

On relations among multiple zeta values coming from knot theory

大阪大学大学院理学研究科 数学専攻 伊藤哲也

Tetsuya Ito

Department of Mathematics, Graduate School of Science,
Osaka University

1 Introduction

多重ゼータ値 $\zeta(k_1, \dots, k_m) = \sum_{0 < n_1 < \dots < n_m} \frac{1}{n_1^{k_1} n_2^{k_2} \dots n_m^{k_m}}$ ($k_m > 1$ のとき収束する) は 1 形式 $\omega_0 = \frac{1}{z} dz, \omega_1 = \frac{1}{1-z} dz$ を用いた反復積分により

$$\begin{aligned} \zeta(k_1, \dots, k_m) &= \int_0^1 \omega_1 \omega_0^{k_1-1} \dots \omega_1 \omega_0^{k_m-1} \\ &= \int_{0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{k_1+\dots+k_m} \leq 1} \frac{1}{1-t_1} \frac{1}{t_2} \dots \frac{1}{t_{k_1}} \frac{1}{1-t_{k_1+1}} \dots dt_1 \dots dt_{k_1+\dots+k_m} \end{aligned}$$

と表示できる。

90年代、結び目の Kontsevich 積分 (不変量) において、多重ゼータ値の反復積分表示が現れることから、結び目理論を介して多重ゼータ値の関係式が得られた。その後の結び目理論の発展により、Kontsevich 積分から得られる多重ゼータ値の関係式を統一して (さらに associator の理論を使わずより結び目理論的な観点・手法で) 扱うことができることが分かっている (が、このことをはっきりと書いてある文献は筆者の探した限り見当たらない)。ここでは、結び目理論から得られる多重ゼータ値の関係式について、主に結び目理論の非専門家向けにインフォーマルな説明を行う。理論の主要部である Kontsevich 不変量や Jacobi 図については第3節でもう少し説明を加えるが、より詳しくは [3, 6] などを参照のこと。

2 結び目理論から多重ゼータ関係式へ

まずは、結び目理論からどのように多重ゼータ値の関係式が得られるかについての概略を見ていく。

複素半単純リー環 \mathfrak{g} の普遍包絡環 $U(\mathfrak{g})$ を複素パラメータ q で変形することで、量子群 $U_q(\mathfrak{g})$ が得られ、 \mathfrak{g} の表現 V は、 $U_q(\mathfrak{g})$ の表現に変形される。結び目の量子不変量の理論から、 \mathfrak{g} とその表現 V について、量子群を経由することで複素数 \mathbb{C} (またはパラメータ q を変数とみて $\mathbb{C}[q^{\pm 1}]$) に値をとる結び目 K の量子 (\mathfrak{g}, V) -不変量 $Q^{\mathfrak{g}, V}(K)$ が構成される。例えば、最も有名な量子不変量である Jones 多項式は \mathfrak{sl}_2 の二次元規約表現から得られる量子不変量である。

このようにして (リー環とその表現の数だけ、無限個) 得られる量子不変量を統一するものとして Kontsevich 不変量が構成された。Kontsevich 不変量は、Jacobi 図と呼ばれる、Lie 環を図式的に表示するある種のグラフにより生成される次数付き代数 $\mathcal{A}(\mathcal{O})$ に値をとる。Jacobi 図を Lie 環 \mathfrak{g} とその表現 V で評価する (グラフを適宜 \mathfrak{g} や V の元と置き換えて適当に積・和をとる) ことで Weight system と呼ばれる線形写像 $W_{\mathfrak{g}, V} : \mathcal{A}(\mathcal{O}) \rightarrow \mathbb{C}$ が得られ、次が成り立つ。

Theorem 1. $Q^{\mathfrak{g}, V}(K) = W_{\mathfrak{g}, V}(Z(K))$

つまり、Kontsevich 不変量を Weight system で評価することにより、すべての量子不変量が導出できる。

Kontsevich 不変量は最初、結び目に沿った反復積分を用いて定義された。その後、(Drinfeld) associator を用いることで、より組み合わせ的な定式化が与えられ、今日では組み合わせ的な定式化を用いることが多い。ここでは、積分による定義を強調するために、しばしば Kontsevich 不変量を Kontsevich 積分と呼ぶことにする。

驚くことに、自明な結び目の Kontsevich 積分の計算に多重ゼータ値の反復積分表示が現れる (次節参照)。この観察から、自明な結び目 U の量子不変量 $Q^{\mathfrak{g}, V}(U)$ を二通りの異なるやり方で計算することで多重ゼータ値の関係式を次のようにして得ることができる。

まずは、 $Q^{\mathfrak{g}, V}(U)$ を (量子不変量の定義などから) 直接計算する。この計算では、多重ゼータ値は現れない。一方で $Q^{\mathfrak{g}, V}(U)$ を U の Kontsevich 積分 $Z(U)$ を経由して、定理 1 を利用して計算してみる。 $Z(U)$ に多重ゼータ値が現れていたのだから、この方法で計算すると $Q^{\mathfrak{g}, V}(U)$ は多重ゼータ値を用いて記述されている。もちろん、二つの計算は一致するはずだから、最終的に

$$(\text{多重ゼータ値であらわされる値}) = Q^{\mathfrak{g}, V}(U) = (\text{多重ゼータ値と関係ない値})$$

という多重ゼータ値の何らかの関係式が得られることになる!

量子不変量がリー環とその表現の数だけあることから、リー環とその表現の数だけ、無限個の多重ゼータ値の関係式が得られることになる。例えば、最初 Le-村上 [4] によって

得られた関係式は、HOMFLY 多項式 (\mathfrak{sl}_n とその n 次元の標準表現 V_n から得られる量子不変量) を考察することで得られた。

このように理論上無限個の関係式が得られることから、次の問いが浮かぶ。

Question 1. Kontsevich 積分から得られる多重ゼータ値の関係式を統制するような普遍的な多重ゼータ値の関係式は何か？

この問いの答えが、第四節で述べる Wheel 定理により与えられる。

3 Kontsevich 積分とは何か？

3.1 Jacobi 図

定義 2. 向きのついた一次元多様体 X (または空集合 \emptyset) 上の Jacobi 図とは、 X とグラフ G の和集合であり、次の条件を満たすものである。

1. グラフ G の頂点は一価または三価
2. $X \neq \emptyset$ の時、 G の一価頂点は X 上にある
3. G の三価頂点および、 X 上にある一価頂点 (=三価頂点とみる) には向きがついている (頂点から出る 3 本の辺に順番がついている)

通常、Jacobi 図 D を平面上のグラフとして書き表す。このとき一価頂点には平面の向きから定まる向きが定まっているものとする。

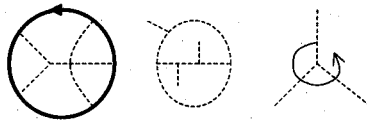


図 1 S^1 上の Jacobi 図、 \emptyset 上の Jacobi 図の例。Jacobi 図の三価頂点には右のように平面の向きから定まる向きがついているとみる。

定義 3. $\mathcal{A}(X)$ を Jacobi 図により張られる \mathbb{C} 上のベクトル空間を図 2(1) の AS,IHX,STU 関係式で割って得られるベクトル空間とする。($X = \emptyset$ の時は、慣例的に \mathcal{B} と書く)。Jacobi 図 D についてその次数を $\deg(D) = \#\{\text{頂点の数}\}$ と定義する。AS,IHX,STU 関係式は次数を保つので、 $\mathcal{A}(X)$ は次数付きベクトル空間になる。さらに $X = \emptyset, \emptyset$ の時は、

それぞれ図 2(2) のように積を定義することで、 $\mathcal{A}(X)$ は次数付き代数の構造を持つ。

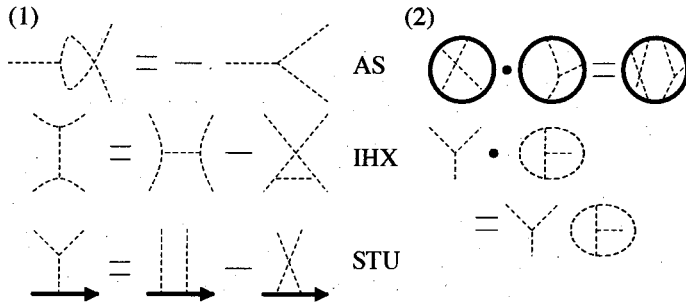


図 2 (1) AS,IHX,STU 関係式, (2) $\mathcal{A}(\circ)$, \mathcal{B} の積構造

AS,IHX,STU 関係式は、Lie 環 (とのその包絡環の表現) の満たすべき公理を図式的に表現したものにとらえられる。Jacobi 図の各辺に Lie 環の元を、 X から一価頂点を除いた各連結成分に表現 V の元をそれぞれ三価頂点の周りでは $a, b, [a, b]$ (X 上にない場合) および v, a, av (X 上にある場合) となるように置く。すると、AS 関係式は $[a, b] = -[b, a]$ を、IHX 関係式は Jacobi 律 $[a[b, c]] = [[a, b], c] - [[a, c], b]$ を、STU 関係式は包絡環の関係式 $[a, b]v = avb - bav$ を表している (図 3 参照)

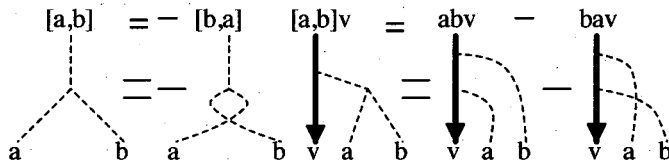


図 3 AS,STU 関係式と Lie 環の公理

このようなラベル付けを適切に行うことで、Jacobi 図の空間から \mathbb{C} への線形写像 (Weight system) $W_{g,v} : \mathcal{A}(\circ) \rightarrow \mathbb{C}$ が構成される。

3.2 Kontsevich 積分

ここでは、Kontsevich 積分がどのように定義されるか、その考え方を中心に (ただし、ここで述べる説明はより代数トポロジーに近い観点からの説明である) 説明していく。厳

密な定義などは [1] (Kontsevich 自身の論文よりも詳しく書いてある) や最初に挙げた文献を参照してほしい。

Step 1. 複素解析などで現れる次の事実を思い出そう。 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 内の曲線 C について

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_C \frac{1}{z} dz = C \text{ の回転数 } \in \mathbb{Z}$$

である。つまり、(複素) 微分 1 形式 $\frac{1}{z} dz$ を積分することで 0 の周りを C が何回回転したかという位相幾何的な情報を計算できる。

Step 2. 少し一般化して、 $K_i(t) = (k_i(t), t) \in \mathbb{C} \times [0, 1]$, $K_0(t) \neq K_1(t)$ ($t \in [0, 1]$) となる関数 $K_1, K_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \times [0, 1]$ を考える。 K_1, K_2 の像は $\mathbb{C} \times [0, 1]$ 内の二本のひもの埋め込みと見える。このとき、二本のひも K_1 と K_2 の絡み数 $lk(K_1, K_2)$ は

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \frac{1}{k_1 - k_2} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \frac{k_1'(t) - k_2'(t)}{k_1(t) - k_2(t)} dt = lk(K_1, K_2)$$

となる。つまり、 $\frac{1}{k_1 - k_2}$ を積分することで、ひも K_1 と K_2 を結ぶ水平な“コード”が t が 0 から 1 まで動く間に何回回転したかを記述できる。

Step 3. 結び目 $K : S^1 \hookrightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ について、高さ (\mathbb{R} 成分) についての極大・極小点を除くことで、 K を高さについて単調増加/減少になっているような、**Step 2** で考えたようなひもの集まり $\{K_1, \dots, K_n\}$ とみる。 i 番目と j 番目のひもを結ぶ水平な“コード”について、微分形式 $\omega_{i,j} = \frac{1}{k_i - k_j}$ とおく。

Step 2 でみたように、 $\omega_{i,j}$ を積分することで K_i と K_j の絡み数 (=“コード”が何回回転したか) というホモロジー的な不変量を記述できた。この一般化として $\omega_{i,j}$ たちの反復積分を計算することで、より深い位相幾何的な情報 (ホモトピー的な不変量) を得ることを考える (Chen の反復積分の理論: [5] に詳しく解説されている)。

一つのコードを考えるのではなく、(図 4 (1)) のように二本以上のコードを考え、各コードの配置 P (結び目上でどのような位置関係にあるか) を Jacobi 図 D_P として表示する。そして、可能なすべてのコードの配置に関して、対応する微分形式 $\omega_{i,j}$ たちの反復積分を足し合わせたもの

$$Z(K) = 1 + \int_{\text{all possible configurations } P} \pm (\omega_{i_1, j_1} \cdots \omega_{i_k, j_k}) D_P \in \mathcal{A}(\mathcal{O})$$

(ここで符号 \pm はコードの端点におけるひもの向きから定まる) を考える (図 4 (1))。ここで最初の 1 はコードが何もない配置に対応している。これは、適切に補正することにより

結び目の不変量になり、Kontsevich 不変量 (積分) と呼ぶ*1。

補正の関係で、自明な結び目 U の Kontsevich 不変量は二つの極大と極小を持つ結び目の沿った積分で与えられる。そのような自明結び目 U の表示として図 4 (2) のようなものを取り、Kontsevich 積分を計算する。 \mathbb{I} 字の部分以外のひもを無限遠に伸ばしていく (Kontsevich 積分の不変性よりこのようにしても積分の値は変化しない) ことを考えると、自明な結び目の Kontsevich 積分は \mathbb{I} 字の部分での積分で与えられることが分かる。

このとき、コードに対応して現れる微分形式は $\frac{1}{t}dt, \frac{1}{1-t}dt$ であることから、Kontsevich 積分に現れる反復積分

$$\int \omega_{i_1, j_1} \omega_{i_2, j_2} \cdots \omega_{i_k, j_k}$$

は多重ゼータ値の反復積分表示に他ならない!

この観察を用いて、Le-村上 [4] により自明な結び目 U の Kontsevich 不変量の明示式が多重ゼータ値を用いて与えられた。

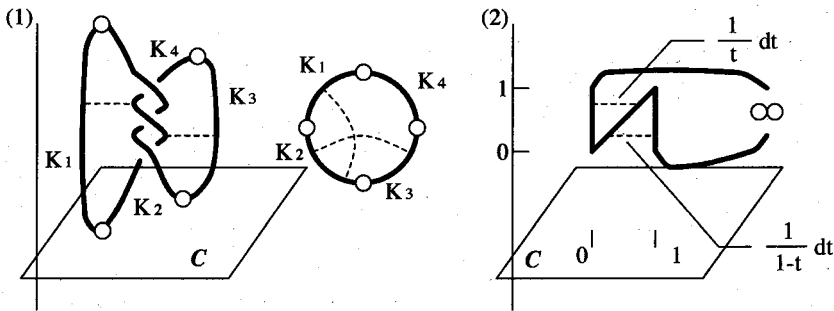


図 4 (1) Kontsevich 積分の定義: K をひもの集まりとみて、コードの配置を Jacobi 図で表示する。(2) 自明な結び目の Kontsevich 積分の計算

4 Wheel Theorem による普遍結び目多重ゼータ値関係式

Poincare-Birkhoff-Witt の定理から、複素半単純 Lie 環 \mathfrak{g} の対称代数を $S(\mathfrak{g})$ とすると

$$\chi(x_1 \cdots x_n) = \frac{1}{n!} \sum_{s \in S_n} x_{s(1)} \cdots x_{s(n)}$$

*1 この積分による定義は、現在主に用いられている枠付き結び目の Kontsevich 不変量とは少し異なり、枠付き結び目の Kontsevich 不変量を積分表示するには若干の修正が必要となる。[3] 参照

により定義される写像 $\chi : S(\mathfrak{g}) \rightarrow U(\mathfrak{g})$ はベクトル空間の同型 (PBW 同型) を与える。

Jacobi 図についても同様に $\chi : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}(\odot)$ を Jacobi 図の一価頂点 (leg) を円周に取り付けるすべての方法の平均をとると定義することで、ベクトル空間の同型が得られる。

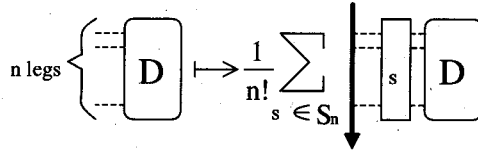


図 5 Jacobi 図での Poincare-Birkhoff-Witt (PBW) 同型

PBW 同型 χ は代数 (積) の構造は保たないが、PBW 同型を修正することで、 \mathfrak{g} -不変部分 $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ と $U(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ の代数の同型が得られることが知られている (Duflo 同型定理)。Jacobi 図についても同様に、PBW 同型 χ は $\mathcal{A}(\odot)$ と \mathcal{B} の積構造は保たないが、PBW 同型 χ を修正することで $\mathcal{A}(\odot)$ と \mathcal{B} の代数の同型が得られる。

Theorem 4 (Wheeling 定理 [2]). ある写像 $j_{Wheel} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ が存在し、 $\chi \circ j_{Wheel} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}(\odot)$ は代数の同型となる。

Wheeling 定理を利用することで、自明な結び目の Kontsevich 不変量のより (Le-Murakami の計算と比べ) 具体的な表示が与えられる。

Theorem 5 (Wheel 定理 [2]).

$$\Omega = \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n} \left(\text{diagram with } 2n \text{ legs} \right) \in \mathcal{B}$$

とすると、自明な結び目 U について $\chi^{-1}Z(U) = \exp(\Omega)$ が成り立つ。

ここで b_{2n} は修正 Bernoulli 数 $b_{2n} = \frac{B_{2n}}{4n \cdot (2n)!}$ (B_{2n} は通常の Bernoulli 数) であり、 $\exp : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ は $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots$ で与えられる写像である。

Wheel 定理で現れた Ω は Wheeling 定理での j_{Wheel} の定義に現れるもので、Lie 環での Duflo 同型のアナロジーから導入される。Wheel 定理、Wheeling 定理の証明では、結び目理論における次の事実が重要な役割を果たす。

- K の (p, q) -cable についての Kontsevich 不変量の公式 (Cabling 公式)
- Unknot の $(n, 1)$ -cable が Unknot であること (" $n \cdot 0 = 0''$) (図 6 (2))

ここで、結び目 K の (p, q) -cable とは、結び目に沿ってひもを p 重化して q だけひねるこ

とで得られる新しい結び目のことである (図 6 (1))。

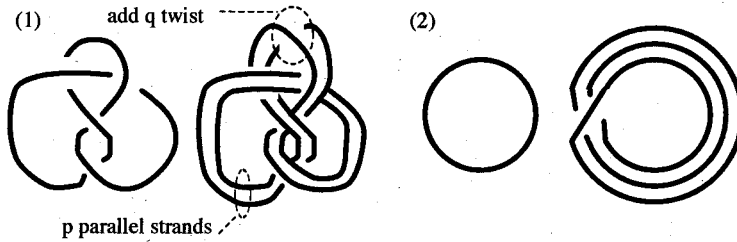


図 6 (1) 結び目 K の (p, q) -cable (2) " $n \cdot 0 = 0$ "

Cabling 公式は、Kontsevich 積分の associator を用いた組み合わせ表示を用いて証明されているが、Kontsevich 積分の表示からも (組み合わせ的な定式化を経由せずに) 証明できる。

結び目理論から得られた多重ゼータ値の関係式は、量子不変量の直接計算と、Le-村上による Kontsevich 積分の計算を対応する weight system で評価したものを比較して得られていた。Wheel 定理を用いることで、weight system を用いずに (量子不変量に落とさずに)、Kontsevich 不変量の段階で直接多重ゼータ値の関係式を得ることができる。特に、Wheel 定理から得られる多重ゼータ値の関係式は、Weight system (量子不変量) を経由して得られた多重ゼータ値の関係式について普遍的である。

最後に、Wheel 定理から得られる多重ゼータ値の関係式の最も簡単な場合を例に挙げる。

例 6. (結び目理論による $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ の証明) Wheel 定理より、

$$\chi^{-1}Z(U) = 1 + \frac{1}{48} \text{ (diagram of a circle with a dot) } + \dots \in \mathcal{B}$$

である。一方、Le-Murakami の計算より、

$$Z(U) = 1 - \frac{\zeta(2)}{4\pi^2} \text{ (diagram of a circle with an X) } + \dots \in \mathcal{A}(\circ)$$

となる。二つを比較するために、Poincaré-Birkoff-Witt 同型 χ による像を計算すると

$$\chi(\text{diagram of a circle with a dot}) = \frac{1}{2} \left(\text{diagram of a circle with a dot and X} + \text{diagram of a circle with a dot and dot} \right) = -2 \text{ (diagram of a circle with an X) } + 2 \text{ (diagram of a circle with a dot) }^{*2}$$

*2 このような孤立したコードを持つヤコビ図の係数は最終的にゼロになるので無視してよい。

となることから、両辺の \otimes の係数を比較することで $-\frac{\zeta(2)}{4\pi^2} = -2 \cdot \frac{1}{48}$, つまり $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ が得られる。

残念ながら、代数 $\mathcal{A}(\circ)$ 及び \mathcal{B} の構造は複雑であることから、Wheel 定理による多重ゼータ値の関係式を明示的な形で書くことは今のところ難しい。困難の原因は、一般の次数について $\mathcal{A}(\circ)$ や \mathcal{B} の i 次部分の基底 (の具体的な表示) はおろか、その次元すらわかっていないことにある。そのために、PBW 同型 χ で Wheel 定理の結果を $\mathcal{A}(\circ)$ の元として表示した際に、Le-村上の計算結果と比較を行うこと (上の例での“両辺の \otimes の係数を比較する”に対応すること) が難しい。次数が低いところについて、例6のように具体的にどのような関係式が現れるか調べるだけでも、面白いのではないだろうか。

参考文献

- [1] D. Bar-Natan, *On the Vassiliev knot invariants*, *Topology*. **34** (1995), 423–472.
- [2] D. Bar-Natan, T. Le and D. Thurston, *Two applications of elementary knot theory to Lie algebras and Vassiliev invariants*, *Geom. Topol.* **7** (2003), 1–31
- [3] S. Chmutov, S. Duzhin and J. Mostovoy, *Introduction to Vassiliev knot invariants*, Cambridge University Press, Cambridge, 2012. xvi+504 pp.
- [4] T. Le and J. Murakami, *Kontsevich’s integral for the Homfly polynomial and relations between values of multiple zeta functions*, *Topology. Appl.* **62** (1995) 193–206.
- [5] 河野俊丈, *反復積分の幾何学*, シュプリンガー現代数学シリーズ第14巻、シュプリンガー・ジャパン, 2008年
- [6] T. Ohtsuki, *Quantum invariants*, Series on Knots and Everything, 29. World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 2002.