張した Young 積分というのもある. 簡単に紹介すると, $\alpha + \beta > 1$ という関係式をみたす $\alpha, \beta \in (0, 1]$ に対して, y が β-Hölder 連続 , x が α-Hölder 連続であれば, (1.1) の右辺の線積分は意味がつくというものである. 積分の近似 Riemann 和が Riemann-Stieltjes 積分の場合とまったく同じなので, 拡張になっていることはすぐにわかる. $\alpha = \beta$ として使うことが多いので, その場合は $1/2 < \alpha = \beta \leq 1$ が Young 積分できるための条件である. この場合も α-Hölder ノルムに関して, 線積分写像や伊藤写像は連続になる. しかし後述の理由で, これも Brown 運動に沿った積分の研究には使えない.

この理論の基本的な問題意識は「Young 積分という枠組みを超えて, どこまで確率論的に有用な方向に線積分の理論を拡張できるのか」というものである. もちろん念頭にあるのは Brown 運動の見本路であるので, 次は Brown 運動を思い出そう.

さて μ を d 次元 Brown 運動の法則, すなわち d 次元 Wiener 測度とする. これは連続関数の空間 $C_0([0, 1], \mathbf{R}^d) = \{x : [0, 1] \to \mathbf{R}^d \mid \text{連続かつ } x_0 = 0\}$ 上の確率測度であり, 確率論の中で最重要な測度である. パス $t \mapsto x_t$ は μ のもとで $\mathbf{R}^d$ 内を走るランダムな運動と思えるが, こう思ったときには $(x_t)_{t \geq 0}$ は Brown 運動であるという. Brown 運動は非常にジグザグした運動であることが知られている. 例えば任意の $\alpha \geq 1/2$ に対して, α-Hölder 連続なパス全体がなす部分空間は μ 零集合である. したがって Brown 運動に沿った積分を Young 積分 (または Riemann-Stieltjes 積分) を使って (決定論的にあるいは実解析的に) 定義することはできない.

通常の確率論においては, Brown 運動に沿った線積分は次のように伊藤流の確率積分として定義される. (簡単のため $d = 1$ とする.)

$$\int_0^t z_s dx_s = \lim_{|\mathcal{P}| \to 0} \sum_{i=1}^{N} z_{t_{i-1}} (x_{t_i} - x_{t_{i-1}}).$$

ここで, $\mathcal{P} = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = t\}$ は $[0,t]$ の分割である. この積分の定義はブラウン運動のマルチンゲール性を全面的に使っている. なお右辺の有限和のなかで, $z_{t_{i-1}}$ と小区間 $[t_{i-1}, t_i]$ の左端からとっていることには, このマルチンゲール性と関係した意味がある. よく知られているとおり, $L^2(\mu)$ と $L^2(\mu \times ds)$ の間の等長性を意味する次の等式が成立する：

$$\mathbb{E}[|\int_0^t z_s dx_s|^2] = \mathbb{E}[\int_0^t |z_s|^2 ds].$$

これは伊藤積分に関する最重要事項であり, 伊藤積分を定義するさいの鍵となる. なお L^2 の元は Wiener 測度に関してほとんど至る所等しいという意味での同値類でしかないので, 確率積分に各 x ごとの意味はつかない. 例えば 2 次元の Brown 運動に対して, Lévy の確率面積と呼ばれる次の量

$$x = (x^1, x^2) \mapsto \int_0^1 (x_s^2 dx_s^1 - x_s^1 dx_s^2) \tag{1.2}$$

は (仮に Wiener 空間の位相を, 測度の構造を壊さない範囲で強めたとしても) 連続にならないことが知られている. 従って, 方程式 (1.1) を伊藤流の確率微分方程式 (SDE) だと解釈した場合の解 y も, x の写像として連続ではない. つまり伊藤写像は連続でないし, 努力してもそうならない.

このように Young 積分などの決定論的 (実解析的) な線積分には, 確率論的な観点からすると根本的な限界があるのに対して, 伊藤積分はご承知のように歴史的な大成功をおさめたわけである. このような状況なので, 伊藤写像が決定論的に (つまり各 x ごとに) 定義できなかったり, 連続にならないことは, 「残念ではあるが, あきらめて受け入れざるをえない事実」というのが, ほぼ全ての確率論研究者の感覚だったと思われる. これがラフパス理論が登場した時点での確率論業界における常識であった.

このような状況を打破したのが, T. Lyons の創始によるラフパス理論である ([7] に始まる). この理論により, SDE の解をパスごとに研究するという道がひらかれた. 実はこの理論では普通の意味でのパスではなく, パスとそれが作る反復積分の組を考える. こういった組を「ラフパス」という. K. T. Chen による反復パス積分の理論がヒントになったと思われる. しかし解析である以上, かなり性質の悪いパスも扱わざるをえず, どういった Banach ノルムでまともなパスの集合を完備化すればいいのかは難問である. 「ラフパスの空間に適切な位相を入れると線積分や伊藤写像が測度と関係なく定義できるうえに連続になる. すなわち SDE の解が連続写像の像として手に入る」というのがこの理論の骨子である. 伊藤写像の連続性は Lyons の連続性定理と呼ばれており, ラフパス理論における最重要定理である.

ラフパス理論においては, パスとは第 1 , 第 2 レベルの 2 つの部分の組になっている. 第 1 レベルのパスとは単に通常のパスの差分 (あえていえば 1 重積分) であり, 第 2 レベルのパスとは 2 重積分のことである. パスの出発点を原点と決めれば, パスを考えることと, その差分を考えることは同値なので, 第 1 レベルは通常の意味でのパスである. だからパスが作る反復積分まで込みで考えることに新しさがあるわけだ. このとき, $\alpha \in (1/3, 1/2]$ を一つ決めて, 第 1 レベルのパスは α-Hölder 連続 , 第 2 レベルのパスは 2α-Hölder 連続として, これに即した位相をラフパス空間に入れる.

このとき重要なことは，逆方向を向いた次の２つの要請が同時に満たされること．(a) ラフパスに対して線積分が定義できる．つまりこの程度にはパスの性質はよく、従ってラフパスの空間は小さい．ODE は定義から積分方程式であるので、ラフパスの意味での ODE が定義でき，しかも伊藤写像は連続である．(b) Wiener 測度 (の持ち上げ) はラフパスの空間にのる．つまりこの程度にはラフパスの空間は大きい．

ちなみにラフパスの意味での伊藤写像に Brown 運動の持ち上げを代入すると Stratonovich 型 SDE の解が得られる (これは伊藤型 SDE に簡単な修正項を加えたものである)．ここでラフパスの意味での ODE の定義が確率測度とは何も関係ないことに注意してほしい．これはつまり SDE の非ランダム化である．別の表現を使えば、測度と微分方程式が分離されたわけである．上で紹介したような通常の伊藤流のマルチンゲール積分論を使うかぎり，こういったことはおこりえない．

最後に「○○でない」式の説明を追加すると，従来の確率論にくらべてラフパス理論は (i) マルチンゲール (積分) 論は使わない，(ii) マルコフ性は出てこない，(iii) フィルトレーション (時間とともに増加する部分 σ 代数の族のこと) とも関係ない，などの特徴がある．まさにこれらの点が，解析の専門家が確率論を勉強する時に確率論的だと感じる部分なのである．その結果ラフパス理論は確率論色が非常に薄く，実解析のような雰囲気が漂う分野になっている．

2 幾何学的ラフパス

この章では [9, 8, 3] に従いラフパスの定義をする．簡単のため Hörder 指数 α が $1/3 < \alpha \leq 1/2$ の場合のみ考える．ちなみに α はラフネスと呼ばれる．Brown 運動への応用を考える場合はこれで十分である．この場合、第１, 第２レベルのパスのみを使う．なお双子の兄弟である $1/\alpha$ 次変動ノルムを使う人も多いが，本稿では主に Hörder ノルムを使って議論する．ちなみに $\alpha \leq 1/3$ の場合にもラフパス理論はあり，その場合は第 $[1/\alpha]$ レベルのパス，すなわち $[1/\alpha]$ 重の反復積分に相当する量まで現れる．

$\triangle := \{(s,t) \mid 0 \leq s \leq t \leq 1\}$ とおく．連続写像 $A : \triangle \to \mathbf{R}^d$ および $\alpha \in (0,1]$ に対して α-Hölder ノルムを

$$\|A\|_\alpha := \sup_{0 \leq s < t \leq 1} \frac{|A_{s,t}|}{|t-s|^\alpha} \tag{2.1}$$

と定義する．$\alpha < \alpha'$ のとき $\|A\|_{\alpha'} < \infty$ ならば $\|A\|_\alpha < \infty$ となることに注意せよ．つまり α が小さくなると条件がゆるくなる．特に 1-Hölder ノルムが有限なものは，ラフパスの世界では「すごく性質がよい」とみなされる．

さて，以下では $\alpha \in (1/3, 1/2]$ とし，$T^{(2)}(\mathbf{R}^d) := \mathbf{R} \oplus \mathbf{R}^d \oplus (\mathbf{R}^d \otimes \mathbf{R}^d)$ を２階の切り捨てテンソル代数としよう．

Definition 2.1 連続写像 $X = (1, X^1, X^2) : \triangle \to T^{(2)}(\mathbf{R}^d)$ が *(*$\mathbf{R}^d$ に値をとるラフネス α の*)* ラフパスであるとは次の２条件をみたすことである．

(i) *(Chen の恒等式)* 任意の $0 \leq s \leq u \leq t \leq 1$ に対して，

$$X^1_{s,t} = X^1_{s,u} + X^1_{u,t}, \qquad X^2_{s,t} = X^2_{s,u} + X^2_{u,t} + X^1_{s,u} \otimes X^1_{u,t}.$$

(ii) *(α-Hölder ノルム有限)* $\|X^1\|_\alpha < \infty$, $\|X^2\|_{2\alpha} < \infty$.

以下では $\mathbf{R}^d$ に値をとるラフネス α のラフパス全体の集合を $\Omega_\alpha(\mathbf{R}^d)$ と書く.

$\Omega_\alpha(\mathbf{R}^d)$ には, 条件 (ii) にでてくる 2 つのノルムから自然に距離 d_α がはいり完備距離空間になる (可分ではない). 第 0 成分の"1"は自明であるので, それを省略して単に $X = (X^1, X^2)$ と書くことが非常に多い. 第 1 レベルのパス X^1 だけならば, 単なる普通の $\mathbf{R}^d$ 内の α-Hölder 連続パス (の差分) だが, 第 2 レベルのパス X^2 を加えて考える点がこの理論の新しさである. ちなみに, $T^{(2)}(\mathbf{R}^d)$ の乗法を $\otimes$ と書くと, 条件 (i) は単に $X_{s,t} = X_{s,u} \otimes X_{u,t}$ と書き直せる. (つまりある群上の通常の意味でのパスに対する「差分」の関係式である.)

さて典型的なラフパスの例をあげる. 理論の構成上も重要な例である. Lipschitz 連続 (1-Hölder 連続) な通常の意味のパスから作られた反復積分を第 2 レベルとして持つもので, 滑らかなラフパスと呼ばれる. 原点から出発する連続かつ有界変動なパス $x : [0,1] \to \mathbf{R}^d$ および $(s,t) \in \triangle$ に対して,

$$
\begin{aligned}
X^1_{s,t} &= \int_s^t dx_{t_1} = x_t - x_s, \\
X^2_{s,t} &= \int_{s \le t_1 \le t_2 \le t} dx_{t_1} \otimes dx_{t_2} = \int_s^t (x_u - x_s) \otimes dx_u,
\end{aligned}
$$

とおくと, 簡単な計算で $X \in \Omega_\alpha(\mathbf{R}^d)$ がわかる. これを (x の上にある) 滑らかなラフパス, あるいは x の標準的な持ち上げと呼ぶ. なお反復積分を作るさいに, Riemann-Stieltjes 積分を使っていることに注意せよ (したがって, 一般の連続パス x をいきなりこのように持ち上げることはできない). またこれから Chen の恒等式はパスが作る反復積分の満たす代数関係式を抽象化したものであることも見てとれる.

Definition 2.2 滑らかなラフパスで近似できるラフパスを幾何学的ラフパスといい、その全体を $G\Omega_\alpha(\mathbf{R}^d)$ と書く. すなわち, $G\Omega_\alpha(\mathbf{R}^d) = \overline{\{\mathbf{R}^d \text{ 内の滑らかなラフパス }\}}^{d_\alpha}$.

作り方から幾何学的ラフパス空間 $G\Omega_\alpha(\mathbf{R}^d)$ は可分完備距離空間になる. ちなみに, $X^1 = Y^1$ だが $X^2 \neq Y^2$ となる $G\Omega_\alpha(\mathbf{R}^d)$ の元の例があることに注意せよ. なお $X \in G\Omega_\alpha(\mathbf{R}^d)$ に対して, $X^2_{s,t}$ の対称部分は $(X^1_{s,t} \otimes X^1_{s,t})/2$ であり, $X^1_{s,t}$ から自動的に決まっている. よって実質的に意味があるのは, X^1 と X^2 の反対称部分 (これも Lévy の面積と呼ばれる) であり, 後者は式 (1.2) とほぼ同じ形をしている. つまりその類の量は始めから集合の定義に組み込まれているわけである. よって Lévy の面積をラフパス空間からの写像だと思ったときに連続になることはある意味で当然である.

この章の最後に $\alpha \le 1/3$ の場合の幾何学的ラフパスに関してごく簡単に述べよう. 結論から言うと, 適当な修正を加えれば, この章の内容全てがラフネス $\alpha \in (0, 1/2]$ の場合にも成立する. 修正すべき点をかいつまんであげると, $[1/\alpha]$ 階の切り捨てテンソル代数 $T^{([1/\alpha])}(\mathbf{R}^d)$ を使う. そして第 i レベルには $i\alpha$ 次変動ノルムを導入する $(1 \le i \le [1/\alpha])$. 通常の有界変動な連続パス x を持ち上げるときも,

$$
X^i_{s,t} = \int_{s \le t_1 \le \cdots \le t_i \le t} dx_{t_1} \otimes \cdots \otimes dx_{t_i} \qquad (1 \le i \le [1/\alpha],\ (s,t) \in \triangle)
$$

と第 $[1/\alpha]$ レベルまでの反復積分をすべて並べて考えることになる. Chen の恒等式は前と同じく $X_{s,t}=X_{s,u}\otimes X_{u,t}$ となり, X はある群上の通常の意味でのパスに対する「差分」だと思えるのだが, この群はぎりぎりまで小さくとるとなんであろうか. 答えは $T^{([1/\alpha])}(\mathbf{R}^d)$ の中に部分群として埋め込まれている $[1/\alpha]$ 階の自由ベキ零群 $G^{[1/\alpha]}$ である. この群上には dilation と相性のよい斉次距離というものが存在しており, 第 i レベルを $i\alpha$ 次変動ノルムで測る理由はこの斉次距離を用いてきれいに説明できる. ほんの少しだけ雑に言えば, 幾何学的ラフパス空間 $G\Omega_\alpha(\mathbf{R}^d)$ は, 自由ベキ零群 $G^{[1/\alpha]}$ 上の斉次距離に関する α-Hölder 連続パスで単位元から出発するもの全体がなす空間だとみなせる. したがって, 幾何学的ラフパスはそんなに妙なものではないことがわかる. この見方は特に α が小さいときには見通しがよい. (この段落の内容は Friz-Victoir[3] にうまくまとめられている.)

実はこの群の要素であることと, 成分がシャッフル関係式を満たすという Hopf 代数的な性質とが同値になることが知られている. 本稿で扱っているようなレベル 2 のラフパス理論においては, この関係式は単に $X^{2;i,j}_{s,t}=X^{1;i}_{s,t}X^{1;j}_{s,t}$ というだけのことであり, 幾何学的ラフパスがこれを満たすことは容易に示せる. ここで上付きの添字 i,j などは座標の番号を表す. 反復積分の数学と Hopf 代数が相性がいいことは以前から知られていることなので, 近いうちに Hopf 代数的な観点からラフパスを研究するようになる可能性がある.

3 ラフパスに沿った線積分

この章では $1/3<\alpha\le 1/2$ の場合にラフパスに沿った線積分を解説する. $X\in G\Omega_\alpha(\mathbf{R}^d)$ として, $f:\mathbf{R}^d\to \mathrm{Mat}(n,d)$ を簡単のため C^3 級とする. f はベクトル値の 1 形式だと思うとよい. ベクトル値の 1 形式は結局普通の (スカラー値の)1 形式を次元の数だけ並べるだけなので, 本章の内容だけなら $n=1$ としてもいいのだが, そうすると次章でラフパスで駆動される ODE を考えるときに困る.

以下では, 積分 $\int f(X)dX$ を $G\Omega_\alpha(\mathbf{R}^n)$ の元として定義したい. (なお f の条件を多少ゆるめることはできる.) 注意してほしいのは, 一般には $\int f(X)dY$ は定義できないことである. ただし (X,Y) が直和空間のラフパスを意味するときは例外. ちなみに本章の内容もごく自然に $0<\alpha\le 1/3$ の場合に拡張できる.

天下りになりすぎないように, 従来の線積分について多少の直感的な観察をしよう. この段落では x は $\mathbf{R}^d$ 値の通常の C^1 級のパスとし, 簡単のため $d=1$ とする. 仮に $0<t-s\ll 1$ のときには, テーラー展開と $\nabla^k f$ の対称性を使うと

$$
\begin{aligned}
\int_s^t f(x_u)dx_u &= f(x_s)(x_t-x_s)+\int_s^t\{f(x_u)-f(x_s)\}dx_u \\
&= f(x_s)(x_t-x_s)+\int_s^t \nabla f(x_s)\langle (x_u-x_s)\otimes dx_u\rangle \\
&\quad +\frac{1}{2}\int_s^t \nabla^2 f(x_s)\langle (x_u-x_s)^{\otimes 2}\otimes dx_u\rangle+\cdots \\
&= f(x_s)X^1_{s,t}+\nabla f(x_s)X^2_{s,t}+\nabla^2 f(x_s)X^3_{s,t}+\cdots
\end{aligned}
$$

などと近似できそうだ. なお $X^3_{s,t}$ は C^1 級パス x から作った 3 重積分である. 今は第 2 レ

ベルのラフパス理論を考えているので，最初の2項 $f(x_s)X^1_{s,t} + \nabla f(x_s)X^2_{s,t}$ から作る修正リーマン和を考えるといいことがあるかもしれない．

以上の観察を踏まえて, 次の量を考える．ラフパス $X = (X^1, X^2)$ に対して $x_s := X^1_{0,s}$ と書くことにする．$(s,t) \in \triangle$ に対して,

$$\hat{Y}^1_{s,t} = f(x_s)X^1_{s,t} + \nabla f(x_s)X^2_{s,t}$$
$$\hat{Y}^2_{s,t} = f(x_s) \otimes f(x_s)X^2_{s,t}$$

とおく．$\hat{Y}^1_{s,t} \in \mathbf{R}^n$, $\hat{Y}^2_{s,t} \in \mathbf{R}^n \otimes \mathbf{R}^n$ である．第1式は仮に右辺第2項がなければ, 普通の Riemann 和 (の和の中身) であることに注意せよ．$\mathcal{P} = \{s = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t\}$ を区間 $[s,t]$ の分割として, $|\mathcal{P}|$ を分割の幅とする．

$$Y^1_{s,t} = \lim_{|\mathcal{P}|\searrow 0} \sum_{i=1}^{n} \hat{Y}^1_{t_{i-1},t_i}, \tag{3.1}$$

$$Y^2_{s,t} = \lim_{|\mathcal{P}|\searrow 0} \sum_{i=1}^{n} \left(\hat{Y}^2_{t_{i-1},t_i} + Y^1_{s,t_{i-1}} \otimes Y^1_{t_{i-1},t_i}\right) \tag{3.2}$$

とすると, 実は両式の右辺は収束して, $Y = (Y^1, Y^2) \in G\Omega_\alpha(\mathbf{R}^n)$ となる．普通は $Y^j_{s,t} = \int_s^t f(X)dX^j$ $(j = 1, 2)$ と書く．幾何学的ラフパス空間 $G\Omega_\alpha(\mathbf{R}^d)$ と $G\Omega_\alpha(\mathbf{R}^n)$ 上の距離 d_α に関して, この写像 $X \mapsto \int f(X)dX$ は任意の有界集合上 Lipschitz 連続である (これを局所 Lipschitz 連続ということにする)．まとめると以下のようになる．

Proposition 3.1 $f : \mathbf{R}^d \to \mathrm{Mat}(n,d)$ を C^3 級とする．このとき, 積分写像

$$G\Omega_\alpha(\mathbf{R}^d) \ni X \mapsto \int f(X)dX \in G\Omega_\alpha(\mathbf{R}^n)$$

は局所 Lipschitz連続であり, Riemann-Stieltjes(あるいは Young)積分写像 $x \mapsto \int_0^{\cdot} f(x_s)dx_s$ *をラフパス位相に関して連続写像になるように拡張したものである．*

ささやかながら, この命題を線積分の拡張という観点から観察してみよう．なお簡単のため $n = 1$ とする．したがって f は通常の1形式である．もし仮に f が完全形式だとすると，原始関数を持つので線積分はパスの両端点を原始関数に代入したものの差で書けてしまう．したがって，任意の連続なパスに対してこの線積分が拡張できることは，ラフパス理論などなくても明らかである．よって問題の本質は完全でない1形式に対する線積分が拡張可能かどうかである．完全でない1形式の最単純例は $x^j dx^i - x^i dx^j$ であろうが，これをパスに沿って線積分したのものがパスで囲まれる領域の符号付き面積 (Lévy の面積) であり，まさにこの情報 (のみ) をラフパスを定義した時に，通常のパスの情報に付け加えたのである．したがって，Lévy の面積 (これが X^2 の反対称部分) がラフパスの連続関数になることはある意味で自明なのであり，注目すべき点は $x^j dx^i - x^i dx^j$ という1形式に対する線積分の情報以外は付け加えてないにもかかわらず，それ以外の任意の1形式に対する線積分がラフパスの連続写像として拡張できたことである．

4 ラフパスによって駆動される常微分方程式

この章では Lyons-Qian[9] に従い，ラフパスの意味での driven ODE(rough differential equation, RDE) を考える．簡単のため $1/3 < \alpha \le 1/2$ とするが，本章の内容も $0 < \alpha \le 1/3$ の場合に拡張できる．RDE の定義が確率測度とまったく無関係であることに注意してほしい．$\sigma : \mathbf{R}^n \to \mathrm{Mat}(n, d)$ を C_b^3 と仮定する．(すなわち $0 \le j \le 3$ に対して $\|\nabla^j \sigma\|$ が有界とする.)

ここからしばらくは，やや厳密性に欠ける議論をする．与えられた $\mathbf{R}^d$ 値のパス X に対して $\mathbf{R}^n$ 値のパス Y を解とする次の方程式を考える．

$$dY_t = \sigma(Y_t)dX_t, \qquad Y_0 = 0. \tag{4.1}$$

初期値は $y_0 = 0$ としている (初期値を $Y_0 = y_0 \in \mathbf{R}^n$ として議論するときは，係数行列を $\sigma(\cdot + y_0)$ に取り替えればよい.) 定石どおり積分方程式として

$$Y_t = \int_0^t \sigma(Y_u)dX_u$$

と意味付けしたい．ところが右辺をラフパスの意味で解釈しようとすると，X, Y が違うラフパスであるため一般には積分が定義できないので，ここでいきなり困る．そこで (4.1) 式にあえて自明の等式を加え，

$$\begin{cases} dX_t &= dX_t, \\ dY_t &= \sigma(Y_t)dX_t \end{cases} \tag{4.2}$$

という連立方程式だとみなす．

直和空間 $\mathbf{R}^d \oplus \mathbf{R}^n$ において，$z = (x, y) \in \mathbf{R}^d \oplus \mathbf{R}^n$ に対して，第 1,2 成分を対応させる射影を π_1, π_2 と書くことにする ($\pi_1 z = x$, $\pi_2 z = y$)．ここで $\hat{\sigma} : \mathbf{R}^d \oplus \mathbf{R}^n \to \mathrm{Mat}(d+n, d+n)$ を以下で定める．

$$\hat{\sigma}(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sigma(\pi_2 z) & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{or} \qquad \hat{\sigma}(z)\langle z' \rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sigma(y) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ \sigma(y)x' \end{pmatrix}.$$

この記号を使うと，(4.2) は次に同値．

$$dZ_t = \hat{\sigma}(Z_t)dZ_t \qquad \text{with } \pi_1 Z_t = X_t.$$

以上の考察をまとめて以下の定義を置く．射影 π_1 は自動的に射影 $G\Omega_\alpha(\mathbf{R}^d \oplus \mathbf{R}^n) \to G\Omega_\alpha(\mathbf{R}^d)$ を導くが，これを再び同じ記号で書く (π_2 に関しても同様に書く)．

Definition 4.1 $X \in G\Omega_\alpha(\mathbf{R}^d)$ が与えられているとする．方程式 *(4.1)* のラフパスの意味での解とは，$Z \in G\Omega_\alpha(\mathbf{R}^d \oplus \mathbf{R}^n)$ で，積分方程式

$$Z = \int \hat{\sigma}(Z)dZ, \qquad \textit{with} \qquad \pi_1 Z = X \tag{4.3}$$

をみたすもののことである．用語をやや濫用して $Y = \pi_2 Z$ のことを解ということも多い．写像 $X \mapsto Y$ を *Lyons-*伊藤写像とよび，$Y = \Phi(X)$ と書く．

つまりLyons流の元祖ラフパス理論の枠組みでは, 解Yというのはいきなり単独であるわけではなく, 実は$Z=(X,Y)$という組のことなのである. ただし最近ではここで書くような「元祖ラフパス理論の枠組みの中でPicardの逐次近似を行う」という以外の方法もいくつか提案されているので, そうした新しい方法では必ずしも$Z=(X,Y)$を考えるわけではない. 本稿ではふれないものの, 特に重要なのがGubinelli流の枠組みであり, そこではラフパスXと解Yとは最初からある意味では分離されている ([2] を参照せよ).

ここでラフパス理論でもっとも重要なLyonsの連続性定理 (*T. Lyons' continuity theorem* または *universal limit theorem*) を述べる.

Theorem 4.2 $\sigma:\mathbf{R}^n\to\mathrm{Mat}(n,d)$を$C_b^3$級とし, *RDE(4.1)を考える (定義4.1を参照せよ). このとき, 任意の*$X\in G\Omega_\alpha(\mathbf{R}^d)$*に対して, 方程式(4.3)の一意解*$Z\in G\Omega_\alpha(\mathbf{R}^d\oplus\mathbf{R}^n)$*が存在する. さらに*$X\mapsto Z$*は局所リプシッツ連続であり, したがってLyons-伊藤写像*$X\mapsto Y=\pi_2 Z=\Phi(X)\in G\Omega_\alpha(\mathbf{R}^n)$*も局所リプシッツ連続である.*

解の一意性により, Xが$\mathbf{R}^d$値の有界変動なパスxの上にある滑らかなラフパスのときには, ラフパスの意味での解YはRiemann-Stieltjes積分をつかった通常の意味での解yの上にある滑らかなラフパスである. よってODE概念の拡張がなされたことがわかる.

定理4.2.の略証 Picardの逐次近似法を使う. $Z(0)^1_{s,t}=(X^1_{s,t},0)$, $Z(0)^2_{s,t}=(X^2_{s,t},0,0,0)$とおく. また, $Z(m-1)$まで構成できたら,

$$Z(m)=\int\hat{\sigma}(Z(m-1))dZ(m-1)$$

として, $Z(m)$を構成する. すると, 十分小さな$T_1\in(0,1]$をとると, 小区間$[0,T_1]$上に制限した場合(4.3)の右辺の積分汎関数はLipschitz係数<1のLipschitz写像になり, $\{Z(m)\}_{m=1,2,\ldots}$はあるZに$G\Omega_\alpha(\mathbf{R}^d\oplus\mathbf{R}^n)$の位相で収束することがわかる. これで, $[0,T_1]$区間での解ができた.

次に$[T_1,T_2]$区間での解をRDE(4.1)を新たな初期値$y_{T_1}=Y^1_{0,T_1}$のもとで解いて作る. 以下, 繰り返して$[T_i,T_{i+1}]$という各小区間で解を作っていく. この操作が有限回でおさまることは, 係数行列の有界性条件からくる. (有界性をうかつにはずすと, この辺が難しくなる.) 最後は各小区間での解をChenの恒等式を逆向きに使ってつなぎあわせ, 全区間での解を作る.

局所Lipschitz連続性については, $X,\hat{X}$という2つの元に対して, $Z(m),\hat{Z}(m)$の距離を評価することで証明できる. ∎

上では簡単のため, Lyons-伊藤写像が駆動するラフパスXに関して局所Lipschitz連続性だと述べたが, 初期値および係数行列を適切に動かした場合の局所Lipschitz連続性も証明できる. つまりラフパスの意味での伊藤写像は非常に柔軟性に富む. とくにX,σを固定して初期値(と時間)の関数だと思った場合, Lyons-伊藤写像は自然にODEの流れ (flow of diffeomorphism) のラフパス版を定義することになる.

5 Brown運動の持ち上げ

これまでは完全に決定論的な議論であり確率測度はいっさい登場しなかったが, 本章ではパス空間上の測度である Wiener 測度を持ち上げて, ラフパス空間上の確率測度を得たい. 今から Brown ラフパス (Brownian rough path, BRP) という $G\Omega_\alpha(\mathbf{R}^d)$ 値の確率変数を構成する. これは通常の確率論における Brown 運動とよく似た役割をはたす.

この章以降では $\alpha = 1/2$ の場合を除外して $1/3 < \alpha < 1/2$ と仮定する. いままで(ラフ)パスを x, X などと表記してきたが, この章以降では固定された元ではなく, 「測度 μ のもとで確率変数である」という感じを強調するために w, W などと表記する.

$w \in C_0([0,1], \mathbf{R}^d)$ に対して, w の 2 進折れ線近似 $w(m) \in C_0([0,1], \mathbf{R}^d)$ を分点 $\{k/2^m \mid 0 \le k \le 2^m\}$ に対応した折れ線近似とする $(m = 1, 2, \ldots)$. この $w(m)$ は明らかに Lipschitz 連続なので, それを持ち上げた滑らかなラフパス $W(m)$ が存在する. このとき,

$$\mathcal{S} := \{w \in C_0([0,1], \mathbf{R}^d) \mid \{W(m)\}_{m=1,2,\ldots} \text{ is Cauchy in } G\Omega_\alpha(\mathbf{R}^d)\}$$

はどれぐらいの大きさの集合になるだろうか. $\mathcal{S}$ の元に対しては, $G\Omega_\alpha(\mathbf{R}^d)$ の元への持ち上げが, $\lim_{m\to\infty} W(m)$ で自然に定義できる. ちなみに Lipschitz 連続なパスは $\mathcal{S}$ に属しており, 2 種類の持ち上げは一致している.

実は $\mathcal{S}$ は Wiener 測度 μ に関して重さ 1 である. したがって $W := \lim_{m\to\infty} W(m)$ とおいて, BRP を定義できる. これは $(C_0([0,1], \mathbf{R}^d), \mu)$ 上で定義された $G\Omega_\alpha(\mathbf{R}^d)$ 値の確率変数であり, その像測度は $G\Omega_\alpha(\mathbf{R}^d)$ 上の確率測度になることに注意せよ. (この持ち上げ写像は連続にはならず, 可測でしかない.) これで $G\Omega_\alpha(\mathbf{R}^d)$ 上に「Wiener 測度もどき」のような測度が BRP の法則として作れた.

ラフパスの意味での伊藤写像に W を代入すると, Stratonovich 型の SDE の解が得られることを示す. RDE(4.1) を考えて, $\Phi : G\Omega_\alpha(\mathbf{R}^d) \to G\Omega_\alpha(\mathbf{R}^n)$ で対応する Lyons-伊藤写像を表す. すなわち $Y = \Phi(W)$. (4.1) 式に対応した SDE は次のものである.

$$dy_t = \sigma(y_t) \circ dw_t = \sigma(y_t)dw_t + \frac{1}{2}\mathrm{Trace}[\nabla\sigma(y_t)\langle\sigma(y_t)\bullet, \bullet\rangle]dt, \qquad y_0 = 0.$$

Stratonovich 型の SDE は伊藤型にくらべると, 最右辺の第 2 項にある $\mathrm{Trace}[\cdots]$ の補正項がつく. Riemann 和を使った方式で書くと,

$$\int_0^t \sigma(y_s) \circ dw_s = \lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{i=1}^{N} \frac{\sigma(y_{t_i}) + \sigma(y_{t_{i-1}})}{2}(w_{t_i} - w_{t_{i-1}})$$

となる. 伊藤積分を定義する Riemann 和と異なることに注意せよ.

Theorem 5.1 上記のように, W を標準的な *Brown* 運動 (w_t) を持ち上げて作った *BRP* とする. このとき *a.a.w* (μ) に対して, $y_t = \Phi(W)^1_{0,t}$ が任意の $t \in [0,1]$ で成立する.

この定理 5.1 によって, SDE の解が連続写像の像として得られたことになる. 通常の SDE 理論の範疇ではありえなかったことである. 証明は簡単で, まず任意の m に対して, $\Phi(W(m))^1$ について, $w(m)$ によって駆動される通常の意味の ODE と RDE が一致するという等式を作る. その後, 左辺を昔から確率論でよく知られている Wong-Zakai の近似定理, 右辺を Lyons の連続性定理を使って極限をとればよい.

6 今後の展望

通常の伊藤流SDEに対応するものとしては，ラフパス理論はほぼ完成したと言ってよく，次の焦点は確率論的な応用がどれぐらい見つかるかであろう．当分はこの種の研究が続くことになるだろうが，本稿は確率論には深入りしない方針なので，この点については触れない．ここではむしろラフパス理論の外側の世界への影響を問題にする．

伊藤流SDEはいわば常微分方程式にノイズ項をつけたものであるが，熱方程式などの発展方程式を無限次元空間に値をとる常微分方程式だとみなし，これに無限次元的なノイズ項をつけたものを確率偏微分方程式(SPDE)という．ラフパス理論の考え方をSPDEに応用するという研究方針は最近2つの大きな成果をあげた([5, 4])．特に前者は2014年にフィールズ賞を受賞したのが記憶に新しい．これらの理論はKPZ方程式や3次元dynamic Φ^4模型などの物理学的には非常に重要でありながら，数学的には意味のついていなかった方程式に意味を与えた上で，解いたのである．今この分野はすごい勢いで発展中である．

筆者が個人的に疑問に思っているのは，ラフパス理論がその源であるK. T. Chenの数学と関係することがこの先あるのかどうかである．例えば[1, 6]などを読むと，反復積分の理論はトポロジーや数論やHopf代数など多くの分野で使われていることがわかるが，これらの分野がラフパス理論と関係がつくのだろうか．仮にそうならば，とても面白い問題群が眠っている可能性があるので，確率論を専門としない人にもぜひラフパス理論に興味を持ってほしいと願っている．本稿がその意味で多少なりとも役立つならば，望外の幸いである．

参考文献

[1] Chen, K.-T. Collected papers of K.-T. Chen. Edited and with a preface by Philippe Tondeur, and an essay on Chen's life and work by Richard Hain and Tondeur. Birkhäuser, 2001.

[2] Friz, P.; Hairer, M.; A course on rough paths. With an introduction to regularity structures. Springer, 2014.

[3] Friz, P.; Victoir, N.; Multidimensional stochastic processes as rough paths. Cambridge University Press, Cambridge, 2010.

[4] Gubinelli, M.; Imkeller, P.; Perkowski, N.; Paracontrolled distributions and singular PDEs. Forum Math. Pi 3 (2015), e6, 75 pp.

[5] Hairer, M.; A theory of regularity structures. Invent. Math. 198 (2014), no. 2, 269–504.

[6] 河野俊丈，反復積分の幾何学，丸善出版，2012.

[7] Lyons, T.; Differential equations driven by rough signals. Rev. Mat. Iberoamericana 14 (1998), no. 2, 215–310.

[8] Lyons, T.; Caruana, M.; Lévy, T.; Differential equations driven by rough paths. Lecture Notes in Math., 1908. Springer, Berlin, 2007.

[9] Lyons, T.; Qian, Z.; System control and rough paths. Oxford University Press, Oxford, 2002.