

離散トーラスにおける素測地線定理と超幾何関数

愛媛大学大学院理工学研究科 山崎 義徳*

Yoshinori YAMASAKI

Graduate School of Science and Engineering
Ehime University

1 はじめに

グラフに対する素測地線定理とは、多様体に対する素測地線定理の離散版である。これらはいずれも素数定理の幾何学的類似であり、与えられた長さを持つ（あるいは与えられた長さ以下の）素測地線の個数に関する漸近公式を与える。

本稿の主目的は、「離散トーラス」と呼ばれるある特別なグラフに対する素測地線定理を Chinta-Jorgenson-Karlssoon [CJK] によって得られた熱核の理論を用いて導くことである。次節で述べるように、素測地線定理は有限正則グラフ一般に対して得られているが、今回得られた公式は、既存の公式と比較してより明示的であり、かつより計算可能であるという点において有用であると考えられる。本稿の内容は基本的には [Y] と同じものだが、記号の複雑さ・煩雑さを避けるため、本稿の離散トーラスは [Y] における離散トーラスの特別な場合（離散度を表すパラメータがすべて等しい場合）であることに注意する。

2 グラフに対する素測地線定理

まずはグラフに対する素測地線定理を思い出そう。詳細については、例えば [T] を参照されたい。なお、本稿では特に断らない限り、グラフは常に有限、無向、単純、連結、正則であると仮定する。

$X = (V, E)$ を $(q+1)$ -正則グラフとする。ここで $V = V(X)$, $E = E(X)$ は X のそれぞれ頂点集合、辺集合である。隣接する頂点の列を道といい、道を構成する辺の本数をその道の長さという。特に、始点と終点が等しい道を閉路という。 X 上の閉路 $C = v_1 v_2 \cdots v_l v_1$ ($v_i \in V$) に対して、 C^2 が backtracking を持たない、すなわち $v_{i+1} = v_{i-1}$ となる i が存在しないとき（ただし添え字は mod l で考える） C を簡約閉路という。また、 $C = D^f$ となる X 上の閉路 D および整数 $f \geq 2$ が存在しないとき、 C を原始的閉路という。2つの閉路 C, C' に対して、片方の始点をずらすことでもう一方に一致するとき $C \sim C'$ と書く。 \sim は同値関係である。原始的な簡約閉路のこの同値関係に関する同値類を素測地線（＝グラフ理論における素数の類似物）という。我々が知りたいのは以下の量である。

$$N_X(n) = \#\{C \mid C \text{ は } X \text{ 上の長さ } n \text{ の簡約閉路}\},$$
$$\pi_X(n) = \#\{[P] \mid [P] \text{ は } X \text{ 上の長さ } n \text{ の素測地線}\}.$$

簡単な考察により $N_X(n) = \sum_{b|n} b \pi_X(b)$ であることが分かるので、Mobius の反転公式から $\pi_X(n) = \frac{1}{n} \sum_{b|n} \mu\left(\frac{n}{b}\right) N_X(b)$ となる（ μ は Mobius 関数である）。よって、本質的には $N_X(n)$ か $\pi_X(n)$ のいずれか一方を考察すれば十分である。本稿では主として $N_X(n)$ について考察する。

*Partially supported by Grant-in-Aid for Scientific Research (C) No. 15K04785.

X の各辺に対して、適当に向きをつけた有向辺およびその逆向きをつけた有向辺を考え、それら全体のなす集合を \tilde{E} とする。 $|\tilde{E}| = 2|E|$ である。 X の辺隣接行列 W とは、

$$W = [w_{e,e'}]_{e,e' \in \tilde{E}}, \quad w_{e,e'} = \begin{cases} 1 & e' \neq e^{-1} \text{ かつ } e \text{ の終点と } e' \text{ の始点一致する,} \\ 0 & \text{その他,} \end{cases}$$

で定義される $2|E|$ 次の正方行列である。一般に、行列 (または線形作用素) T に対して、 T の固有値全体のなす多重集合を $\text{Spec}(T)$ と表す。このとき $N_X(n) = \text{Tr}(W^n)$ なので、

$$(2.1) \quad N_X(n) = \sum_{\lambda \in \text{Spec}(W)} \lambda^n$$

となる ($\text{Spec}(W)$ は上記の辺の向きの付け方によらないことに注意する)。よって、[KS] で得られた W の絶対値が最大の固有値の分布に関する結果と、上記の $N_X(n)$ と $\pi_X(n)$ の関係式を合わせればることで、次に述べる素測地線定理が導かれる。

$$(2.2) \quad \pi_X(n) \sim \delta_X \frac{q^n}{n} \quad (\delta_X \mid n, n \rightarrow \infty).$$

ただし δ_X は X 上の素測地線の長さ全ての最大公約数である。なお、 $\delta_X \nmid n$ のときは $\pi_X(n) = 0$ である。

ここで、 $\pi_X(n)$ の正確な値を計算することを考えよう。有限グラフを扱っている以上、全ての量は厳密に書けて然るべきである。もちろん、素測地線定理 (2.2) は (素数定理同様) 漸近公式なので、大凡の値ならまだしも正確な値を求めるには不向きである。一方で (2.1) を用いれば、やはり $N_X(n)$ と $\pi_X(n)$ の関係式から $\pi_X(n)$ の正確な値を計算することができるが、この計算には固有値計算が伴うため、(計算機を用いて) 数値解析的に計算する以外の方法で $N_X(n)$ を計算することは一般には難しい。

本研究の主結果は、一言で述べると、「離散トーラスという特別なグラフに対して、 $N_X(n)$ の行列の固有値を使わない明示的な公式を導いた」と言うことができる。この公式を用いれば、上記の問題点は解消され、 $\pi_X(n)$ の正確な値を簡単に計算することが可能となる。離散トーラスは非常に単純な構造を持つグラフなので、今回の結果が、今後より複雑なグラフに対して同様の問題を考える場合の基礎となることを期待する。

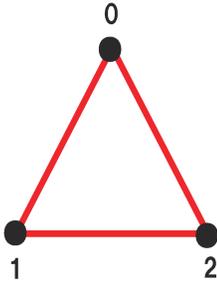
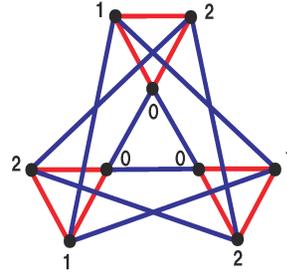
3 主結果

まずは離散トーラスの定義を述べよう。整数 $d \geq 1, m \geq 3$ に対して、 d 次元離散トーラス $\text{DT}_m^{(d)}$ とは次で定義されるグラフのことである。

$$\text{DT}_m^{(d)} = \text{Cay} \left((\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^d, \{ \pm(1, 0, \dots, 0), \dots, \pm(0, \dots, 0, 1) \} \right).$$

ここで、一般に (有限) 群 G と G の単位元を含まない対称な生成部分集合 $S \subset G$ に対して、 $\text{Cay}(G, S)$ は G の S に付随する Cayley グラフ、すなわち、 $V = G, E = \{ \{x, y\} \in G^2 \mid x^{-1}y \in S \}$ で定義される (有限) 無向単純連結な $|S|$ -正則グラフである。 m は離散度を表すパラメータであり、我々は素朴な意味で離散トーラスを実トーラスの離散版とみなす。例えば、 $\text{DT}_3^{(1)}$ (1次元の場合)、 $\text{DT}_3^{(2)}$ (2次元の場合) は下図の通りである。ここで、Cayley グラフの定義から $\text{DT}_m^{(d)}$ は $2d$ -正則グラフであり、 $|V(\text{DT}_m^{(d)})| = m^d, |E(\text{DT}_m^{(d)})| = dm^d$ であることに注意する。

離散トーラスはグラフ上のランダムウォークとの関連から古典的に研究されているが、ここではゼータ関数の視点から離散トーラスを研究する動機となり得る次の定理を紹介しよう。以下、実数 $a > 0$ に対して、 $\text{RT}_a^{(d)} = (\mathbb{R}/a\mathbb{Z})^d$ で半径が a の d 次元実トーラスを表すことにする。

図 1: $DT_3^{(1)}$.図 2: $DT_3^{(2)}$.

定理 3.1 ([CJK]). $m = m(u)$ を u に関する (正整数値) 関数とし, ある $a > 0$ が存在して $m(u) \sim au$ ($u \rightarrow \infty$) が成り立つとする. このとき, ある実数 C が存在して, 次が成り立つ.

$$\log \det^* \Delta(DT_m^{(d)}) = C \cdot m(u)^d + \log u^2 + \log \det^* \Delta(RT_a^{(d)}) + o(1) \quad (u \rightarrow \infty).$$

両辺に出てきている Δ は, いずれもラプラシアンである. 以下で詳しく説明しよう.

- 左辺の $\Delta(X)$ はグラフ X に対するラプラシアンである. 一般に $(q+1)$ -正則グラフ $X = (V, E)$ に対して, X のラプラシアン $\Delta(X)$ は $\Delta(X) = (q+1)I_n - A$ (ただし $n = |V|$) で定義される. ここで I_n は n 次単位行列であり, A は X の (点) 隣接行列, すなわち,

$$A = [a_{uv}]_{u,v \in V}, \quad a_{uv} = \begin{cases} 1 & \{u, v\} \in E, \\ 0 & \{u, v\} \notin E, \end{cases}$$

で定義される n 次正方形行列である. これは X 上の関数空間 $L^2(X) = \{f : V \rightarrow \mathbb{C}\}$ に $(\Delta(X)f)(u) = (q+1)f(u) - \sum_{\{u,v\} \in E} f(v)$ で作用する. $X = DT_m^{(d)}$ のとき, $\Delta(DT_m^{(d)}) = 2dI_{m^d} - A$ である. また, $\det^* \Delta(X)$ は $\Delta(X)$ の行列式である:

$$\det^* \Delta(X) = \prod_{\substack{\lambda \in \text{Spec}(\Delta(X)) \\ \lambda \neq 0}} \lambda.$$

(* は零固有値を除外するという意味で用いられている.) $\det^* \Delta(X)$ はグラフ X の complexity と呼ばれ, 文字通りグラフのある種の複雑さを測る量として知られている. 例えば, $\det^* \Delta(X)$ を $|V(X)|$ で割ったものは X の全域木の個数に一致する (Kirchhof の定理).

- 右辺の $\Delta(M)$ は多様体 M に対するラプラシアン (Laplace-Beltrami 作用素) である. これは M 上の L^2 空間 $L^2(M)$ に作用する. $M = RT_a^{(d)}$ のとき, $\Delta(RT_a^{(d)}) = -\sum_{j=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ である. また, $\det^* \Delta(M)$ は $\Delta(M)$ の行列式である. グラフの場合と同様に, これも $\Delta(M)$ の固有値全体の積として定義したいところだが, 一般に $\Delta(M)$ の固有値は無限個あるので, ここでは所謂ゼータ正規化積として $\det^* \Delta(M)$ を定義する:

$$\det^* \Delta(M) = \prod_{\substack{\lambda \in \text{Spec}(\Delta(M)) \\ \lambda \neq 0}} \lambda = \exp \left(-\frac{d}{ds} \left(\sum_{\substack{\lambda \in \text{Spec}(\Delta(M)) \\ \lambda \neq 0}} \lambda^{-s} \right) \Big|_{s=0} \right).$$

ここで, $\Delta(M)$ のスペクトルゼータ関数 $\sum_{\substack{\lambda \in \text{Spec}(\Delta(M)) \\ \lambda \neq 0}} \lambda^{-s}$ は $s=0$ のとき収束しないので, これは $s=0$ を含む領域まで解析接続して得られる量であることに注意する. $\det^* \Delta(M)$ は多様体 M の height と呼ばれる量で, グラフの場合と同様に多様体のある種の複雑さを測る量として知られている (詳しくは [S] を参照されたい).

定理 3.1 の主張の意味は以下のとおりである: 離散トーラスのラプラシアン行列式を (適当なスケール変換の下で) 粗さに関して漸近展開すると, その定数項に, 離散トーラスの極限とみなせる実トーラスのラプラシアン行列式が現れる. 言い換えれば, 離散トーラスは上記ラプラシアンのスペクトルゼータ関数の解析接続を知っている, と思える.

さて, このゼータ関数論的に興味深いと思われる離散トーラスに対して, 再度素測地定理を考えてみよう. 前述した様に,

$$N_m^{(d)}(n) = \#\{C \mid C \text{ は } \text{DT}_m^{(d)} \text{ 上の長さ } n \text{ の簡約閉路}\}$$

が主たる考察の対象である. 以下, 記号の煩雑さを避けるため, グラフ X に対して定まる数学的对象 $Q = Q(X)$ に対して, $Q_m^{(d)} = Q(\text{DT}_m^{(d)})$ と書くことにする. $d = 1$ のときは簡単な考察により次のようになる:

$$N_m^{(1)}(n) = \begin{cases} 2m & (m \mid n), \\ 0 & (m \nmid n). \end{cases}$$

実際, 閉路のみを考えているので, $m \nmid n$ のとき $N_m^{(1)}(n) = 0$ となるのは明らかである. $m \mid n$ のときは, 始点の取り方が m 通り, 始点を 1 つ決めたととき閉路の向きが右回りと左回りの 2 通りなので, $N_m^{(1)}(n) = 2m$ となる. しかし一般の $d \geq 2$ に対しては, $N_m^{(d)}(n)$ の計算は途端に難しくなる (例えば, 図 2 を見て, 適当な n に対する $N_3^{(2)}(n)$ の値を計算できるであろうか).

主結果を述べるためには, Jacobi 多項式のある一般化が必要となる. それについて説明しよう. まず Lauricella の C 型多変数超幾何関数 $F_C^{(d)}$ とは, 次の級数で定義される多変数超幾何関数である (ここで $a, b, c_1, \dots, c_d \in \mathbb{C}$ とする).

$$F_C^{(d)} \left(\begin{matrix} a, b \\ c_1, \dots, c_d \end{matrix}; x_1, \dots, x_d \right) = \sum_{n=(n_1, \dots, n_d) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^d} \frac{(a)_{|n|} (b)_{|n|}}{(c_1)_{n_1} \cdots (c_d)_{n_d}} \frac{x_1^{n_1} \cdots x_d^{n_d}}{n_1! \cdots n_d!} \\ (|x_1|^{\frac{1}{2}} + \cdots + |x_d|^{\frac{1}{2}} < 1).$$

ただし $k \geq 0$ に対して $(a)_k = a(a+1)\cdots(a+k-1)$ は Pochhammer 記号であり, $n = (n_1, \dots, n_d) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^d$ に対して $|n| = n_1 + \cdots + n_d$ と定義する. $d = 1$ のとき, $F_C^{(d)}$ は Gauss の超幾何関数 ${}_2F_1$ そのものであり, $d = 2$ のとき, これは Appell の超幾何関数 F_4 と呼ばれる 2 変数の超幾何関数に一致する. 今回必要となるのは $F_C^{(d)}$ の特殊化として定義される次の関数である (ここで $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{C}^n, \beta \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする).

$$P_{d,k}^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(|\alpha|+1)_k}{k!} F_C^{(d)} \left(\begin{matrix} -k, k+|\alpha|+\beta+1 \\ \alpha_1+1, \dots, \alpha_d+1 \end{matrix}; \frac{1-x}{2}, \dots, \frac{1-x}{2} \right).$$

$F_C^{(d)}$ の分子のパラメータの 1 つ $(-k)$ が非正の整数になっているので, この級数は実際は有限和である. すなわち, $P_{d,k}^{(\alpha,\beta)}(x)$ は x についての多項式であることに注意する. $d = 1$ のとき, これは古典的な直交多項式である Jacobi 多項式に一致する. 従って $P_{d,k}^{(\alpha,\beta)}(x)$ は Jacobi 多項式の一般化である. しかしながら $d \geq 2$ のときに, $P_{d,k}^{(\alpha,\beta)}(x)$ が直交多項式と呼べるだけの性質 (例えば適当な内積に関する直交性) を有するかどうかは今のところわかっていない.

本稿の主結果は以下の通りである.

定理 3.2.

$$(3.1) \quad N_m^{(d)}(n) = m^d \sum_{\substack{0 \leq h \leq \frac{n}{m} \\ mh \equiv n \pmod{2}}} \sum_{\substack{\mu+h \\ l(\mu) \leq d}} m^{(d)}(\mu) X_{m,h}^{(d)}(n; \mu).$$

ここで内側の和は、 h の分割 μ で (これを $\mu \vdash h$ と書く) 長さが d 以下のもの全体に渡る和であり、このような $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_l)$ ($l \leq d$) に対して、 $m^{(d)}(\mu)$, $X_{m,h}^{(d)}(n; \mu)$ はそれぞれ以下で定義される。

$$m^{(d)}(\mu) = 2^l \binom{d}{l} \binom{l}{m_1(\mu), \dots, m_h(\mu)},$$

$$X_{m,h}^{(d)}(n; \mu) = 2(d-1)\delta_{h,0} + \frac{2n(-(2d-1))^{\frac{n-mh}{2}}}{n+mh} \binom{mh}{m\mu_1, \dots, m\mu_l} P_{d, \frac{n-mh}{2}}^{(m\mu, -1)} \left(\frac{2d-3}{2d-1} \right).$$

ただし、 $m_i(\mu)$ は μ における i の重複度であり、 $\delta_{h,0}$ は Kronecker のデルタである。

この公式は、「 $N_m^{(d)}(n)$ が明示的な多項式 (の特殊値) の有限和で書ける」ということを主張している ($X_{m,h}^{(d)}(n; \mu)$ が多項式 (の $x = \frac{2d-3}{2d-1}$ での特殊値) であり、 $m^{(d)}(\mu) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ は重複度である)。それ故、これを使えば (固有値計算を行うことなく) $N_m^{(d)}(n)$ の正確な値を (手計算でも) 求めることができる。さらに、 $N_m^{(d)}(n)$ と $\pi_m^{(d)}(n)$ の間の関係式から $\pi_m^{(d)}(n)$ の明示公式が得られ、それから離散トーラスの場合の素測地線定理 (2.2) の剰余項についての更なる記述も期待される。

注意 3.1. 一般にグラフ $X = (V, E)$ は、 X の自己同型群 $\text{Aut}(X)$ が V に推移的に作用するとき頂点推移的であるという。このとき、任意の整数 $n \geq 2$ に対して、 V のある頂点を始点とし、与えられた長さを持つ閉路の個数は始点の取り方によらない。任意の Cayley グラフは頂点推移的なので、特に離散トーラス $\text{DT}_m^{(d)}$ もそうである。(3.1) の右辺に現れる最初の項 m^d は $\text{DT}_m^{(d)}$ の頂点数を表していると思ってよい。

ここで $d = 2$ の場合を詳しく見てみよう。 $d = 2$ のとき、一般化 Jacobi 多項式 $P_{2,k}^{(\alpha, \beta)}(x)$ は $F_C^{(2)}$, すなわち Appell の超幾何関数 F_4 の特殊化として書けるのだが、詳しく計算してみると、実は一般超幾何関数 ${}_4F_3$ で書けることが示される:

$$P_{2,k}^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{(|\alpha|+1)_k}{k!} {}_4F_3 \left(\begin{matrix} -k, k+|\alpha|+\beta+1, \frac{|\alpha|}{2} + \frac{1}{2}, \frac{|\alpha|}{2} + 1 \\ |\alpha|+1, \alpha_1+1, \alpha_2+1 \end{matrix}; 2(1-x) \right).$$

一方で $d \geq 3$ のときには、このように 1 変数の超幾何関数に退化する現象は今のところ確認できていないし、計算ソフト (Mathematica) を使うとむしろ退化しそうもないことが観察できる。これより離散トーラスは $d = 1, 2$ と $d \geq 3$ で性質が全く異なると思われる。(これは \mathbb{Z}^d 上のランダムウォークが $d = 1, 2$ のときは再帰的であるが、 $d \geq 3$ のときは非再帰的である、ということと関係があるのだろうか。)

例えば、 $m = 3, n = 6$ に (3.1) を使って具体的に $N_3^{(2)}(6)$ の値を計算してみると以下のようになる。

$$N_3^{(2)}(6) = 3^2 \left(X_{3,0}^{(2)}(6; 0) + 4X_{3,2}^{(2)}(6; (2)) + 4X_{3,2}^{(2)}(6; (1, 1)) \right).$$

ここで

$$X_{3,0}^{(2)}(6; 0) = 2 + 2(-27) {}_4F_3 \left(\begin{matrix} -3, 3, \frac{1}{2}, 1 \\ 1, 1, 1 \end{matrix}; \frac{4}{3} \right) = 2 + 2(-27) \left(-\frac{11}{27} \right) = 24,$$

$$X_{3,2}^{(2)}(6; (2)) = 4 {}_4F_3 \left(\begin{matrix} 0, 6, \frac{7}{2}, 4 \\ 7, 7, 1 \end{matrix}; \frac{4}{3} \right) = 1,$$

$$X_{3,2}^{(2)}(6; (1, 1)) = \binom{6}{3} {}_4F_3 \left(\begin{matrix} 0, 6, \frac{7}{2}, 4 \\ 4, 4, 7 \end{matrix}; \frac{4}{3} \right) = 20$$

なので、

$$N_3^{(2)}(6) = 3^2(1 \cdot 24 + 4 \cdot 1 + 4 \cdot 20) = 972$$

となる。 $n \leq 10$ に対する $X_{3,h}^{(2)}(n; \mu)$ の値 (および $N_3^{(2)}(n)$ の値) は以下の表の通りである。

n	$h=0$	$h=1$	$h=2$	$h=3$	$N_3^{(2)}(n)$
3		$X(1) = 1$			36
4	$X(0) = 8$				72
5		$X(1) = 10$			360
6	$X(0) = 24$		$X(2) = 1, X(1^2) = 20$		972
7		$X(1) = 42$			1512
8	$X(0) = 216$		$X(2) = 40, X(1^2) = 80$		6264
9		$X(1) = 414$		$X(3) = 1, X(21) = 84$	20988
10	$X(0) = 1520$		$X(2) = 420, X(1^2) = 840$		59040

表 1: $X(\mu) = X_{3,h}^{(2)}(n; \mu)$ の具体的な値.

注意 3.2. この表から

$$X_{m,h}^{(d)}(n; \mu) \stackrel{?}{\in} \mathbb{Z}_{>0}$$

が予想されるが、一般には正しいかどうかはわからない。少なくとも、この観察は全く非自明である。(超幾何多項式のある有理数における特殊値なので、 $X_{m,h}^{(d)}(n; \mu)$ の値が整数値かどうかわからないし、一般には負の数も足しているのがそれが正の数かどうかともわからない。) もしこの予想が正しいとすると、 $N_m^{(d)}(n)$ ではなく $X_{m,h}^{(d)}(n; \mu)$ それ自身が何か特殊な簡約閉路を数えている可能性がある。すなわち、(3.1) は素測地線定理の細分化を与えている可能性がある。[Y] には、実際そのように思うことができる 1 つの "思い方" を説明したので、興味を持たれた方は是非参照されたい。

4 証明の概略

この節では定理 3.2 の証明の概略について述べる。詳しくは [Y] を参照されたい。

グラフ X に対するスペクトルゼータ関数を次で定義する (変数 s の入り方に注意せよ)。

$$\zeta_X(s) = \sum_{\lambda \in \text{Spec}(\Delta(X))} \frac{1}{\lambda + s}.$$

今考えているグラフは有限グラフなので、ラプラシアン $\Delta(X)$ の固有値は有限個 ($|V|$ 個) である。よってこれは有限和であることに注意する。定理 3.2 は $\text{DT}_m^{(d)}$ のスペクトルゼータ関数 $\zeta_m^{(d)}(s)$ を以下の 2 通りの方法で計算 (詳しくは変数 u_s で展開) し、両者を比較することで導かれる:

(1) Ihara ゼータ関数を使う。以下の表示から始める (ラプラシアンの行列式の対数微分)。

$$(4.1) \quad \zeta_X(s) = \frac{d}{ds} \log \det(\Delta(X) + sI_{|V|}).$$

(2) 熱核を使う。以下の表示から始める (テータ関数のラプラス変換)。

$$(4.2) \quad \zeta_X(s) = \int_0^\infty e^{-st} \theta_X(t) dt \quad (\text{Re}(s) > 0)$$

ここで $\theta_X(t) = \sum_{\lambda \in \text{Spec}(\Delta(X))} e^{-\lambda t}$ は X に対するテータ関数である。

(1) は離散トラスに限らず一般の正則グラフに対して有効な計算法である。一方で (2) は離散トラスの特殊性を大いに使う。すなわち離散トラスの場合は、熱核が既存の関数 (今回は I -Bessel 関数) を用いて明示的に書ける、という点が重要である。

4.1 Ihara ゼータ関数

$X = (V, E)$ を $(q+1)$ -正則グラフとする. このとき, X に対する Ihara ゼータ関数 $Z_X(u)$ が, 以下の Euler 積で定義される.

$$Z_X(u) = \prod_{[P]} (1 - u^{l(P)})^{-1} \quad (|u| < q^{-1}).$$

ここで積において, $[P]$ は X 上の素測地線全体を渡る (一般にこれは無限積である). $Z_X(u)$ は Riemann ゼータ関数 (あるいは Selberg ゼータ関数) の離散版である. 簡単な考察により, $Z_X(u)$ の対数微分が $N_X(n)$ の母関数になっていることが確認できる:

$$(4.3) \quad u \frac{d}{du} \log Z_X(u) = \sum_{n=1}^{\infty} N_X(n) u^n.$$

言い換えれば, $Z_X(u)$ の対数微分を u で展開できれば, それから $N_X(n)$ の公式が得られる.

ここでは $Z_X(u)$ の行列式表示 (所謂 Ihara の公式) から始める:

$$(4.4) \quad Z_X(u) = (1 - u^2)^{|E|-|V|} \det(I_{|V|} - uA + qu^2 I_{|V|}).$$

$A = (q+1)I_{|V|} - \Delta(X)$ なので, 右辺の行列式は $u^{|V|} \det(\Delta(X) + sI_{|V|})$ と変形できる. ここで,

$$(4.5) \quad s = \frac{1 - (q+1)u + qu^2}{u}$$

である. よって, (4.4) の両辺の対数微分を取れば, (4.1) より次を得る. (X は $(q+1)$ -正則グラフなので, $2|E| = (q+1)|V|$ が成り立つことに注意せよ.)

補題 4.1. $X = (V, E)$ を $(q+1)$ -正則グラフとすると, 次が成り立つ.

$$(4.6) \quad \zeta_X(s) = |V| \frac{u_s}{1 - u_s^2} + \frac{u_s}{1 - qu_s^2} u_s \frac{d}{du} \log Z_X(u_s).$$

ここで

$$u_s = \frac{s + q + 1 \pm \sqrt{s^2 + 2(q+1)s + (q-1)^2}}{2q}.$$

□

u_s は (4.5) を u に関して解くことで得られる (\pm はどちらでもよい). (4.6) の右辺に Ihara ゼータ関数の対数微分が現れているので, (4.3) より, $\zeta_X(s)$ を変数 u_s で展開することができれば, それから $N_X(n)$ の公式が得られる.

この補題を $DT_m^{(d)}$ の場合に適用すると次のようになる.

命題 4.2.

$$(4.7) \quad \zeta_m^{(d)}(s) = m^d \frac{u_s}{1 - u_s^2} + \frac{u_s}{1 - (2d-1)u_s^2} u_s \frac{d}{du} \log Z_m^{(d)}(u_s).$$

ここで

$$u_s = \frac{s + 2d \pm \sqrt{s^2 + 4ds + 4(d-1)^2}}{2(2d-1)}.$$

□

注意 4.3. 変数 u_s は, 熱核を使った議論のときにもう一度現れる. (4.5) ($q = 2d-1$ のとき) より,

$$(4.8) \quad s + 2d = \frac{1 + (2d-1)u_s^2}{u_s}$$

に注意せよ (右辺が u_s の有理変換になっていることが重要である).

4.2 熱核

グラフ $X = (V, E)$ に対して, 以下に述べる X 上の熱方程式の唯一解 $K_X(x, t) : V \times \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{C}$ を X の熱核という.

$$\begin{cases} (\Delta(X) + \frac{\partial}{\partial t}) f(x, t) = 0, \\ \lim_{t \rightarrow 0} f(x, t) = \delta_{o, x}. \end{cases}$$

ここで $o \in V$ はある固定された頂点である. グラフの熱核の一般論により, 以下が示される (詳しくは, 例えば [C] を参照のこと).

補題 4.4. $X = (V, E)$ をグラフとし, $o \in V$ を 1 つ固定する. $\{\phi_\lambda(x)\}_{\lambda \in \text{Spec}(\Delta(X))}$ を $\Delta(X)$ の固有関数からなる $L^2(X)$ の正規直交基底とすると, 熱核 $K_X(x, t)$ は与えられる.

$$(4.9) \quad K_X(x, t) = \sum_{\lambda \in \text{Spec}(\Delta(X))} e^{-\lambda t} \overline{\phi_\lambda(o)} \phi_\lambda(x).$$

□

$X = \text{DT}_m^{(d)}$ とし, さらに $o = (0, \dots, 0) \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^d$ の場合を考えよう. まず,

$$\text{Spec}(\Delta_m^{(d)}) = \left\{ \lambda_v = 2d - \sum_{k=1}^d \cos(2\pi v_k) \mid v = (v_1, \dots, v_d) \in \left(\frac{1}{m}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}\right)^d \right\}$$

であり, $v = (v_1, \dots, v_d) \in (\frac{1}{m}\mathbb{Z}/\mathbb{Z})^d$ に対して $\phi_{\lambda_v}(x) = m^{-\frac{d}{2}} e^{2\pi i(x_1 v_1 + \dots + x_d v_d)}$ ($x = (x_1, \dots, x_d) \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^d$) とすれば $\{\phi_{\lambda_v}(x)\}_{v \in (\frac{1}{m}\mathbb{Z}/\mathbb{Z})^d}$ は $\Delta_m^{(d)}$ の固有関数からなる $L^2(\text{DT}_m^{(d)})$ の正規直交基底になる. よって (4.9) から $\text{DT}_m^{(d)}$ の熱核は

$$K_m^{(d)}(x, t) = m^{-d} \sum_{v=(v_1, \dots, v_d) \in (\frac{1}{m}\mathbb{Z}/\mathbb{Z})^d} e^{-\lambda_v t} e^{2\pi i(x_1 v_1 + \dots + x_d v_d)}$$

と書ける. 従って, $\text{DT}_m^{(d)}$ に対するテータ関数は

$$\theta_m^{(d)}(t) = \sum_{v \in (\frac{1}{m}\mathbb{Z}/\mathbb{Z})^d} e^{-\lambda_v t} = m^d K_m^{(d)}(0, t)$$

と熱核を用いて書けるので, (4.2) より

$$(4.10) \quad \zeta_m^{(d)}(s) = \int_0^\infty e^{-st} \theta_m^{(d)}(t) dt = m^d \int_0^\infty e^{-st} K_m^{(d)}(0, t) dt$$

となる.

次に, $\text{DT}_m^{(d)}$ の代数的な構造に着目して $K_m^{(d)}(x, t)$ を求める. $\text{DT}_m^{(d)}$ 上の関数は, \mathbb{Z}^d 上の関数でかつ各成分がすべて周期 m を持つものとして理解できるので, $\text{DT}_m^{(d)}$ の熱核 $K_m^{(d)}(x, t)$ も \mathbb{Z}^d の熱核 $K_{\mathbb{Z}^d}(x, t)$ の周期化として得ることができると期待される. (ここで \mathbb{Z}^d は (無限) Cayley グラフ $\text{Cay}(\mathbb{Z}^d, \{\pm(1, 0, \dots, 0), \dots, \pm(0, \dots, 0, 1)\})$ だと思っている.) 実際, 熱核の一意性より,

$$K_m^{(d)}(x, t) = \sum_{z \in (m\mathbb{Z})^d} K_{\mathbb{Z}^d}(x + z, t)$$

が示される (右辺が $\text{DT}_m^{(d)}$ 上の熱方程式の解であることを確かめよ). また,

$$K_{\mathbb{Z}^d}(x, t) = \prod_{j=1}^d K_{\mathbb{Z}}(x_j, t) \quad (x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{Z}^d)$$

なので (同様に右辺が \mathbb{Z}^d 上の熱方程式の解であることを確かめよ), 最終的に $K_m^{(d)}(x, t)$ は \mathbb{Z} の熱核 $K_{\mathbb{Z}}(x, t)$ を用いて表せることが分かる. \mathbb{Z} の熱核については以下が知られている.

定理 4.1 ([KN]).

$$K_{\mathbb{Z}}(x, t) = e^{-2t} I_x(2t).$$

ここで $I_x(t)$ は I -Bessel 関数 (第 1 種変形 Bessel 関数) である。□

証明については、やはり右辺が \mathbb{Z} 上の熱方程式の解であることを確かめればよい。簡単な計算なので、ここでは I -Bessel 関数が満たす微分差分方程式

$$\frac{\partial}{\partial x} I_x(t) - I_{x+1}(t) - I_{x-1}(t) = 0$$

と \mathbb{Z} 上のラプラシアン $\Delta_{\mathbb{Z}}$ の \mathbb{Z} 上の関数 f への作用

$$(\Delta_{\mathbb{Z}} f)(n) = 2f(n) - f(n+1) - f(n-1)$$

が "似ている" ということだけ紹介する。



図 3: \mathbb{Z} .

以上により, $K_{\mathbb{Z}^d}(x, t)$ の I -Bessel 関数による表示が得られた:

$$\begin{aligned} K_m^{(d)}(x, t) &= \sum_{z \in (m\mathbb{Z})^d} K_{\mathbb{Z}^d}(x+z, t) \\ &= \sum_{(z_1, \dots, z_d) \in (m\mathbb{Z})^d} \prod_{j=1}^d K_{\mathbb{Z}}(x_j + z_j, t) \\ &= \sum_{(z_1, \dots, z_d) \in (m\mathbb{Z})^d} \prod_{j=1}^d e^{-2t} I_{x_j + z_j}(2t). \end{aligned}$$

従って (4.10) より,

$$\begin{aligned} \zeta_m^{(d)}(s) &= m^d \int_0^\infty e^{-st} K_m^{(d)}(0, t) dt \\ &= m^d \sum_{(z_1, \dots, z_d) \in (m\mathbb{Z})^d} \int_0^\infty e^{-t(s+2d)} \prod_{j=1}^d I_{z_j}(2t) dt \\ &= m^d \sum_{h=0}^\infty \sum_{\substack{\mu \vdash h \\ l(\mu) \leq d}} m^{(d)}(\mu) \int_0^\infty e^{-t(s+2d)} \prod_{j=1}^d I_{m\mu_j}(2t) dt. \end{aligned}$$

ここで、2 段目から 3 段目の変形について説明する。2 段目の積分は $(z_1, \dots, z_d) \in (m\mathbb{Z})^d$ の順番によらず、かつ I -Bessel 関数の性質 $I_{-x}(2t) = I_x(2t)$ より $|z_1|, \dots, |z_d|$ にのみ依存する。よって、長さが d 以下の分割がそれぞれの積分の代表元として取れるが、それらを $|z_1| + \dots + |z_d|$ の順に並び替え、同じ積分を重複度 $m^{(d)}(\mu)$ 付きでまとめ直したものが 3 段目の式である。

ここでもう一度ゴールを思い出そう。我々がやるべきことは、スペクトルゼータ関数 $\zeta_m^{(d)}(s)$ を変数 u_s で展開することである。一見すると、ここまでの議論ではまだ u_s が出てきていないように思えるが、実はもう準備は整っている。 $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_d) \vdash h$ に対して

$$F_\mu^{(d)}(x) = \int_0^\infty e^{-xt} \prod_{j=1}^d I_{m\mu_j}(2t) dt \quad (\operatorname{Re}(x) > 2d)$$

とおく. このとき, 直前の式より

$$(4.11) \quad \zeta_m^{(d)}(s) = m^d \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{\substack{\mu^{\dagger h} \\ l(\mu) \leq d}} m^{(d)}(\mu) F_{\mu}^{(d)}(s+2d)$$

であるが, (4.8) より, $s+2d$ は u_s の有理変換で書くことができる. これを熱核の議論と変数 u_s (Ihara ゼータ関数の議論から来たもの) が結びついた. さらに次の定理により, $\zeta_m^{(d)}(s)$ を u_s で実際に展開できることが示され, そのときの係数に, 3 節で導入した一般化 Jacobi 多項式が現れる.

命題 4.5. $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_d) \vdash h, l(\mu) \leq d$ に対して,

$$(4.12) \quad \begin{aligned} F_{\mu}^{(d)}(x) &= \frac{1}{x^{mh+1}} \binom{mh}{m\mu_1, \dots, m\mu_d} F_C^{(d)} \left(\begin{matrix} \frac{mh}{2} + \frac{1}{2}, \frac{mh}{2} + 1 \\ m\mu_1 + 1, \dots, m\mu_d + 1 \end{matrix}; \frac{4}{x^2}, \dots, \frac{4}{x^2} \right). \\ F_{\mu}^{(d)}(s+2d) &= F_{\mu}^{(d)} \left(\frac{1+(2d-1)u_s^2}{u_s} \right) \\ &= \binom{mh}{m\mu_1, \dots, m\mu_d} u_s^{mh+1} \sum_{k=0}^{\infty} P_{d,k}^{(m\mu,0)} \left(\frac{2d-3}{2d-1} \right) (-(2d-1)u_s^2)^k. \end{aligned}$$

□

証明については, だいぶん込み入った計算を要するのでここでは紹介しない. 興味がある方は [Y] を参照されたい. 必要となるのは I -Bessel 関数の Taylor 展開

$$I_x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! \Gamma(n+x+1)} \left(\frac{t}{2} \right)^{2n+x}$$

と超幾何関数特有の式変形のみである (途中で一般化 Jacobi 多項式の漸化式も用いる).

4.3 証明と注意

これで定理 3.2 を証明する準備ができた.

(定理 3.2 の証明). (4.7) より,

$$u_s \frac{d}{du} \log Z_m^{(d)}(u_s) = -m^d \frac{1-(2d-1)u_s^2}{1-u_s^2} + \frac{1-(2d-1)u_s^2}{u_s} \zeta_m^{(d)}(s)$$

である. 左辺を u_s で展開すると, (4.3) より u_s^n の係数は $N_m^{(d)}(n)$ である. 一方で右辺を u_s で展開すると, (4.11) および (4.12) より, それは一般化 Jacobi 多項式 $P_{d,k}^{(\alpha,\beta)}(x)$ の $x = \frac{2d-3}{2d-1}$ の特殊値を用いて書ける. それを正確に書くと, (3.1) となる. □

注意 4.6. 今回の議論で一番非自明な主張は, 命題 4.5 の 2 つ目の式, すなわち, 「 $F_{\mu}^{(d)}(x)$ に $x = \frac{1+(2d-1)u_s^2}{u_s}$ を代入したものが u_s で展開できる」というものである. これについて, 超幾何関数の視点から 1 つコメントする.

$d=1$ の場合に, 命題 4.5 の 2 つの式を書くと, 以下のようになる.

$$\begin{aligned} F_h^{(1)}(x) &= \frac{1}{x^{h+1}} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} \frac{h}{2} + \frac{1}{2}, \frac{h}{2} + 1 \\ h+1 \end{matrix}; \frac{4}{x^2} \right), \\ F_h^{(1)}(s+2) &= F_{\mu}^{(1)} \left(\frac{1+u_s^2}{u_s} \right) \\ &= u_s^{h+1} \sum_{n=0}^{\infty} P_{1,k}^{(h,0)}(-1) (-u_s^2)^k = \frac{u_s^{h+1}}{1+u_s^2}. \end{aligned}$$

(最後の等式では $P_{1,k}^{(\alpha,\beta)}(-1) = (-1)^k \binom{k+\beta}{k}$ を使った。) 2 つ目の式は, Gauss の超幾何関数のある有理変換が (その変数に関する) べき級数に展開できる, ということを主張しているのだが, この事実は次に述べる Pfaff の変換公式 ($x = u_s^2$ のとき) から導くことができる:

$${}_2F_1 \left(\begin{matrix} \frac{a}{2}, \frac{a+1}{2} \\ a-b+1 \end{matrix} ; \frac{4x}{(1+x)^2} \right) = (1+x)^a {}_2F_1 \left(\begin{matrix} a, b \\ a-b+1 \end{matrix} ; x \right).$$

すなわち今回の我々の主張は, Gauss の超幾何関数に対する Pfaff の変換公式を, パラメータが特殊な場合に Lauricella の C 型多変数超幾何関数に対して拡張した, ということもできる。

参考文献

- [CJK] G. Chinta, J. Jorgenson and A. Karlsson, Zeta functions, heat kernels, and spectral asymptotics on degenerating families of discrete tori, *Nagoya Math. J.*, **198** (2010), 121–172.
- [C] F. Chung, Spectral graph theory. CBMS Regional Conference Series in Mathematics, 92. Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC; by the American Mathematical Society, Providence, RI, 1997.
- [KN] A. Karlsson and M. Neuhauser, Heat kernels, theta identities, and zeta functions on cyclic groups, Topological and asymptotic aspects of group theory, 177–189, *Contemp. Math.*, 394, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006.
- [KS] M. Kotani and T. Sunada, Zeta functions of finite graphs, *J. Math. Sci. Univ. Tokyo*, **7** (2000), 7–25.
- [S] P. Sarnak, Determinants of Laplacians; heights and finiteness, *Analysis, et cetera*, 601–622, Academic Press, Boston, MA, 1990.
- [T] A. Terras, Zeta functions of graphs. A stroll through the garden, *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*, 128. Cambridge University Press, Cambridge, 2011.
- [Y] Y. Yamasaki, An explicit prime geodesic theorem for discrete tori and the hypergeometric functions, submitted, 2016.