数理解析研究所講究録
第2034巻 2017年 89-100

物体により励起される表面張力波
—オイラー方程式の解と弱非線形理論の解—

京都大学大学院工学研究科　細井 聖也 (Seiya Hosoi)
花崎 秀史 (Hideshi Hanazaki)
Graduate School of Engineering, Kyoto University

1　はじめに

表面張力と重力を復元力として運動する水面波を表面張力重力波と呼ぶ．その一例として一様流中の底面物体によって水面波が励起される場合を取り上げると，上流に伝播する波の位相速度および群速度と一様流速がほぼ等しいときには共鳴が起こり，振幅の大きな孤立波 (ソリトン) が励起される現象が見られる．また，表面張力の効果が存在する場合には，このような孤立波は分散波を放射する (ソリトン放射) ことが分かっている．この現象について，表面張力効果の大きさ (ボンド数) を変えた場合の数値計算が存在する [1]．一方，振幅の大きな孤立波等に適用できる理論として，長波長近似を行うことで非線形効果を考慮した弱非線形理論があり，弱非線形理論を用いて表面張力重力波の運動について議論した研究も多く存在する [2][3]．表面張力重力波を記述する弱非線形理論の方程式としては，5th-order forced Korteweg-de Vries(fKdV) 方程式等が提案されている [4]．

本研究では Euler 方程式を用いた数値計算により，底面物体の高さ，及び一様流速が変化したときの波面の変化を調べる．また，5th-order fKdV 方程式の解と Euler 方程式の解を比較することにより，弱非線形理論の適用性を検証する．

2　支配方程式および境界条件

非圧縮，非粘性の流体の運動は連続の式と Euler 方程式に支配されており，これらの式を水深 D，一様流速 U，密度 ρ(一定) を用いて無次元化すると以下のようになる．

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0, \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} &= -\nabla p - \frac{1}{Fr^2}\hat{\boldsymbol{z}} \\ &= -\nabla P. \end{aligned} \tag{2.2}$$

ただし，$\boldsymbol{u} = (u, w)^T$ は速度ベクトル，$\hat{\boldsymbol{z}}$ は鉛直方向の単位ベクトルをそれぞれ表している．また，P は以下の式で表される．

$$P = p - \frac{1}{Fr^2}(1 - z). \tag{2.3}$$

Fr は Froude 数であり，$Fr = U/\sqrt{gD}$ で定義される．

次に境界条件について述べる．まず，底面上ではスリップ条件を採用した．上流端の速度は $\boldsymbol{u} = (1, 0)$ の一様流とし，下流端では $\dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} = \boldsymbol{0}$ とした．

自由表面上では力学的境界条件と運動学的境界条件が課される．力学的境界条件は自由表面上における応力のつり合いを意味し，以下のように表される．

$$p = p_0 + \frac{Bo}{Fr^2}\kappa. \tag{2.4}$$

ここで，p_0 は大気圧である．Bo は Bond 数であり，$Bo = T/\rho g D^2$(T:表面張力係数) である．また，自由表面の曲率 κ は，自由表面の鉛直変位 η を用いて，

$$\kappa = -\frac{\eta_{xx}}{(1+\eta_x^2)^{3/2}}, \tag{2.5}$$

で表される．式 (2.4) より自由表面において P は

$$P = p_0 + \frac{1}{Fr^2}(z-1) + \frac{Bo}{Fr^2}\kappa, \tag{2.6}$$

となる．

運動学的境界条件は，自由表面上の流体粒子が自由表面と共に運動することを表す．密度境界面の形状は関数 $F(x,z,t)$ を使うと，

$$F(x,z,t) = z - \eta(x,t) = 0, \tag{2.7}$$

となる．自由表面上の流体粒子はいつまでも境界面を形成して境界面を離れることはないため，$F(x,z,t)$ の実質微分が 0 になることより，

$$\frac{DF}{Dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \boldsymbol{u}\cdot\nabla F = 0, \tag{2.8}$$

となる．式 (2.7) と式 (2.8) より，結局，

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + u\frac{\partial \eta}{\partial x} = w, \tag{2.9}$$

となる．

3 弱非線形理論 —5th-order fKdV 方程式—

底面物体の上を過ぎる非粘性流れの表面張力重力波を表す式として，5th-order forced Korteweg-de Vries(fKdV) 方程式がある [4].

D を水深，a を振幅，h_0 を底面物体高さ，L を水平方向の長さスケールとし，

$$\alpha = \frac{a}{D},\quad \beta = \frac{D^2}{L^2},\quad \gamma = \frac{h_0}{D}. \tag{3.1}$$

とする．α は水深と波の振幅の比，β は波の波長と水深の比の 2 乗，γ は水深と底面物体高さの比を表している．

$$\alpha \sim \beta^2 \sim \gamma^{\frac{1}{2}} \ll 1, \tag{3.2}$$

とし，さらに $Fr \simeq 1, Bo \simeq \frac{1}{3}$ と仮定することで，水深 D，一様流速 U，密度 ρ で無次元化された形の 5th-order fKdV 方程式

$$Fr\eta_t + (Fr-1)\eta_x - \frac{3}{2}\eta\eta_x + \frac{1}{2}\left(Bo - \frac{1}{3}\right)\eta_{xxx} - \frac{1}{90}\eta_{xxxxx} = \frac{1}{2}h_x, \tag{3.3}$$

が導出される．

4 数値計算法

4.1 Euler 方程式の数値解法

4.1.1 数値計算法

Euler 方程式の解法には，MAC(Marker and Cell) 法を用いた．本研究では，2 次元の境界適合格子を用い，計算ステップ毎に波面形状を求め，波面に合わせて格子点を配置し直す．計算点の移動は鉛直方向のみとする．

空間微分の離散化には，Euler 方程式 (2.2) の対流項以外は，2 次精度の中心差分を用いた．Euler 方程式 (2.2) の対流項は，数値粘性の効果をできるだけ小さくするためと，数値的安定性の両方の観点から，3 次精度の風上差分を適用した [6][7].

また，Euler 方程式 (2.2) の時間微分には 2 次精度の Adams-Bashforth 法を，自由表面（運動学的境界条件 (2.9)）の時間微分には，2 次精度の Crank-Nicolson 法を用いた．

計算手順は以下のようになる．

1. $t = n\Delta t$ の速度場 $\boldsymbol{u}^n$ の値を用いて，Euler 方程式 (2.2) の発散をとることにより得られる圧力の Poisson 方程式から圧力場 P^n を求める．

2. 圧力場 P^n の値を用いて，Euler 方程式 (2.2) から $t = (n+1)\Delta t$ における速度場 $\boldsymbol{u}^{n+1}$ を求める．

3. 速度場 $\boldsymbol{u}^n$ の値を用いて，運動学的境界条件 (2.9) から $t = (n+1)\Delta t$ の波面変位 η を求める．

4. 波面形状に合わせて格子点を配置し直す．

上記の手順を繰り返し，流れ場の時間発展を計算する．

時間刻み幅は $\Delta t = 2 \times 10^{-4}$ とし，時刻 $t = 300$（1.5×10^6 ステップ）まで計算を行った．

4.1.2 計算格子

本研究では，自由表面の形状を精度よく計算するため，境界適合格子を用いた．計算開始時の格子の状態を図 1 に示す．これは格子点を x 方向に 19000 点，z 方向に 150 点配置した計算格子となっている．水平方向の格子点は初期の孤立波の位置より上流側の領域に集中させている（この領域での格子間隔は $\Delta x = 2.0 \times 10^{-2}$ で一定)．鉛直方向には底面と自由表面の付近に格子点を集中させた．また，波が上流端に到達すると上流端の境界条件を時間的に一定にできなくなるため，それ以前に計算を打ち切ることができるように計算領域を広く設定してある．

4.2 5th-order fKdV 方程式の数値解法

5th-order fKdV 方程式の空間離散化にはスペクトル法を用いた．また，時間積分には，4 次のルンゲクッタ法を用いた．スペクトル法を用いるため，計算領域の両端は周期境界条件とした．計算領域は $-768 \leq x \leq 768$ とした．Euler 方程式と同じく，$\Delta x = 0.02$（離散点は 76800 点）とし，時間刻み幅は $\Delta t = 5 \times 10^{-3}$ とした．また，切断波数は 2π とした．

4.3 パラメータ

本研究では $Bo = 0.15$ に固定して，Fr（流速）と h_0（物体の高さ）の値を変え，Euler 方程式と 5th-order fKdV 方程式の解の比較を行った．用いたパラメータの値を表 1 に示す．

表 1: 各パラメータの値

case	h1	h2	h3	h4
Fr	1.00	1.00	1.00	1.00
h_0	0.01	0.02	0.04	0.06

case	F5	F6	F7	F8	F9
Fr	0.90	0.95	1.05	1.10	1.15
h_0	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02

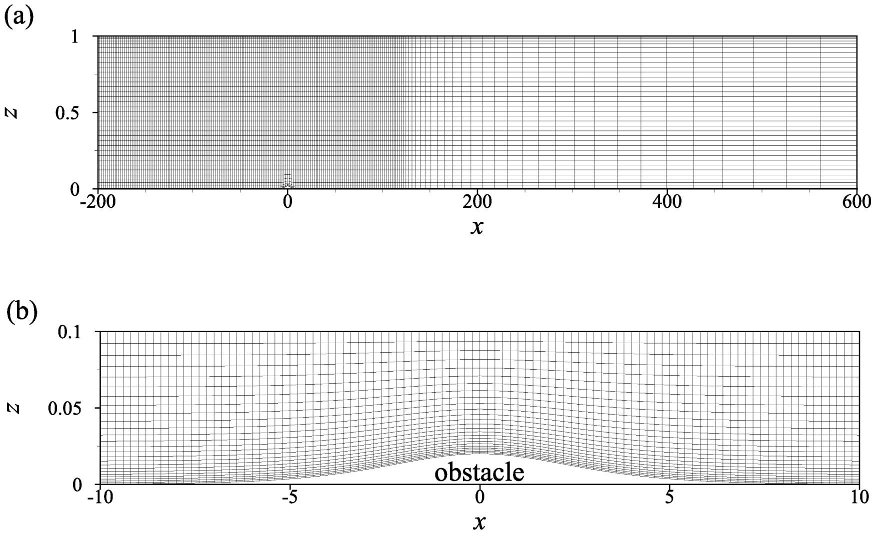

図 1: 数値計算に用いた格子．(a) 全計算領域．格子線は，水平方向は 100 本おき，鉛直方向は 4 本おきに書いている．(b) 底面物体付近の拡大図．格子線は，水平方向 10 本おきに書いている．

5 計算結果

5.1 発生する波の種類

まず，$Fr = 1.00, h_0 = 0.02$ の場合の，Euler 方程式による数値計算の結果を鳥瞰図として表したものを図 2 に示す．上流側 $(x < 0)$ に孤立波列が，下流側 $(x > 0)$ に変調クノイダル波が発生し

ていること，および，底面物体の下流側に窪み領域ができていることが確認できる．また，孤立波より上流側と窪み領域内に短波が発生している．

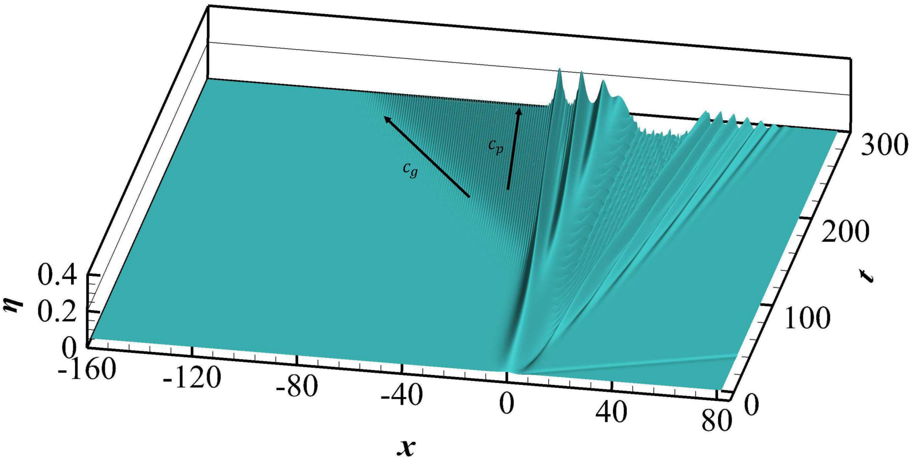

図 2: 自由表面変位 $\eta(x,t)$ の時間発展の鳥瞰図 (Euler 方程式，$Fr = 1.00, h_0 = 0.02$)．図中の c_p は短波の位相速度（及び孤立波の進行速度），c_g は短波の群速度の向きを表す．

孤立波から短波が放射される現象としては，表面張力が働いている場合に起こるソリトン放射が知られている．ソリトン放射によって発生する短波の位相速度は，孤立波の進行速度と等しいと予測されている [5]．計算結果から $Fr = 1.00, h_0 = 0.02$ の時のこれらの値を調べると，孤立波の進行速度は -0.099，短波の位相速度は -0.100 であり，ほぼ一致した [1]．よって，図 2 の短波はソリトン放射によるものであると考えられる．

5.2　底面物体高さ依存性

次に，Fr を 1.00 に固定して底面物体の高さ h_0 を変化させた場合の，$t = 300$ における波面の比較を図 3 に示す．この図より，h_0 が大きい場合ほど，孤立波，及び短波の振幅が大きくなっていることが分かる．また，h_0 が大きい方が，より上流側に孤立波及び短波が到達していることから，孤立波の進行速度及び短波の群速度が大きくなっている．

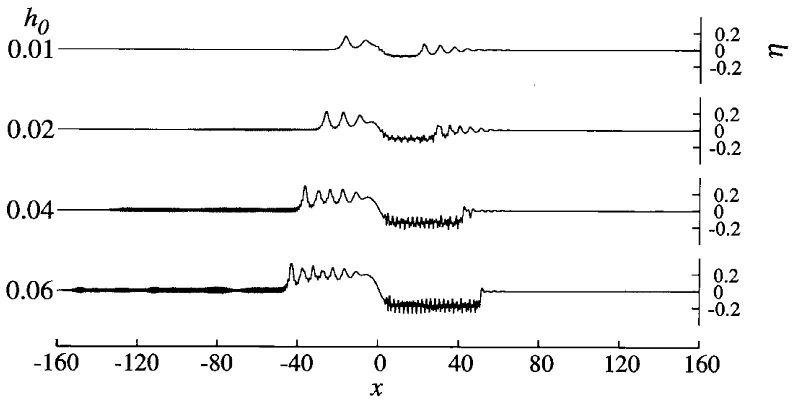

図 3: h_0 の値を変えた場合の自由表面変位 $\eta(x,t)$ の比較 (Euler 方程式，$Fr = 1.00, t = 300$).

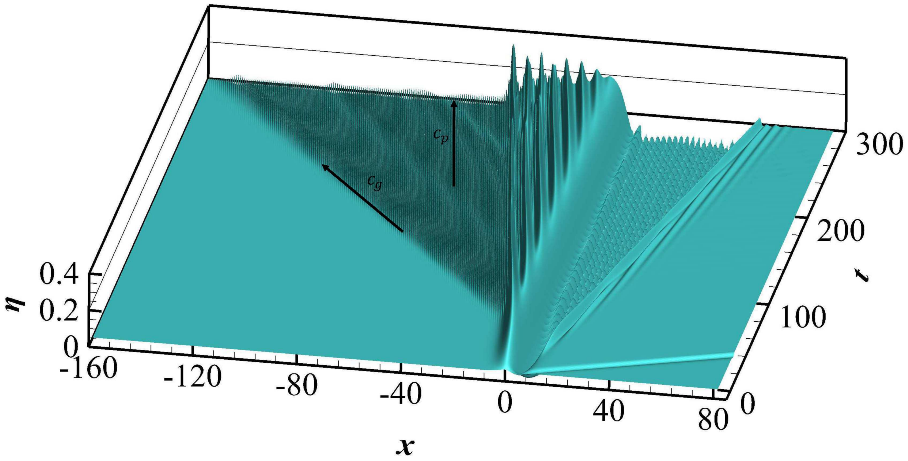

図 4: 自由表面変位 $\eta(x,t)$ の時間発展の鳥瞰図 (Euler 方程式，$Fr = 1.00, h_0 = 0.06$). 図中の c_p は短波の位相速度（及び孤立波の進行速度），c_g は短波の群速度の向きを表す.

図 4 は，最も h_0 が大きい ($= 0.06$) のときの鳥瞰図である．図 2 と同様に孤立波の進行速度 $\simeq$ 短波の位相速度であることから，$h_0 = 0.02$ のときのソリトン放射と同様の現象が起こっていることが分かる．また，図 2 に比べて孤立波の振幅が大きいため，その進行速度も大きく，それに合わせて短波の位相速度 $|c_p|$ が大きくなるため，次の図 5 でみるように短波の波数 k は大きく（波長は短く）なり，群速度 $|c_g|$ も若干大きくなる.

上記の短波の特性は，線形分散関係から説明することができる．Euler 方程式の線形分散関係は以下の式で表される.

$$\omega = k - \frac{1}{Fr}\sqrt{\left(k + Bok^3\right)\tanh k}, \tag{5.1}$$

この式から求まる位相速度 $c_p = \omega/k$ および群速度 $c_g = \partial\omega/\partial k$ と波数 k の関係を図 5 に示した．$c_p, c_g > 0$ のときは物体から下流へ伝播していることを表し，$c_p, c_g < 0$ のときは物体から上流へ

伝播していることを表す．同じ図中に底面物体の高さ h_0 を変化させた場合の計算結果から得られる，$t = 300$ での短波の c_p, c_g と波数 k の実測値を点で示した．この図から，ソリトン放射による短波の波数，位相速度および群速度が線形分散関係による理論値とほぼ一致していることが分かる．またこの図より，短波の位相速度（$\simeq$ 孤立波の進行速度）の絶対値が大きいほど，対応する波数の値が大きく，短波の群速度も大きくなることが分かる．このことも計算結果（図 2，図 4）と一致していることから，孤立波から放射された短波は線形分散関係を満たす線形波である．

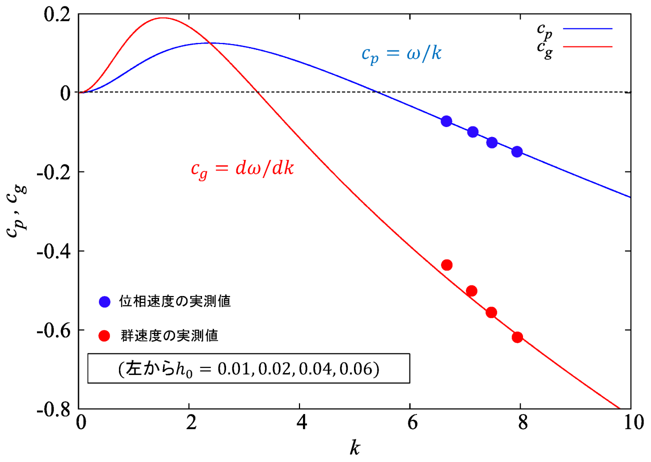

図 5: h_0 の値を変えた場合の，短波の波数と位相速度および群速度の関係.（線形分散関係から求まる理論式（線）および実測値（点）.）

5.3　フルード数依存性

続いて，h_0 を 0.02 に固定してフルード数 Fr を変化させた場合の，$t = 300$ における波面の比較を図 6 に示す．図 6 から分かるように，$0.95 \leq Fr \leq 1.10$ では，孤立波や短波の振幅が大きくなっている．これは共鳴条件 $Fr \approx 1$ を満たしているために共鳴が起こり，振幅の大きな波が発生するためである．

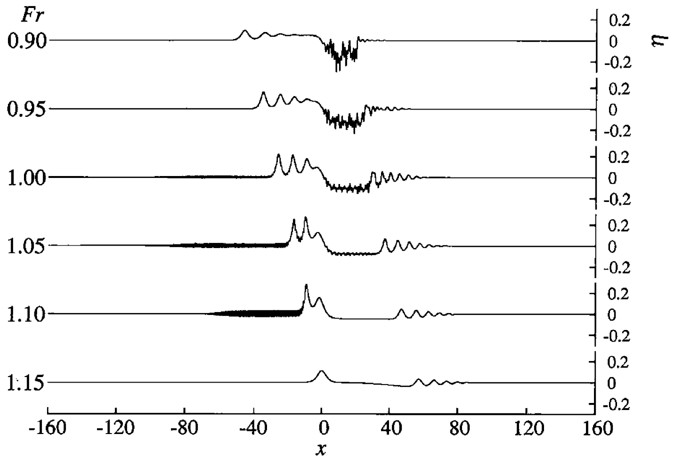

図 6: Fr の値を変えた場合の自由表面変位 $\eta(x,t)$ の比較 (Euler 方程式，$h_0 = 0.02, t = 300$).

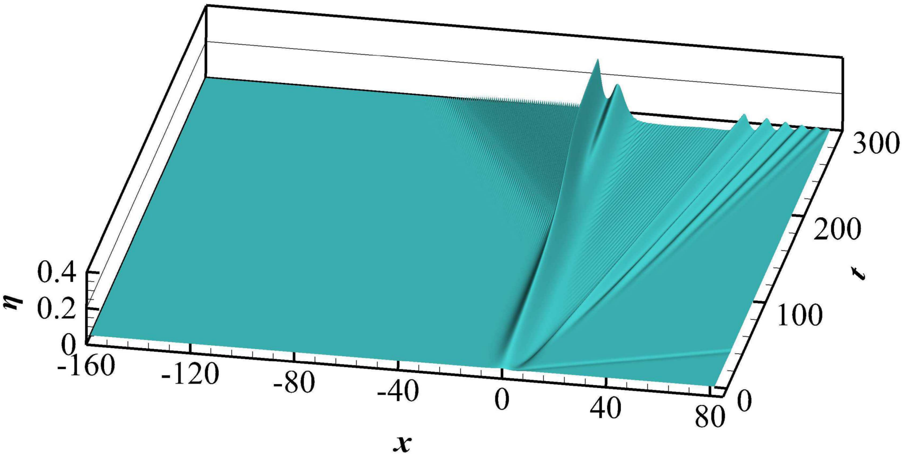

図 7: 自由表面変位 $\eta(x,t)$ の時間発展の鳥瞰図 (Euler 方程式，$Fr = 1.10, h_0 = 0.02$).

図 7 は $Fr = 1.10$ のときの鳥瞰図である．図 2，図 4 と同様に，孤立波の進行速度 $\simeq$ 短波の位相速度を満たしているが，孤立波の生成が遅いため，図 2 と比べ，短波の位相速度 $|c_p|$ が小さくなっている．ただし式 (5.1)，及び以下の図 8 でみるように，線形分散関係が $Fr = 1$ のときと $Fr \neq 1$ のときは異なるため，例えば $Fr = 1.10(> 1)$ のときは，$|c_p|$ が小さくなっても波数 k は大きくなる（波長は短くなる）．同時に，群速度 $|c_g|$ は若干小さくなる．

図 8 に，Fr を 1 から変化させたときの，式 (5.1) から求まる位相速度 $c_p = \omega/k$ および群速度 $c_g = \partial\omega/\partial k$ と波数 k の関係を示した．同じ図中にフルード数 Fr を変化させた場合の計算結果から得られる，$t = 300$ での短波の c_p, c_g と波数 k の実測値を点で示した．この図から，フルード数を変化させた場合でも短波は線形分散関係を満たしていることが分かった．

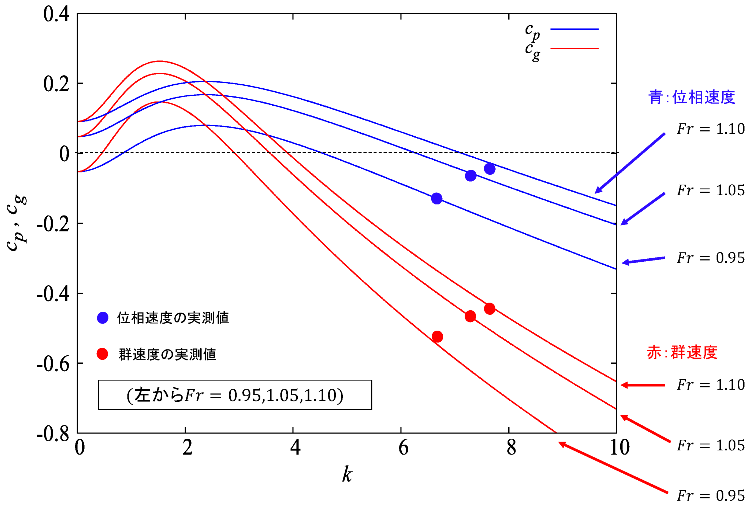

図 8: Fr の値を変えた場合の，短波の波数と位相速度および群速度の関係.（線形分散関係から求まる理論式（線）および実測値（点）.）

5.4　弱非線形理論

$Fr = 1.00, h_0 = 0.02$ の場合，及び $Fr = 1.00, h_0 = 0.06$ の場合の，5th-order fKdV 方程式による数値計算の結果を鳥瞰図として表したものを図 9，10 に示す．Euler 方程式の計算結果である図 2，4 と比較すると，上流側の孤立波列と短波，下流側の変調クノイダル波，および窪み領域とその内部の短波など，Euler 方程式の解と同様の特徴がみられる．このことから，弱非線形理論によって Euler 方程式の解を定性的にはよく再現できていることが分かる．また，孤立波に関しては，振幅や進行速度も概ねよく再現できている．しかし，短波の波長や群速度は Euler 方程式と 5th-order fKdV 方程式とで大きく異なった結果となった．

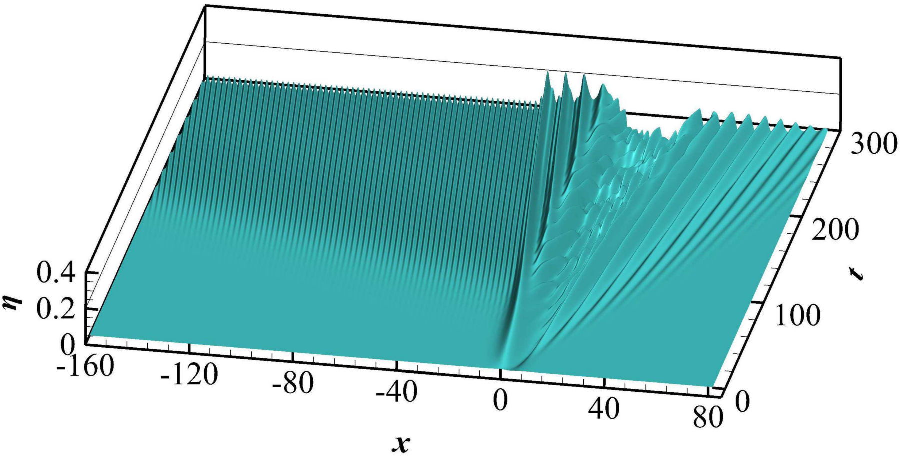

図 9: 自由表面変位 $\eta(x,t)$ の時間発展の鳥瞰図 (5th-order fKdV 方程式，$Fr = 1.00, h_0 = 0.02$).

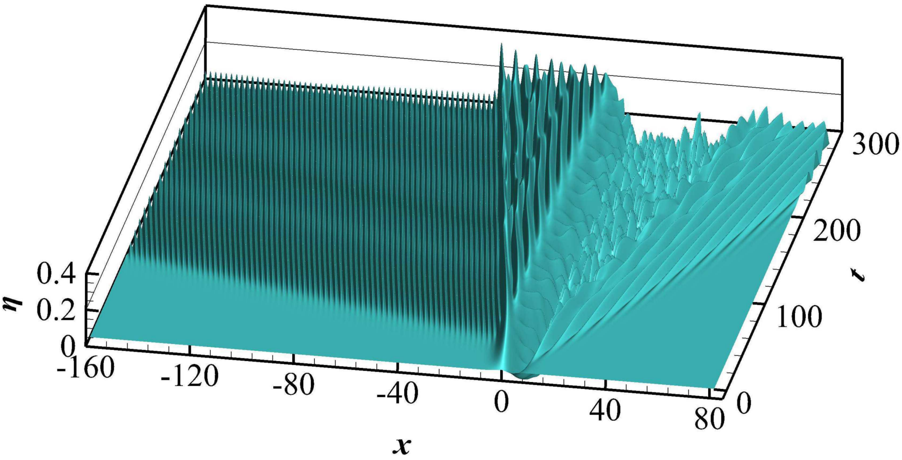

図 10: 自由表面変位 $\eta(x,t)$ の時間発展の鳥瞰図 (5th-order fKdV 方程式，$Fr = 1.00, h_0 = 0.06$).

5th-order fKdV 方程式の線形分散関係は，

$$\omega = k - \frac{1}{Fr}\left[k + \frac{1}{2}\left(Bo - \frac{1}{3}\right)k^3 + \frac{1}{90}k^5\right] \tag{5.2}$$

で表される．この式は，Euler 方程式の分散関係式（5.1）を $k=0$ まわりでテーラー展開し，高次の項を切り捨てた式と一致する．つまり，$k=0$ 付近から離れた高波数領域では Euler 方程式の良い近似でなくなる．これは，5th-order fKdV 方程式が，長波長近似のもとで成立することに対応している．

Euler 方程式と 5th-order fKdV 方程式の線形分散関係から求まる位相速度 $c_p = \omega/k$ および群速度 $c_g = \partial\omega/\partial k$ と波数 k の関係をグラフにしたものが図 11 である．図 11 から分かるように，Euler 方程式と 5th-order fKdV 方程式で孤立波の進行速度，すなわち短波の位相速度が同じでも，対応する波数および群速度の値は大きく異なってしまう．5th-order fKdV 方程式では短波の波長や群速度を正確に予測することができなかったのはこのためである．

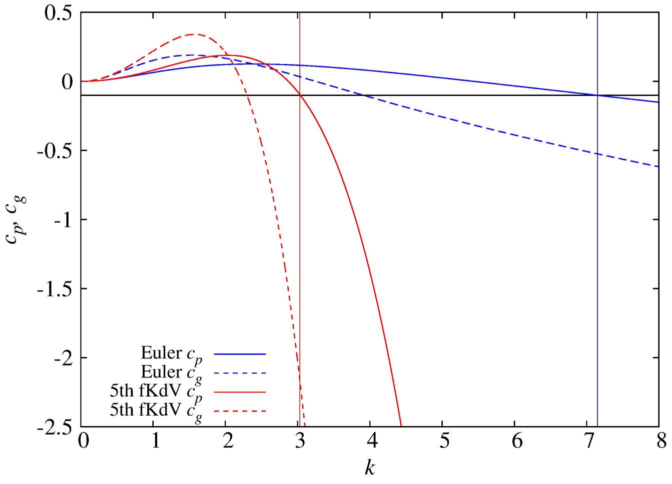

図 11: Euler 方程式と 5th-order fKdV 方程式のそれぞれにおける，短波の波数と位相速度および群速度の線形分散関係のグラフ．Euler 方程式の計算結果から求めた，孤立波の進行速度の実測値を黒線で示している．

6　結論

表面張力重力波の研究として，Euler 方程式の数値計算を行った．その結果，ソリトン放射によって孤立波から出る短波は線形であることが分かった．また，底面物体の高さが大きいほど，発生する孤立波の振幅および速度は大きく，それに従って短波の波数，群速度が大きくなることが確認できた．フルード数を変えた場合の計算も行ったところ，$Fr = 1$ 付近では共鳴が起こり，波の振幅が大きくなった．

また，5th-order fKdV 方程式の計算結果を Euler 方程式の解と比較した．それにより，長波長近似の弱非線形理論では孤立波を記述することができるが，短波長の波は正しく記述できないことが分かった．

参考文献

[1] M. Hirata, S. Okino & H. Hanazaki 2016 *J. Fluid Mech.*

[2] Zhu, Y. 1995 Resonant generation of nonlinear capillary-gravity waves. *Phys. Fluids.* **7**, 2294-2296.

[3] Grimshaw, R., Maleewong, M. & Asavanant, J. 2009 Stability of gravity-capillary waves generated by a moving pressure disturbance in water of finite depth. *Phys. Fluids.* **21**, 082101.

[4] Milewski, D. & Vanden-Broeck, J.-M. 1998 Time dependent gravity-capillary flows past an obstacle. *Wave Motion.* **29**, 63-79.

[5] Benilov, E.S., Grimshaw, R. & Kuznetsova, E.P. 1993 The generation of radiating waves in a singularly-perturbed Korteweg-de Vries equation. *Physica D.* **69**, 270-278.

[6] Kawamura, T., Takami, H. & Kuwahara, K. 1986 Computation of high Reynolds number flow around a circular cylinder with surface roughness. *Fluid Dyn. Res.* **1**, 145-162.

[7] 高見穎郎, 河村哲也 2004 「偏微分方程式の差分解法」, 東京大学出版会.