数理解析研究所講究録
第2036巻 2017年 45-58

Harmonic analysis on the space of p-adic unitary hermitian matrices, including dyadic case *

広中 由美子
(早稲田大学 教育・総合科学学術院)

p-進体上のユニタリ・エルミート行列の空間を，球関数を基に群の作用と共に解析することを目標とする．従来，小森靖氏との共同研究で，基礎体の剰余体標数が奇数 (non-dyadic) のときを主に扱って，論文 [HK1], [HK2] として発表したが，今回，剰余体標数が偶数 (dyadic) の場合を意識して検討し，基礎体での 2 の分岐度 $e = v_\pi(2)(\geq 0)$ を組み込む形で，non-dyadic も含む統一的な表示も得たのでそれを報告する．証明など詳細は，preprint [H4] を参照してください．

§1. 空間の設定，球関数の定義と dyadic の問題点など

p-進体 k の不分岐 2 次拡大 k' を決めて，エルミート性やユニタリ性は，この拡大に関して扱う．特に $a \in M_{mn}(k')$ の conjugate transpose を $a^* \in M_{nm}(k')$ と記す．また，π を k の素元とし，v_π で k の加法的付値を表す．

以下，m は 2 以上の自然数とし，j_m で，逆対角線上は 1，その他の成分は 0 である m 次行列を表す．考えるユニタリ群 G，ユニタリ・エルミート行列の空間 X と G の X への作用を次のように定める：

$$\begin{aligned} &G = U(j_m) = \{g \in GL_m(k') \mid g^* j_m g = j_m\}, \\ &X = \{x \in G \mid x^* = x,\ \Phi_{xj_m}(t) = \Phi_{j_m}(t)\}, \\ &g \cdot x = gxg^*, \quad (g \in G,\ x \in X). \end{aligned}$$

ここで $\Phi_y(t)$ は行列 y の特性多項式である． 空間 X は，k の代数的閉包 $\overline{k}$ 上では単一の $G(\overline{k})$-軌道であることを注意しておく．極大コンパクト開部分群として $K = G \cap GL_m(\mathcal{O}_{k'})$ をとると，上半三角行列からなるボレル部分群 B と共に岩澤分解 $G = KB = BK$ をみたす．

群のランクと基礎体 k での 2 の分岐度を表示するために，

$$n = \left[\frac{m}{2}\right], \quad e = v_\pi(2) \quad (v_\pi(\,)\text{ は } k \text{ の加法的付置}) \tag{1.1}$$

*この研究は，JSPS 科研費 (C):24540031 の補助を受けました．

とし，必要なら対応する群 G, B, K や空間 X に上下の添え字をつけて区別する，例えば $m=2n$ のとき，$G_n^{(ev)}$, $m=2n+1$ のとき，$X_n^{(od)}$ のように．なお，$G_n^{(ev)}$ のルート系は C_n 型，$G_n^{(od)}$ のそれは BC_n 型である．

k の単元 $\epsilon \in k$ を $\{1, \frac{1+\sqrt{\epsilon}}{2}\}$ が $\mathcal{O}_{k'}$ の $\mathcal{O}_k$-基底となるように決めておく．このとき $v_\pi(1-\epsilon) = 2e = v_\pi(4)$ である (cf. [Om, §64])．この基底をとれば，$e \geq 0$ について，統一的に扱える．[HK] では §2.1 までは $e \geq 0$ として考察したのでこの基底を用いたが，[HK2] では，始め方から non-dyadic と仮定したので，$\mathcal{O}_{k'}$ の $\mathcal{O}_k$-基底として $\{1, \sqrt{\epsilon}\}$ を採用していた．

この空間のカルタン分解，すなわち X の K-軌道分解がまず問題になる (§2 で扱う)．群 G の K-軌道分解や，エルミート行列の空間 $\mathcal{H}_m(k') = \{x \in GL_m(k') \mid x = x^*\}$ の $GL_m(\mathcal{O}_{k'})$-軌道分解は，剰余体標数に依らずに代表元がすべて対角型でとれることが知られていている．しかし，X の K-軌道分解に関しては，§2 の定理に述べるように，k が dyadic の場合には，対角型の元を含まない K-軌道が存在する．例えば $X \cap M_m(\mathcal{O}_{k'})$ は 剰余体標数が奇数であれば単一の K-軌道 $K \cdot 1_m$ であるが，dyadic の場合には複数の軌道に分かれ，$K \cdot 1_m$ 以外は非対角型の元からなる．$m=2n$ の場合には，[HK] で $K \backslash X$ の代表系までは，dyadic も込めて与えていたが，完全代表系であるかどうかは不明であった．$m=2n+1$ を扱った [HK2] では，初めから non-dyadic と仮定していた．いずれにせよ、一般のサイズ n では，$K \backslash X$ の完全代表系は，X 上の球関数の明示式を得て値が分離されることで確定する (cf. Theorem 2.1, Remark 3.9)．

X 上の球関数とは，X 上の左 K-不変な関数でヘッケ環 $\mathcal{H}(G,K)$ の作用で同時固有関数になるものを指す．ここで $\mathcal{H}(G,K)$ は G 上の両側 K-不変でコンパクト台の複素数値関数の全体で，convolution 積で可換環をなしている．一般に球関数の典型例は放物型部分群に関する相対不変式のポアソン変換として得られる．まず，$g \in G$ に対して $d_i(g)$ で g の右下 i 次ブロックの行列式を表すと，$d_i(x)$, $1 \leq i \leq n$, は X 上の B-相対不変式となり，対応する B の有理指標 ψ_i との関係は以下の通り：

$$d_i(p \cdot x) = \psi_i(p) d_i(x), \quad \psi_i(p) = N_{k'/k}(d_i(p)), \quad (x \in X,\ p \in B,\ 1 \leq i \leq n).$$

また，

$$X^{(op)} = \{x \in X \mid d_i(x) \neq 0,\ 1 \leq i \leq n\}$$

とおくと，$X^{(op)}(\overline{k})$ は Zariski open な $B(\overline{k})$-軌道となる．さて，$x \in X$ と $s \in \mathbb{C}^n$ について，次の積分を考えよう．

$$\omega(x;s) = \int_K |\mathbf{d}(k \cdot x)|^s \, dk, \quad |\mathbf{d}(y)|^s = \begin{cases} \prod_{i=1}^n |d_i(y)|^{s_i} & \text{if } y \in X^{op} \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \tag{1.2}$$

但し，$|\ |$ は k の絶対付値で dk は正規化した K 上の Haar 測度とする．また $\sharp(\mathcal{O}_k/(\pi)) = q$ で $|\pi| = q^{-1}$ とする．

このとき，(1.2) の右辺は $\mathrm{Re}(s_i) \geq 0,\ 1 \leq i \leq n$, で絶対収束し，全 $\mathbb{C}^n$ 平面に $q^{s_1}, \ldots, q^{s_n}$ の有理関数として延長され，X 上の左 K-不変な関数となる．我々は，記号 $\omega(x;s)$ をこの意味で使う．さらに $\omega(x;s)$ が $\mathcal{H}(G,K)$-同時固有関数であることが分かり，X 上の球関数となる．より詳しくは

$$f * \omega(x;s) = \lambda_s(f)\omega(x;s), \quad f \in \mathcal{H}(G,K),$$
$$\lambda_s(f) = \int_B f(p) \prod_{i=1}^{n} |\psi_i(p)|^{-s_i} \delta(p)dp,$$

但し，dp は正規化した B 上の左不変測度で，δ はその modulus 指標．

さて，G のワイル群 W は B の有理指標に作用するので，$\{s_i\}$ にも作用し，$\omega(x;s)$ が W に関して関数等式をみたすことが期待される．それを調べる為にも次の新しい変数を導入すると都合がよい：

$$s_i = -z_i + z_{i+1} - 1 + \frac{\pi\sqrt{-1}}{\log q}, \quad 1 \leq i \leq n-1,$$
$$s_n = \begin{cases} -z_n - \frac{1}{2} & \text{if } m = 2n \\ -z_n - 1 + \frac{\pi\sqrt{-1}}{2\log q} & \text{if } m = 2n+1. \end{cases} \tag{1.3}$$

そのとき $W = \langle S_n, \tau \rangle$ は $\{z_i\}$ に，S_n-部分は添え字の置換として，$\tau(z_1, \ldots, z_n) = (z_1, \ldots, z_{n-1}, -z_n)$ として作用する．上の関係 (1.3) を保って，$\omega(x;z) = \omega(x;s), \lambda_z = \lambda_s$ と表す．そのとき，λ_z は佐武同型

$$\lambda_z : \mathcal{H}(G,K) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[q^{\pm 2z_1}, \ldots, q^{\pm 2z_n}]^W (= \mathcal{R}_0, \text{say}). \tag{1.4}$$

を与える．

筆者は以前に，球関数をそのワイル群に関する関数等式と作用している群に関するデータから記述する一般的表示式を得ている ([H1], [H3, §2])．うまい関数等式が得られれば，それは球関数の明示式に結びつく．今回の場合，不分岐エルミート形式 の以前の結果 ([H1]) を用いて，剰余体標数に関係なく S_n に関する関数等式は得られる．一般に，概均質ベクトル空間のときと同様な議論によって単純ルートに関する関数等式の存在が保証されることがあるが ([H2], [H3, §3])，τ に関しては適用されない．そこで τ に関する関数等式は，$n = 1$ $(m = 2, 3)$ の場合の球関数を計算し，その関数等式を利用して一般サイズの τ に関する関数等式を求める必要がある．

dyadic の場合には，この小さいサイズの球関数の計算が困難で，[HK] ではこの段階 (§2.2) から non-dyadic $(e = 0)$ と仮定した．今回ノルム写像 $N_{k'/k}$ をうまく使うことで，$m = 2$ は無条件に解決したが，$m = 3$ のときには，さらに煩雑になるので，$e = 1$ の仮定を入れた．カルタン分解や球関数の明示式などで，奇数の m についての仮定はここに起因する．

$n=1$ の球関数の τ に関する関数等式 から一般サイズの τ に関する関数等式を得ることは 剰余体標数に依らず統一的にでき，球関数 $\omega(x;z)$ の関数等式，極や零点の情報を得たのち，$e(\geq 0)$ を組み込んだ形で一般サイズの球関数の明示式が得られる (Theorem 3.4 – Theorem 3.7)．§4 では，奇数の m については $e \leq 1$ という仮定を踏襲しつつ，Schwartz 空間 $\mathcal{S}(K\backslash X)$ から $\mathbb{C}(q^{z_1},\ldots,q^{z_n})$ への球 Fourier 変換を定義し，これを用いて $\mathcal{S}(K\backslash X)$ のヘッケ環加群としての構造を定め，Plancherel 測度を与える．剰余体標数に依らず $\sharp(G\backslash X)=2$ (§2) であるので，X 上の G-不変測度 dx の正規化は，$e(\geq 0)$ を埋め込んだ形でうまくなされる (Lemma 4.3)．その結果 Plancherel 測度 $d\mu(z)$ 自体は剰余体標数には依らず，m の偶奇だけで定まる．

§2. X の K-軌道と G-軌道

$m=2n$ または $2n+1$ とし，$X=X_n$, $G=G_n$, $K=K_n$ と略記する．

カルタン分解の parameter になる集合を与えておく：

$$\begin{aligned}
&\Lambda_n=\{\lambda\in\mathbb{Z}^n \mid \lambda_1\geq\lambda_2\geq\cdots\geq\lambda_n\},\\
&\widetilde{\Lambda_n^+}=\{\lambda\in\Lambda_n \mid \lambda_n\geq -e\},\quad \Lambda_n^+=\{\lambda\in\Lambda_n \mid \lambda_n\geq 0\}.
\end{aligned}\tag{2.1}$$

もちろん $e=0$ ならば $\Lambda_n^+=\widetilde{\Lambda_n^+}$ である．さて，$\lambda\in\widetilde{\Lambda_n^+}$ が $\lambda_r\geq 0>\lambda_{r+1}$ をみたすとして，次の行列を定める:

$$x_\lambda^{(ev)}=Diag(\pi^{\lambda_1},\ldots,\pi^{\lambda_r},y_\lambda^{(ev)},\pi^{-\lambda_r},\ldots,\pi^{-\lambda_1})\in X_n^{(ev)},$$

$$y_\lambda^{(ev)}=\begin{cases}\emptyset & \text{if } r=n\\ \begin{pmatrix}\pi^{\lambda_{r+1}}(1-\epsilon) & & & & & -\sqrt{\epsilon}\\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & \pi^{\lambda_n}(1-\epsilon) & -\sqrt{\epsilon} & & \\ & & \sqrt{\epsilon} & \pi^{-\lambda_n} & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ \sqrt{\epsilon} & & & & & \pi^{-\lambda_{r+1}}\end{pmatrix} & \text{if } r<n;\end{cases}$$

$$x_\lambda^{(od)}=Diag(\pi^{\lambda_1},\ldots,\pi^{\lambda_r},y_\lambda^{(od)},\pi^{-\lambda_r},\ldots,\pi^{-\lambda_1})\in X_n^{(od)},$$

$$y_\lambda^{(od)} = \begin{cases} 1 & \text{if } r = n \\ \begin{pmatrix} \pi^{\lambda_{r+1}}(1-\epsilon) & & & & & & -\sqrt{\epsilon} \\ & \ddots & & & & \iddots & \\ & & \pi^{\lambda_n}(1-\epsilon) & & -\sqrt{\epsilon} & & \\ & & & 1 & & & \\ & & \sqrt{\epsilon} & & \pi^{-\lambda_n} & & \\ & \iddots & & & & \ddots & \\ \sqrt{\epsilon} & & & & & & \pi^{-\lambda_{r+1}} \end{pmatrix} & \text{if } r < n. \end{cases}$$

ここで，もし $r=0$ ならば $x_\lambda = y_\lambda$ と解釈し，誤解の恐れがなければ添え字を省いて簡潔に x_λ や y_λ と表す． 非対角型の y_λ は $M_{m-2r}(\mathcal{O}_{k'})$ の元で，$e>0$ かつ $\lambda \in \widetilde{\Lambda_n^+} \backslash \Lambda_n^+$ についてだけ現れる．

Theorem 2.1 $m=2n$ または $2n+1$，$e = v_\pi(2) \geq 0$ とする．
(1) 写像 $\widetilde{\Lambda_n^+} \longrightarrow K\backslash X$, $\lambda \longmapsto K \cdot x_\lambda$ は全射であり，$K\backslash X$ の代表は $\left\{ x_\lambda \;\middle|\; \lambda \in \widetilde{\Lambda_n^+} \right\}$ からとれる．
(2) m が偶数，$m=3$ または $e=1$ のときは，$\left\{ x_\lambda \;\middle|\; \lambda \in \widetilde{\Lambda_n^+} \right\}$ は $K\backslash X$ の完全代表系をなす．
(3) X はちょうど 2 つの G-軌道をもち，それは $x_0 = 1_m$ と $x_1 = Diag(\pi, 1_{m-2}, \pi^{-1})$ で代表される．$\lambda \in \widetilde{\Lambda_n^+}$ について，$x_\lambda \in G \cdot 1_m$ は $|\lambda| = \sum_{i=1}^n \lambda_i$ が偶数であることに同値である．

証明について：(1) は，$m=2n$ の場合は [HK, §1] で与え，$m=2n+1$ で $e=0$ の場合は [HK2, §1] で与えた．奇数サイズの場合に，計算は煩雑になるが，今回の基底を使い，適当な K の元を作用させて求める形に整理することを $e \geq 0$ で統一的にできる．そのときに次の性質は有用である：

$$x \in X \cap M_m(\mathcal{O}_{k'}) \text{ が } x \equiv j_m \,(\mathrm{mod}(\pi)) \text{ ならば，} K \cdot x \text{ は対角型の元を含まない．} \tag{2.2}$$

一方，不分岐エルミート行列に関しては次が知られている ([Ja])：

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_m(k') &= \bigsqcup_{\mu \in \Lambda_m} GL_m(\mathcal{O}_{k'}) \cdot \pi^\mu \qquad \left(\pi^\mu = Diag(\pi^{\mu_1}, \ldots, \pi^{\mu_m})\right) \\ &= GL_m(k') \cdot 1_m \sqcup GL_m(k') \cdot \pi^{(1,0,\ldots,0)}, \end{aligned}$$

$$\pi^\mu \in GL_m(k') \cdot 1_m \Longleftrightarrow |\mu| \text{ is even.}$$

従って，Λ_n^+ の元はそれぞれ別の K-軌道 ($\subset X$) を与えることが分かり，$e=0$ のときは，これで完全性が分かる．$e>0$ のときは，上の (2.2) も合わせると，$n=1$ のときは，$\widetilde{\Lambda_1^+}$ の元ごとに別の K-軌道を与えることが分かる．dyadic で一般のサイズ n に関しては，球関数の明示式により x_λ ごとに異なる値をとることが分かり，$\left\{x_\lambda \;\middle|\; \lambda \in \widetilde{\Lambda_n^+}\right\}$ が $K\backslash X$ の完全代表系であることが帰結する (cf. Theorem 3.7, Remark 3.9).

(3) の G-軌道に関しては，剰余体標数に関わらずに同じ方法で示せる ($m=2n$ のときは [HK] で決着済み).

§3. 球関数の関数等式と明示式

球関数の定義 (1.2) を見ると，この球関数がサイズ n の不分岐エルミート形式の球関数と密接な関係をもつことが分かり，後者の結果は剰余体標数に依存しなかったので，我々は次を得る．

Proposition 3.1 $m=2n$ または $2n+1$，$e=v_\pi(2)\geq 0$ とする．

$$G_1(z)=\prod_{1\leq i<j\leq n}\frac{1+q^{z_i+z_j}}{1-q^{z_i-z_j-1}}$$

について，$G_1(z)\cdot\omega(x;z)$ は S_n-不変である．

τ に関する関数等式を得るために，まず $n=1$ の球関数を明示的に求める必要がある．今回，ノルム写像 $N_{k'/k}$ をうまく使うことにより，

$$vol(\{h\in K_1 \mid v_\pi(d_1(h\cdot x_\lambda))=r\}),\quad r\in\mathbb{Z}$$

が計算できて，$n=1$ のときに，§2 で与えた代表系での球関数の明示式を得る，ここで K_1 は 先に決めた G_1 の極大コンパクト開部分群であり，K_1 の元を明示的に表示することも上の量の計算には必要である．$m=2$ では $e\geq 0$ について統一的な証明を与えた．$m=3$ の場合の計算が非常に煩雑で，dyadic では $e=1$ と仮定した．一般の $e(>0)$ でもこの形であろうと期待できるので，表示式は e で記述している．後半の Theorem 3.4 – Theorem 3.7 の証明には，具体的な e の値は使わないので，もし Proposition 3.2 の式 (3.1) が $e(>1)$ で示されたら，奇数サイズの場合にもその e でこれらの定理が成り立つことになる．

Proposition 3.2 ($m=2$, $n=1$) 任意の $\lambda\in\widetilde{\Lambda_1^+}$ について

$$\omega(x_\lambda;z)=\frac{q^{-\frac{\lambda}{2}}q^{ez}}{1+q^{-1}}\left(\frac{q^{-(\lambda+e)z}(1-q^{2z-1})}{1-q^{2z}}+\frac{q^{(\lambda+e)z}(1-q^{-2z-1})}{1-q^{-2z}}\right).$$

従って，任意の $x\in X_1^{(ev)}$ について，次が成立する：

$$q^{-ez}\omega(x;z)\in\mathbb{C}[q^z+q^{-z}],\quad \omega(x;z)=q^{2ez}\,\omega(x;-z).$$

Proposition 3.3 $(m=3,\ n=1)$ $e\leq 1$ と仮定する．任意の $\lambda\in\widetilde{\Lambda_1^+}$ について

$$\omega(x_\lambda;z)=\frac{\sqrt{-1}^{\lambda}q^{-\lambda}q^{ez}(1-q^{-1+2z})}{(1+q^{-3})(1+q^{2z})}\times\left(\frac{q^{-(\lambda+e)z}(1+q^{-2+2z})}{1-q^{2z}}+\frac{q^{(\lambda+e)z}(1+q^{-2-2z})}{1-q^{-2z}}\right).$$

従って，任意の $x\in X_1^{(od)}$ について次が成立する：

$$\frac{q^{-ez}(1+q^{2z})}{1-q^{-1+2z}}\cdot\omega(x;z)\in\mathbb{C}[q^z+q^{-z}],\quad \omega(x;z)=q^{2ez}\frac{1-q^{-1+2z}}{q^{2z}-q^{-1}}\times\omega(x;-z). \tag{3.1}$$

$n=1$ での τ の関数等式を利用して一般サイズの τ に関する関数等式を求めることは，剰余体標数に依らず，non-dyadic のときと同じ方法で e を組み込む形で統一的に証明される．

Theorem 3.4 m が奇数のときは $e\leq 1$ と仮定する．一般のサイズ n の球関数 $\omega(x;z)$ は τ について次の関数等式をみたす：

$$\omega(x;z)=q^{2ez_n}\begin{pmatrix}1 & \mathit{if}\ m=2n\\ \dfrac{1-q^{-1+2z_n}}{q^{2z_n}-q^{-1}} & \mathit{if}\ m=2n+1\end{pmatrix}\times\omega(x;\tau(z)),$$

但し $\tau(z)=(z_1,\ldots,z_{n-1},-z_n)$.

次の２つの定理で，一般のサイズでのワイル群 W の元に関する球関数の関数等式と，球関数にかけて W-不変で正則とするための関数 $G(z)$ を与える．後者からは球関数の極と零点に関する情報が読み取れる．これらの証明は Propsition 3.1 と Theorem 3.4 を基に，剰余体標数に依らず統一的になされる．定理の記述のために，ルート系に関する記号を導入する．

$$\Sigma=\{\pm e_i\pm e_j,\ 2e_i \mid 1\leq i,j\leq n,\ i\neq j\},\quad \Sigma^+=\Sigma_s^+\cup\Sigma_\ell^+,$$
$$\Sigma_s^+=\{e_i+e_j,\ e_i-e_j \mid 1\leq i<j\leq n\},\quad \Sigma_\ell^+=\{2e_i \mid 1\leq i\leq n\}$$

ここで e_i, $1\leq i\leq n$, は $\mathbb{Z}^n$ の i 次単位ベクトルであり，Σ は C_n 型のルート系に相当し，その正ルートを長短で分けた集合を導入した．従って Σ は $G_n^{(ev)}$ のルートの全体で，$\Sigma\cup\{e_i \mid 1\leq i\leq n\}$ が $G_n^{(od)}$ のルート全体となる．次のペアリングは，Σ 上で W-不変である．

$$\mathbb{Z}^n\times\mathbb{C}^n\longrightarrow\mathbb{C},\ (t,z)\longmapsto\langle t,\,z\rangle=\sum_{i=1}^n t_iz_i,$$
$$\langle\alpha,\,z\rangle=\langle\sigma(\alpha),\,\sigma(z)\rangle,\quad (\alpha\in\Sigma,\ z\in\mathbb{C}^n,\ \sigma\in W).$$

Theorem 3.5 m が奇数のときは $e \le 1$ と仮定する．一般のサイズ n について，球関数は ワイル群の元について次の関数等式をみたす：

$$\omega(x;z) = \Gamma_\sigma^{(e)}(z) \cdot \omega(x;\sigma(z)), \quad \sigma \in W,$$

但し

$$\Gamma_\sigma^{(e)}(z) = \prod_{\alpha \in \Sigma^+(\sigma)} \gamma_\alpha^{(e)}(z), \quad \Sigma^+(\sigma) = \left\{\alpha \in \Sigma^+ \;\middle|\; -\sigma(\alpha) \in \Sigma^+\right\},$$

$$\gamma_\alpha^{(e)}(z) = \begin{cases} \dfrac{1-q^{-1+\langle\alpha,\,z\rangle}}{q^{\langle\alpha,\,z\rangle}-q^{-1}} & \mathit{if}\ \alpha \in \Sigma_s^+ \\ q^{e\langle\alpha,\,z\rangle} & \mathit{if}\ \alpha \in \Sigma_\ell^+,\ m = 2n \\ \dfrac{q^{e\langle\alpha,\,z\rangle}(1-q^{-1+\langle\alpha,\,z\rangle})}{q^{\langle\alpha,\,z\rangle}-q^{-1}} & \mathit{if}\ \alpha \in \Sigma_\ell^+,\ m = 2n+1. \end{cases}$$

Theorem 3.6 m が奇数のときは $e \le 1$ と仮定する．次の $G(z)$ の右辺で α は，$m = 2n$ のときは Σ_s^+ を，$m = 2n+1$ のときは Σ^+ を渡るとして，

$$G(z) = \prod_\alpha \frac{1+q^{\langle\alpha,\,z\rangle}}{1-q^{-1+\langle\alpha,\,z\rangle}}, \quad \langle e,\,z\rangle = e(z_1 + \cdots + z_n),$$

と定めると，$q^{-\langle e,\,z\rangle}G(z)\cdot\omega(x;z)$ は $\mathbb{C}^n$ 上で正則で W-不変である．従って，$\mathbb{C}[q^{\pm z_1},\ldots,q^{\pm z_n}]^W$ の元となる．特に *Theorem 3.5* における $\sigma \in W$ のガンマ因子は 次式で与えられる：

$$\Gamma_\sigma^{(e)}(z) = \frac{q^{\langle e,\,z\rangle}}{G(z)} \cdot \frac{G(\sigma(z))}{q^{\langle e,\,\sigma(z)\rangle}}, \quad \sigma \in W. \tag{3.2}$$

球関数 $\omega(x;z)$ の関数等式 (Thereom 3.6) が良い形に定式化されたので，B-軌道ごとの細分した球関数の関数等式から細分した球関数の表示式を得るために，以前に与えた一般的な方法 (cf. [H1, §1], [H3, §2]) をうまく適用することができ，それを用いて $\omega(x;z)$ の明示式を得ることができる．それは $e=0$ のときの方法と同様であり ([HK], [HK2])，関数等式は e に依存するが，その値に立ち入る必要はない．明示式自体も，当然 e が組み込まれた形で，次のように得られる．そこには特殊な対称多項式が現れるが，それについての説明は定理のあとの Remark で述べる．

Theorem 3.7 m が奇数のときは $e \le 1$ と仮定する．任意の $\lambda \in \widetilde{\Lambda_n^+}$ について 次の明示式を得る：

$$\omega(x_\lambda;z) \;=\; c_n\, q^{\langle\lambda,\,z_0\rangle} \cdot \frac{q^{\langle e,\,z\rangle}}{G(z)} \cdot Q_{\lambda+e}(z;\{t\}),$$

但し，$\lambda+e=(\lambda_1+e,\dots,\lambda_n+e)\in\Lambda_n^+$ で，m の偶奇で異なる $G(z)$ は *Theorem 3.6* で与えられ，$z_0\in\mathbb{C}^n$ は s-変数での $\mathbf{0}\in\mathbb{C}^n$ に対応する z-変数の値であり，

$$z_{0,i}=\begin{cases} -(n-i+\frac{1}{2})+(n-i)\frac{\pi\sqrt{-1}}{\log q} & \textit{if } m=2n \\ -(n-i+1)+(n-i+\frac{1}{2})\frac{\pi\sqrt{-1}}{\log q} & \textit{if } m=2n+1 \end{cases} \quad (1\le i\le n),$$

$$c_n=\begin{cases} \dfrac{(1-q^{-2})^n}{w_m(-q^{-1})} & \textit{if } m=2n \\ \dfrac{(1+q^{-1})(1-q^{-2})^n}{w_m(-q^{-1})} & \textit{if } m=2n+1, \end{cases} \qquad w_m(t)=\prod_{i=1}^{m}(1-t^i),$$

$$Q_\mu(z;\{t\})=\sum_{\sigma\in W}\sigma\left(q^{-\langle\mu,z\rangle}c(z;\{t\})\right),\quad c(z;\{t\})=\prod_{\alpha\in\Sigma^+}\frac{1-t_\alpha q^{\langle\alpha,z\rangle}}{1-q^{\langle\alpha,z\rangle}},$$

$$\{t\}=\{t_\alpha\}\quad \textit{with } t_\alpha=\begin{cases} -q^{-1} & \textit{if } \alpha\in\Sigma_s^+ \\ q^{-1} & \textit{if } \alpha\in\Sigma_\ell^+,\ m=2n \\ -q^{-2} & \textit{if } \alpha\in\Sigma_\ell^+,\ m=2n+1. \end{cases} \tag{3.3}$$

Remark 3.8 上の明示式は，上の記号のリストに与えたように，m の偶奇によって c_n，z_0，$G(z)$ や特殊値 $\{t\}$ が異なる．一方，剰余体標数 や 2 の分岐度 $e=v_\pi(2)$ に関わるのは，関数等式から現れる積因子 $q^{\langle e,z\rangle}$ と 2 か所での λ のシフト $\lambda+e$ だけである．このシフトにより $\lambda+e\in\Lambda_n^+$ となる．もちろん $e=0$ とすれば，以前の結果に一致している．

Remark 3.9 Theorem 3.6 により，$\omega(x_\lambda;z)$ の主要部分 $Q_{\lambda+e}(z;\{t\})$ が $\mathcal{R}=\mathbb{C}[q^{\pm z_1},\dots,q^{\pm z_n}]^W$ に含まれることが分かる．この関数は C_n 型の Hall-Littlewood 多項式 $P_{\lambda+e}(z;\{t\})$ と次のような密接な関係がある (cf. [M2])：

$$P_\mu(z;\{t\})=\frac{1}{W_\mu(\{t\})}\cdot Q_\mu(z;\{t\}),\quad \mu\in\Lambda_n^+, \tag{3.4}$$

但し，$W_\mu(\{t\})$ は μ を固定する W の部分群 W_μ の Poincaré 多項式であり，我々の $\{t\}=\{t_\alpha\}$ の取り方では具体的に以下のように与えられる．

$$W_\mu(\{t\})=\frac{\widetilde{w}_\mu(-q^{-1})}{(1+q^{-1})^{m'}},\qquad m'=\left[\frac{m+1}{2}\right],$$

$$\widetilde{w}_\mu(t)=\begin{cases} w_{n_0}(t)^2\prod_{\ell\ge1}w_{n_\ell}(t) & \text{if } n=2m \\ w_{n_0+1}(t)w_{n_0}(t)\prod_{\ell\ge1}w_{n_\ell}(t) & \text{if } n=2m+1,\ n_0>0 \\ \prod_{\ell\ge1}w_{n_\ell}(t) & \text{if } n=2m+1,\ n_0=0, \end{cases} \tag{3.5}$$

但し $n_\ell=n_\ell(\mu)=\sharp\{i\mid \mu_i=\ell\}$ とする．$\mathcal{R}$ の部分集合 $\{P_\mu(z;\{t\})\mid\mu\in\Lambda_n^+\}$ は，それぞれの $t_\alpha\in\mathbb{R},|t_\alpha|<1$ について $\mathcal{R}$ の直交 $\mathbb{C}$-基底となり，$P_0(z;\{t\})=1$ であるこ

とが知られている (cf. [M2], [HK, Proposition B.3]). 次の §4 で, $P_\mu(z;\{t\})$ たちが直交し $\mathcal{S}(K\backslash X)$ 上の Plancherel 公式に結びつくような $\mathcal{R}$ の内積を具体的に与える.

明示式は $P_\mu(z;\{t\})$ を用いれば次のように記述できる：

$$\omega(x_\lambda;z)=\frac{(1-q^{-1})^n}{w_m(-q^{-1})}\cdot\frac{q^{\langle e,z\rangle}}{G(z)}\cdot q^{\langle\lambda,z_0\rangle}\,\widetilde{w}_{\lambda+e}(-q^{-1})\cdot P_{\lambda+e}(z;\{t\}),\quad(\lambda\in\widetilde{\Lambda_n^+}).\tag{3.6}$$

ともかく $\omega(x_\lambda;z)$ は, generic な z については, それぞれの $\lambda\in\widetilde{\Lambda_n^+}$ で異なる値をとることが分かり, 従って $x_\lambda\in X$ は異なる K-軌道を代表することが帰結する. よって, X のカルタン分解が完成する (Theorem 2.1-(2)). §3 の初めにも述べたように Proposition 3.3 の式 (3.1) が $e(>1)$ で成り立てば, 奇数サイズの明示式も同じ e で成立し, 従ってカルタン分解もその e で完成することになる.

§4. $\mathcal{S}(K\backslash X)$ の構造

m が奇数のときは $e\le 1$ との仮定を踏襲する. まず, X 上の Schwartz 関数の空間

$$\mathcal{S}(K\backslash X)=\{\varphi:X\longrightarrow\mathbb{C}\mid\text{left }K\text{-invariant, compactly supported}\}$$

を導入し, この空間の $\mathcal{H}(G,K)$-加群としての構造を決定し, Plancherel 公式を与える. そのために, 球関数を核関数とする積分変換 (球 Fourier 変換) を考えるが, その前に §3 で考えた球関数を $x_{(-e)}$ での値を基に正則関数になるように調整しておく.

$$\Psi(x;z)=\omega(x;z)/\omega(x_{(-e)};z)\in\mathcal{R}=\mathbb{C}[q^{\pm z_1},\dots,q^{\pm z_n}]^W\tag{4.1}$$

と定めると, $\mathcal{H}(G,K)$ の作用に関して $\omega(x;z)$ と同じ同時性を持つ球関数で以下をみたす.

$$f*\Psi(x;z)=\lambda_z(f)\Psi(x;z),\quad(f\in\mathcal{H}(G,K)),\tag{4.2}$$

$$\lambda_z:\mathcal{H}(G,K)\xrightarrow{\sim}\mathcal{R}_0=\mathbb{C}[q^{\pm 2z_1},\dots,q^{\pm 2z_n}]^W,\quad(\text{cf.}(1.4)),$$

$$\Psi(x_\lambda;z)=q^{\langle\lambda+e,z_0\rangle}\frac{\widetilde{w}_{\lambda+e}(-q^{-1})}{\widetilde{w}_{\mathbf{0}}(-q^{-1})}\cdot P_{\lambda+e}(z;\{t\}),\quad(\lambda\in\widetilde{\Lambda_n^+}).\tag{4.3}$$

ここで, dyadic (i.e., $e=v_\pi(2)>0$) の時の $\Psi(x_\lambda;z)$ は, 剰余体標数が奇数 (non-dyadic) のときの $\Psi(x_{\lambda+e};z)$ に一致している. 従って, この節の結果は non-dyadic の場合 ([HK, §4] or [HK2, §4]) と並行したものとなる. X 上の G-不変測度の正規化には e が組み込まれるが, Plancherel 測度自体は e に依らない. もちろん $e=0$ とすれば以前の non-dyadic の結果が再現される.

$\mathcal{S}(K\backslash X)$ 上の球 Fourier 変換を次のように与える：

$$\begin{array}{rccl}F: & \mathcal{S}(K\backslash X) & \longrightarrow & \mathcal{R}\\ & \varphi & \longmapsto & F(\varphi)(z)=\int_X\varphi(x)\Psi(x;z)dx,\end{array}\tag{4.4}$$

ここで，dx は X 上の G-不変測度であるが，その正規化は後の Lemma 4.3 で定める．ヘッケ環 $\mathcal{H}(G,K)$ は，$\mathcal{S}(K\backslash X)$ には convolution 積で，$\mathcal{R}$ には佐武同型 λ_z を通して作用する．そのとき，球 Fourier 変換 F とヘッケ環の作用は次のような関係を持つ．

$$F(f*\varphi)(z)=\lambda_z(f)\varphi(z),\quad (f\in\mathcal{H}(G,K),\ \varphi\in\mathcal{S}(K\backslash X)). \tag{4.5}$$

Schwartz 空間 $\mathcal{S}(K\backslash X)$ は $K\cdot x_\lambda$ の特性関数 ch_λ, $\lambda\in\widetilde{\Lambda_n^+}$ で張られていて，そこでの値は

$$F(ch_\lambda)(z)=q^{\langle\lambda+e,\,z_0\rangle}\frac{\widetilde{w}_{\lambda+e}(-q^{-1})}{\widetilde{w}_0(-q^{-1})}\cdot v(K\cdot x_\lambda)\cdot P_{\lambda+e}(z;\{t\}), \tag{4.6}$$

となる，但し，$v(K\cdot x_\lambda)$ は $K\cdot x_\lambda$ の dx で測った体積である．集合 $\{P_\mu(z;\{t\})\mid\mu\in\Lambda_n^+\}$ は $\mathcal{R}$ の $\mathbb{C}$-基底をなすので，F は全単射である．よって次の定理を得る．

Theorem 4.1 m が奇数のときは $e\le 1$ と仮定する．球 *Fourier* 変換 F により次の $\mathcal{H}(G,K)$-加群として同型を得る：

$$\mathcal{S}(K\backslash X)\xrightarrow{\sim}\mathbb{C}[q^{\pm z_1},\ldots,q^{\pm z_n}]^W(=\mathcal{R}),$$

但し，$\mathcal{R}$ は λ_z を通して $\mathcal{H}(G,K)$-加群とみなす．特に $\mathcal{S}(K\backslash X)$ は，階数 2^n の自由 $\mathcal{H}(G,K)$-加群となる．

X 上の球関数は (4.2) のように，佐武同型 λ_z を通してある $z\in\mathbb{C}^n$ に関連づけられる．上の定理から，同じ z に対応する球関数はベクトル空間として 2^n 次元であり，$\omega(x;z)$ から作った $\Psi(x;z)$ を利用して次のような基底がとれることが分かる．

Corollary 4.2 m が奇数のときは $e\le 1$ と仮定する．X 上の任意の球関数は，佐武同型 λ_z を通してある $z\in\left(\mathbb{C}/\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\log q}\mathbb{Z}\right)^n/W$ に対応する．z に対応する球関数たちの $\mathbb{C}$-基底として集合 $\left\{\Psi(x;z+u)\,\middle|\,u\in\{0,\frac{\pi\sqrt{-1}}{\log q}\}^n\right\}$ がとれる．

$\mathcal{S}(K\backslash X)$ 上の Plancherel 公式を与える準備をする．Theorem 3.7 と Remark 3.9 で導入した記号 $c(z;\{t\})$, $P_\mu(z;\{t\})$ と $\widetilde{w}_\mu(-q^{-1})$ を使う．これらは剰余体標数には依らず, m の偶奇で決まっていた．$\mathcal{R}$ 上で次の内積を考える：

$$\langle P,\,Q\rangle_{\mathcal{R}}=\int_{\mathfrak{a}^*}P(z)\overline{Q(z)}d\mu(z),\quad (P,Q\in\mathcal{R}), \tag{4.7}$$

ここで，

$$\mathfrak{a}^*=\left\{\sqrt{-1}\left(\mathbb{R}\Big/\frac{2\pi}{\log q}\mathbb{Z}\right)\right\}^n,$$

$$d\mu(z)=\frac{1}{n!2^n}\cdot\frac{\widetilde{w}_0(-q^{-1})}{(1+q^{-1})^{m'}}\cdot\frac{1}{|c(z;\{t\})|^2}dz,\quad m'=\left[\frac{m+1}{2}\right], \tag{4.8}$$

であり，dz は $\mathfrak{a}^*$ 上の Haar 測度とする．ここで与えた測度 $d\mu(z)$ は剰余体標数には依らず，m の偶奇だけで決まり，以前 [HK] [HK2] で与えたものに一致している．以下，記号を簡略化して次のように記すことにする．

$$P_{\lambda+e} = P_{\lambda+e}(z;\{t\}), \quad \widetilde{w}_\lambda = \widetilde{w}_\lambda(-q^{-1}), \qquad (\lambda \in \widetilde{\Lambda_n^+}).$$

このとき [HK, Proposition B.3] により，

$$\langle P_{\lambda+e}, P_{\mu+e}\rangle_{\mathcal{R}} = \delta_{\lambda,\mu}\frac{\widetilde{w}_{\mathbf{0}}}{\widetilde{w}_{\lambda+e}}, \quad (\lambda,\mu \in \widetilde{\Lambda_n^+}), \tag{4.9}$$

が成り立っている．また，(4.6) により，次が分かる．

$$\langle F(ch_\lambda), F(ch_\mu)\rangle_{\mathcal{R}} \;=\; \delta_{\lambda,\mu}\, q^{2\langle\lambda+e,\,\mathrm{Re}(z_0)\rangle}\frac{\widetilde{w}_{\lambda+e}}{\widetilde{w}_{\mathbf{0}}}\cdot v(K\cdot x_\lambda)^2. \tag{4.10}$$

X は丁度 2 個の G-軌道を持つ (Theorem 2.1-(3)) ので，X 上の G-不変測度の正規化を $K\cdot x_0$ と $K\cdot x_1$ の体積を基に与えることができる．ここで $x_0 = 1_m$ and $x_1 = x_{\langle 1\rangle}$, $\langle 1\rangle = (1,0,\ldots,0) \in \Lambda_n^+$ である．

Lemma 4.3 X 上の G-不変測度 dx を

$$v(K\cdot x_0) = q^{-2\langle e,\,\mathrm{Re}(z_0)\rangle}\,\frac{\widetilde{w}_{\mathbf{0}}}{\widetilde{w}_e}, \quad v(K\cdot x_1) = q^{-2\langle\langle 1\rangle+e,\,\mathrm{Re}(z_0)\rangle}\,\frac{\widetilde{w}_{\mathbf{0}}}{\widetilde{w}_{\langle 1\rangle+e}},$$

と正規化すると次が成り立つ．

$$v(K\cdot x_\lambda) = q^{-2\langle\lambda+e,\,\mathrm{Re}(z_0)\rangle}\,\frac{\widetilde{w}_{\mathbf{0}}}{\widetilde{w}_{\lambda+e}}, \quad \lambda \in \widetilde{\Lambda_n^+}.$$

そこで，Lemma 4.3 のように dx を正規化すると，

$$\int_X ch_\lambda(x)\overline{ch_\mu(x)}dx = \delta_{\lambda,\mu}v(K\cdot x_\lambda) = \int_{\mathfrak{a}^*} F(ch_\lambda)(z)\overline{F(ch_\mu)(z)}d\mu(z), \quad (\lambda,\mu \in \widetilde{\lambda_n^+})$$

が分かり，$\mathcal{S}(K\backslash X)$ は 集合 $\left\{ ch_\lambda \;\middle|\; \lambda \in \widetilde{\Lambda_n^+} \right\}$ で張られるので，次の定理を得る．

Theorem 4.4 ($\mathcal{S}(K\backslash X)$ 上の Plancherel 公式) m が奇数のときは $e \leq 1$ と仮定する．任意の $\varphi,\psi \in \mathcal{S}(K\backslash X)$ について次が成立する：

$$\int_X \varphi(x)\overline{\psi(x)}dx = \int_{\mathfrak{a}^*} F(\varphi)(z)\overline{F(\psi)(z)}d\mu(z),$$

但し，X 上の測度 dx は *Lemma 4.3* のように正規化し，$\mathfrak{a}^*$ とその上の測度 $d\mu(z)$ は (4.8) で与えられたものとする．

次の系は，定理から直ちに分かる．

Corollary 4.5 (逆変換公式) m が奇数のときは $e \leq 1$ と仮定する．任意の $\varphi \in \mathcal{S}(K\backslash X)$ と $x \in X$ について次が成立する：

$$\varphi(x) = \int_{\mathfrak{a}^*} F(\varphi)(z)\Psi(x;z)d\mu(z).$$

参考文献

[Bo] A. Borel: *Linear Algebraic Groups, Second enlarged edition*, Graduate Texts in Mathematics **126**, Springer, 1991.

[Car] P. Cartier: Representations of $\mathfrak{p}$-adic groups — A survey, *Proc. Symp. Pure Math.* **33-1**(1979), 111–155.

[H1] Y. Hironaka: Spherical functions and local densities on hermitian forms, *J. Math. Soc. Japan* **51**(1999), 553 – 581.

[H2] Y. Hironaka: Functional equations of spherical functions on p-adic homogeneous spaces, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **75**(2005), 285 – 311.

[H3] Y. Hironaka: Spherical functions on p-adic homogeneous spaces, *"Algebraic and Analytic Aspects of Zeta Functions and L-functions"* – Lectures at the French-Japanese Winter School (Miura, 2008)–, MSJ Memoirs **21**(2010), 50 – 72.

[H4] Y. Hironaka: Harmonic analysis on the space of p-adic unitary hermitian matrices, including dyadic case, preprin 2016, Math arXive:1602.06127

[HK] Y. Hironaka and Y. Komori: Spherical functions on the space of p-adic unitary hermitian matrices, *Int. J. Number Theory* **10**(2014). 513 – 558; Math arXiv:1207.6189

[HK2] Y. Hironaka and Y. Komori: Spherical functions on the space of p-adic unitary hermitian matrices II, the case of odd size, *Commentarii Math. Univ. Sancti Pauli* **63**(2014); Math arXiv:1403.3748

[HS] Y. Hironaka and F. Sato : The Siegel series and spherical functions on $O(2n)/(O(n) \times O(n))$, *"Automorphic forms and zeta functions"* – Proceedings of the conference in memory of Tsuneo Arakawa –, World Scientific, 2006, 150 – 169.

[Ja] R. Jacobowitz: Hermitian forms over local fields, *Amer. J. Math.* **84**(1962), 441 – 465.

[M1] I. G. Macdonald: The Poincaré series of a Coxeter group, *Math. Ann.* **199**(1972), 161 – 174.

[M2] I. G. Macdonald: Orthogonal polynomials associated with root systems, *Séminaire Lotharingien de Combinatoire* **45**(2000), Article B45a.

[Om] O. T. O'Meara: *Introduction to quadratic forms*, Grund. math. Wiss. **117**, Springer-Verlag, 1973.

[Sa] I. Satake, Theory of spherical functions on reductive algebraic groups over p-adic fields, *Publ. Math. I.H.E.S.* **18**(1963), 5 – 69.

[Se] J. P. Serre: *Galois cohomology*, Springer-Verlag, 1997, (English translation of "*Cohomologie Galoisienne*", 1964).