

複素接触点集合がなす絡み目について

粕谷 直彦 (京都産業大学理学部数理科学科)*

1. 序

本稿の目的は筆者と高瀬将道氏(成蹊大理工)による論文[17]に関する日本語による概説および補足を行うことである. はじめに, はめ込みの複素接触点および総実(はめ込み)の定義を確認しておこう. 尚, 本稿では特に断らない限り多様体や写像は C^∞ -smooth であるとする.

定義 1. M^k を多様体, $f: M^k \rightarrow \mathbb{C}^n$ をはめ込みとする. 点 $x \in M^k$ が複素接触点 (a complex tangent) であるとは, 接空間 $df_x(T_x M^k)$ が複素直線を含むとき, 即ち

$$df_x(T_x M^k) \cap J(df_x(T_x M^k)) \neq \{0\}$$

を満たすときにいう. ただし, J は \mathbb{C}^n 上の標準的複素構造である. はめ込み f が複素接触点を全く持たないとき, f は総実 (totally real) であるという.

総実(はめ込み)・埋め込みについては [1, 3, 11, 13] 等において, 複素接触点集合については [4, 6, 7, 9, 12, 16, 22] 等においてこれまで広く研究されてきた. 特に $k = n$ の場合は総実点, 複素接触点はそれぞれ $\mathbb{R}C$ 正則点, $\mathbb{R}C$ 特異点と対応するため, 微分幾何・複素幾何の観点からも重要である.

以下では主に向き付け可能3次元閉多様体 M^3 の \mathbb{C}^3 へのはめ込み・埋め込みについて考える. この場合, generic なはめ込みの複素接触点集合は空集合または絡み目になることが知られている (§2 を参照). そこで次のような自然な問いが発生する.

問題 1. \mathbb{C}^3 への埋め込みの複素接触点集合として現れる M^3 内の絡み目を決定せよ.

これについて, Elgindi は一連の論文 ([7, 8, 9]) の中で以下のような結果を得ている.

- (1) 任意の結び目 $K \subset S^3$ と任意の自然数 n に対し, 複素接触点集合が K と一致するような C^n 級埋め込み $S^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ が存在する. さらにこの埋め込みは 1 点を除いて C^∞ 級にとることができる.
- (2) 任意の結び目 $K \subset S^3$ に対し, 複素接触点集合が K または K の two unlinked copies と一致するような C^∞ 級埋め込みが存在する.

しかし彼の結果には次のような難点がある. まず 1 つ目は Akbulut-King の結果 [2] を利用するため S^3 内の結び目に関する結果しか得られないこと, 2 つ目は途中で Heisenberg 群を用いるために S^3 の埋め込みが 1 点で退化する可能性を排除できず, これを C^∞ -smooth にしようとするとう任意の結び目が実現できるとは言えなくなってしまうことである. これに対して, 我々は安定写像の特異点集合のトポロジーに関する佐伯の定理(定理8)を応用する, という全く異なるアプローチによってこれらの難点を回避

*e-mail: nkasuya@cc.kyoto-su.ac.jp

するとともに、一般の向き付けられた3次元閉多様体に関する主張を得、上記の問いに完全な回答を与えることに成功した。我々の主定理は以下の通りである。

定理 2 ([17], Theorem 8.1). M^3 を任意の向き付けられた3次元閉多様体, L を M^3 内の向き付けられた絡み目とする. 複素接触点集合が L と一致するような埋め込み $F: M^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ が存在するための必要十分条件は $[L] = 0 \in H_1(M^3; \mathbb{Z})$ となることである.

必要条件であることはグラスマン多様体とガウス写像に関する議論から比較的容易に示される. 従って, 十分条件であることの証明, つまり埋め込み F の構成の方が肝心である. 構成のポイントは2つある. 1つ目は佐伯の定理を少し拡張することにより, \mathbb{R}^4 へのはめ込みヘリフト可能な安定写像 $M^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ の特異点集合に関する定理を得ることである (§3). 2つ目のポイントはそのような \mathbb{R}^4 へのはめ込みリフトをさらにあるやり方で \mathbb{R}^6 ヘリフトすることである. これによって, \mathbb{C}^3 へのはめ込みであっても複素接触点集合が元の安定写像の特異点集合と一致するものを構成することができる. ここでの \mathbb{R}^4 から \mathbb{R}^6 へのリフトの仕方は単純かつ具体的であるが, 安定写像の特異点集合とはめ込みの複素接触点集合とを関係づけるという意味で, 全体の構成の中でも重要な部分である. 詳しくは §4 において解説するが, そこでは原論文では述べなかったグラスマン多様体を用いたより本質的な議論を行う. 最後に, Whitney trick の totally real 版を使ってはめ込みの2重点を消去することによって, 主定理の埋め込みが得られる.

注意 3. 定理 2 において絡み目 L の向きは重要である. というのも L の連結成分が複数ある場合には, 向きの入れ方によって $[L] = 0 \in H_1(M^3; \mathbb{Z})$ という条件が変わってしまうことがあるからである. つまり, 主定理は $[L] = 0 \in H_1(M^3; \mathbb{Z})$ のとき, L と複素接触点集合のなす絡み目が単に集合としてではなく, そこへ自然に入る向きも含めて一致するような埋め込み F の存在を主張している. 従って, 埋め込み F の構成においては, これらの向きが一致するように慎重に議論する必要がある. この点については §5 において詳しく論じることとする.

2. 複素接触点集合

§1 でも述べた通り, 向き付けられた3次元閉多様体 M^3 の \mathbb{C}^3 への generic なはめ込みについて, その複素接触点集合は空集合または余次元2の部分多様体 (つまり絡み目) となる. このことは Lai ([16], Theorem 2.3) によって示されているが, 以下ではグラスマン多様体とガウス写像を用いた簡単な説明を行う. さらにその考え方に基づいて, 主定理の片側や複素接触点集合に自然な向きが入ること等が示される.

2.1. 複素接触点集合に入る向き

$\tilde{G}_{6,3}$ を \mathbb{R}^6 内の向き付けられた3次元部分空間全体がなすグラスマン多様体, W を複素直線を含む3次元部分空間全体がなす $\tilde{G}_{6,3}$ の部分集合とする.

$$\tilde{G}_{6,3} = \text{SO}(6)/\text{SO}(3) \times \text{SO}(3)$$

なので、 $\tilde{G}_{6,3}$ の実次元は9である。一方、 W は次のようにして S^5 上の CP^1 束であることが分かる。 W の元は \mathbb{R}^6 内の単位ベクトル v とこれに直交する複素直線 L の組 (v, L) として表せる。まず \mathbb{R}^6 内の単位ベクトル v のとり方が S^5 の分だけある。次に v を固定すると、これに直交する線型空間は実5次元であるが、その中に複素2次元部分空間が含まれており、そこから複素直線をとる選び方は CP^1 の分だけある。よって、

$$\pi: W \rightarrow S^5; (v, L) \mapsto v$$

は CP^1 束であり、 W の実次元は7である。このことから W は $\tilde{G}_{6,3}$ の余次元2の向き付け可能部分多様体であることが分かる ([8], §2, Theorem 3 も参照)。

さて、ここで $W \subset \tilde{G}_{6,3}$ の2次元法束 N が自明であることを示そう。まず $(v, L) \in W$ を固定した時、接空間 $T_{(v,L)}\tilde{G}_{6,3}$ がどう生成されているかを見る。2次元部分空間 L を固定した時、それに直交する単位ベクトル v の動ける方向の次元は $\dim_{\mathbb{R}} S^3 = 3$ である。一方、 v を固定した時に2次元部分空間 L の動かせる方向の次元は $\dim_{\mathbb{R}} \tilde{G}_{5,2} = 6$ である。これらで9次元の接空間 $T_{(v,L)}\tilde{G}_{6,3}$ が生成されているのである。このうち v を動かす方向 (3次元分) は明らかに $T_{(v,L)}W$ に含まれている。次に v を固定して L を Jv 方向に傾けることを考える。つまり線型写像

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix}: L = \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}(Jv) = \mathbb{R}$$

のグラフを考えるとということであるが、これによって L, v, Jv で張られる4次元線型空間内で L を振動した2次元部分空間 $L_{(a_1, a_2)}$ が得られる。もちろん $L_{(0,0)} = L$ である。 $L_{(a_1, a_2)}$ と v が張る3次元部分空間は $L_{(a_1, a_2)}$ をさらに v 方向へ傾けて得られる複素直線 (それはつまり線型写像

$$\begin{pmatrix} a_2 & -a_1 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix}: L = \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}(v) \oplus \mathbb{R}(Jv) = \mathbb{R}^2$$

のグラフである) を含むことがわかる。よって、この方向 (2次元分) もやはり $T_{(v,L)}W$ に含まれている。残るは v, Jv に直交する4次元部分空間の中で L が動ける方向 (次元は $\dim_{\mathbb{R}} \tilde{G}_{4,2} = 4$) を考えればよい。言い換えると、 v に直交する複素2次元部分空間の中で L を動かすという事である。それは結局、 $CP^1 \subset \tilde{G}_{4,2} = S^2 \times S^2$ の法束 N_1 を考えるのと同じ状況である。この N_1 が自明であることはよく知られている。よって、 W の法束 N をファイバー $\pi^{-1}(v) = CP^1$ に制限したものは2次元自明ベクトル束である。さらに W の底空間が S^5 であることと合わせると、 N は自明ベクトル束であることが従う。そこで N の自明化 ν を1つ固定しよう。

はめ込み $f: M^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ が generic であるとき、そのガウス写像 $\Gamma_f: M^3 \rightarrow \tilde{G}_{6,3}$ は W と横断的であるから、複素接触点集合 $\Gamma_f^{-1}(W) \subset M^3$ は空集合または余次元2の部分多様体である (空集合である場合が総実のはめ込みに対応している)。さらに Γ_f によって法束 N の自明化 ν も $\Gamma_f^{-1}(W)$ 上へ引き戻されるから、 M^3 に与えられた向きと合わせると絡み目 $\Gamma_f^{-1}(W)$ に自然な向きが入ることとなる。

2.2. 主定理の片側の証明

さらに「任意のはめ込み $f: M^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ は総実のはめ込みに正則ホモトピックである」という結果 [3, 13] と合わせると、以下が容易に示される。

定理 4 ([17], Theorem 2.1). M^3 を向き付けられた 3 次元閉多様体とする. M^3 から \mathbb{C}^3 への任意の generic なはめ込みについて, その複素接触点集合が代表する整係数ホモロジー類は $H_1(M^3; \mathbb{Z})$ において自明である.

証明は元のはめ込み f と総実のはめ込みとを結ぶ正則ホモトピーをとり, それに対応するガウス写像によるホモトピー $\tilde{\Gamma}_f: M^3 \times [0, 1] \rightarrow \tilde{G}_{6,3}$ をとることによってなされる. 必要な場合は $\tilde{\Gamma}_f$ を $M^3 \times \{0\}$ 上では止めたまま摂動して W と横断的にすることによって, $\tilde{\Gamma}_f^{-1}(W)$ は $\Gamma_f^{-1}(W)$ を境界とする $M^3 \times [0, 1]$ 内の向き付け可能な境界付き曲面となる. そのため $\Gamma_f^{-1}(W)$ のホモロジー類は $H_1(M^3; \mathbb{Z})$ において自明であることが分かる.

3. 佐伯の定理とその拡張

この章では, M^3 から \mathbb{R}^2 への安定写像の特異点集合のトポロジーに関する佐伯の定理 (定理 8) とそれを拡張して得られるリフト可能安定写像の特異点集合のトポロジーに関する定理 (定理 11) について述べる. この内容を理解するにあたっては佐伯修氏の和文概説 [18] が大いに役立つと思われるので, 参照されたい.

3.1. 安定写像

多様体間の滑らかな写像 $f: M \rightarrow N$ に対し, その特異点集合を $S(f)$ という記号で表す.

定義 5. 滑らかな写像 $f: M^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ が安定写像 (a stable map) であるとは, 以下の条件を満たすときをいう.

I. 局所的条件:

各 $p \in M^3$ に対し, p のまわりの局所座標 (x, y, z) と $f(p)$ のまわりの局所座標 (X, Y) が存在し, それらの座標近傍において f は以下のいずれかの形で表される:

$$(L1) \quad (X \circ f, Y \circ f) = (x, y) \quad (p: \text{a regular point}),$$

$$(L2) \quad (X \circ f, Y \circ f) = (x, y^2 + z^2) \quad (p: \text{a definite fold point}),$$

$$(L3) \quad (X \circ f, Y \circ f) = (x, y^2 - z^2) \quad (p: \text{an indefinite fold point}),$$

$$(L4) \quad (X \circ f, Y \circ f) = (x, xy + y^3 + z^2) \quad (p: \text{a cusp point}).$$

II. 大域的条件:

$$(G1) \quad \text{任意の cusp point } p \in M^3 \text{ について, } f^{-1}(f(p) \cap S(f)) = \{p\} \text{ が成立.}$$

$$(G2) \quad f \text{ の } (S(f) \setminus \{\text{cusp points}\}) \text{ への制限は正規交叉のみを持つはめ込みである.}$$

注意 6. 安定写像の本来の定義は「写像空間の C^∞ -topology に関してその写像に近い写像は必ず元の写像と \mathcal{A} 同値になる」ということであるが, 今は M^3 から \mathbb{R}^2 への安定

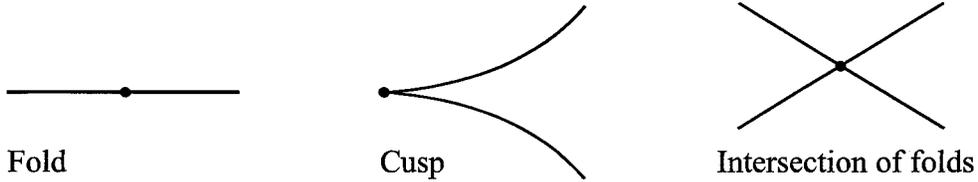


図 1: Local images of singular points

写像のみを考えたいので, 上記の同値な条件を定義として採用した. また, 安定写像 $f: M^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ の特異点集合 $S(f)$ は M^3 内の絡み目となることに注意されたい.

安定写像 f_0 と f_1 の間の generic なホモトピー $f_t: M^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ($t \in [-1, 1]$) は [5, 20] において研究されている. そのような generic なホモトピー f_t の germ は, 適当な M^3 と \mathbb{R}^2 の局所座標 (x, y, z) と (X, Y) に関して, 以下のいずれかの形で表される:

$$(1) (X \circ f_t, Y \circ f_t) = (x, y^3 + yx^2 + z^2 + yt) \quad (\text{Lips}),$$

$$(2) (X \circ f_t, Y \circ f_t) = (x, y^3 - yx^2 + z^2 + yt) \quad (\text{Beaks}),$$

$$(3) (X \circ f_t, Y \circ f_t) = (x, y^4 + yx \pm z^2 + y^2t) \quad (\text{Swallowtail});$$

さらに,

(4) an *intersection of a fold and a cusp*,

(5) a *non-transversal intersection of two folds*,

(6) an *intersection of three folds*

が余次元 1 の multigerms として現れる可能性がある. 上記の各ホモトピーは $t = 0$ において, 安定写像でなくなる瞬間があるが, これを分岐点 (a *bifurcation point*) という.

上記のホモトピーのうちで特異点集合のトポロジーが変化するのは Beaks のみである. そしてその変化は *band surgery* と呼ばれる絡み目に対する操作に対応している.

定義 7. M^n を n 次元多様体 ($n \geq 3$), L を M の 1 次元部分多様体, $b: I \times I \rightarrow M^n$ は $b(I \times I) \cap L = b(I \times \partial I)$ を満たす埋め込みとする. ただし, $I = [0, 1]$ である. このとき,

$$L' = (L \setminus b(I \times \partial I)) \cup b(\partial I \times I)$$

を L に対する band b に沿った *band surgery* によって得られる絡み目という. L が向き付けられた絡み目で L' が $L \setminus b(I \times \partial I)$ と compatible な向きを持つとき, L' は *coherent band surgery* によって得られるという (図 3 参照).

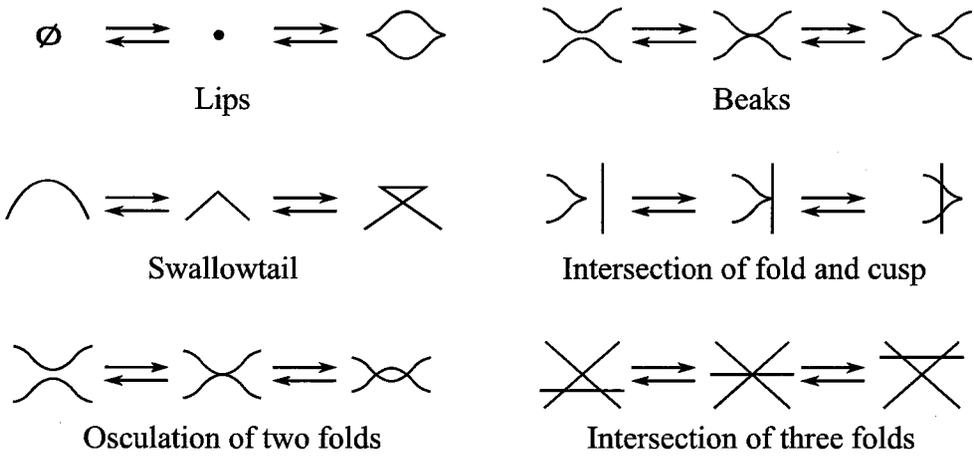


图 2: Generic homotopies

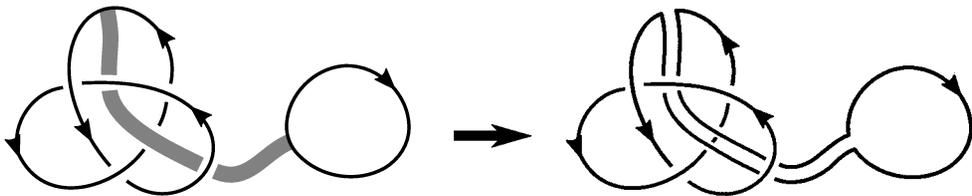


图 3: The coherent band surgery

3.2. 佐伯の定理

定理 8. [佐伯 [19], Corollary 6.3] M^3 を向き付け可能 3次元閉多様体, L を M^3 内の 1次元閉部分多様体とする. このとき, $S(f) = L$ となる安定写像 $f: M^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ が存在するための必要十分条件は $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -係数ホモロジー類 $[L]_2 \in H_1(M^3; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ が自明となることである.

この定理の証明における 1つの鍵が以下の補題である.

補題 9 ([19], Lemma 3.9 ([18], Lemma 5.9)). L, L' を M^3 内の絡み目とする. このとき, L' が L に対する有限回の band surgeries によって得られるための必要十分条件は, $[L]_2 = [L']_2 \in H_1(M^3; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ となることである.

必要条件であることは明らかであるが, 十分条件であることは以下のようにして分かる. まず L に coherent とは限らない band surgeries を行うことで, L' と \mathbb{Z} -homologous にできる. 次に $\pi_1(M^3)$ の交換子に対応する coherent band surgeries 2回によって homotopic にし, 最後に unknotting operation を coherent band surgeries 2回で実現すれば L' と isotopic となる ([17], Figures 2, 3も参照).

定理 8 の証明の概要. 必要条件であることは Thom 多項式 [21] から明らか. 十分条件であることは以下のようにして分かる. まず任意の安定写像 $g: M^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ をとると, $[S(g)] = [L] = 0 \in H_1(M^3; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ である. 補題 9 より, $S(g)$ は有限回の band surgeries によって L へもっていくことができる. 各 band surgery は Beaks によって実現することができるから (正確には Swallowtail, intersection of a fold and a cusp も必要であるが), g からの generic homotopy の構成によって $S(f) = L$ となる安定写像 $f: M^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を作ることもできる. \square

3.3. リフト可能な安定写像とその特異点集合に入る向き

定義 10. 向き付け可能 3次元多様体 M^3 から \mathbb{R}^2 への安定写像 $f: M^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ がリフト可能である, あるいは \mathbb{R}^4 へのはめ込みリフト \tilde{f} を持つとは, 自然な射影 $\text{pr}: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ に対して $\text{pr} \circ \tilde{f} = f$ を満たすはめ込み $\tilde{f}: M^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ が存在するときという.

Levine は [14, 15] において安定写像のリフト可能性について研究し, \mathbb{R}^4 へのはめ込みリフトを持たない安定写像の例 ([15], Example 2, p.288) を構成した. 彼はその過程でリフト可能安定写像の特異点集合には適切な向きが入ることを示している ([14], p.55 および p.59). これについて簡単に説明する. M^3 を向き付けられた 3次元多様体とし, $f: M^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ をはめ込みリフト

$$\tilde{f} = (f, h): M^3 \rightarrow \mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$$

を持つ安定写像, $\text{pr}: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を第 1成分への射影とする. すると, f の $x \in \mathbb{R}^2$ における regular fiber の各連結成分 C は M^3 と \mathbb{R}^2 の向きに compatible に向き付けられるため, $\mathbb{R}^2 = \text{pr}^{-1}(x)$ へのはめ込み h の回転数 $r(C)$ が定まる. このとき, リフト可能安定写像 f の特異点集合 $S(f)$ には以下の条件を満たす向きを入れることができる.

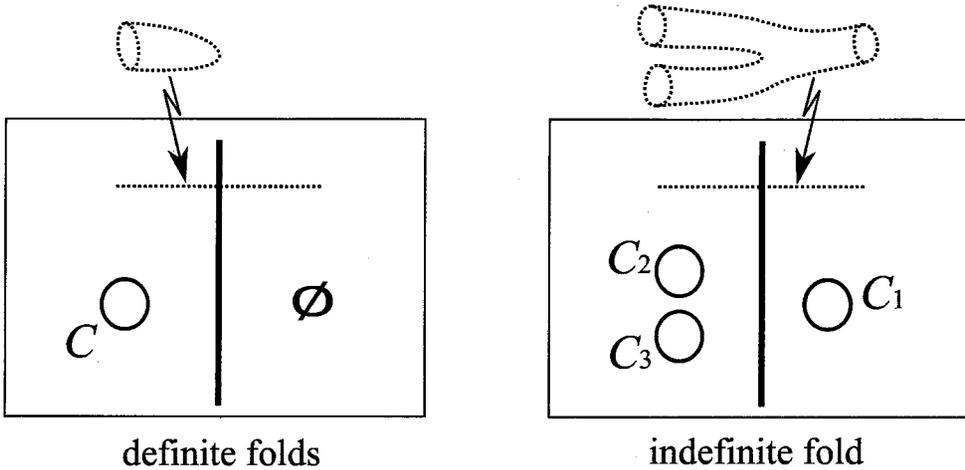


図 4: A good orientation of the singular set

- 図 4 において $r(C) = 1$ (resp. $= -1$) ならば, definite folds のなす線分が上向き (resp. 下向き) に向き付けられている.
- 図 4 において $r(C_2) + r(C_3) - r(C_1) = 1$ (resp. $= -1$) ならば, indefinite folds のなす線分は上向き (resp. 下向き) に向き付けられている.

この条件を満たす向きを $S(f)$ の *good orientation* と呼ぶことにする. Good orientation は f によって unique に定まるものではなく, はめ込みリフトを 1 つとることによって決まるものである.

3.4. 佐伯の定理の拡張

定理 11 ([17], Theorem 7.1). M^3 を向き付けられた 3 次元閉多様体, L を M^3 内の向き付けられた 1 次元閉部分多様体とする. このとき, $S(f) = L$ となるリフト可能安定写像 $f: M^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ が存在するための必要十分条件は \mathbb{Z} -係数ホモロジー類 $[L] \in H_1(M^3; \mathbb{Z})$ が自明となることである.

定理 11 の証明の概要. 基本的には定理 8 の証明と同じである. 違う所は今回は向きを気にするので, coherent band surgery のみが見えるという点である. 補題 9 と同様にして, $[L] = [L'] \in H_1(M^3; \mathbb{Z})$ であることと L' が L への有限回の coherent band surgeries によって得られることは同値であることが分かる. よって, リフト可能安定写像 $g: M^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ からスタートし, 各 coherent band surgery に対応する coherent Beaks (図 5) とそれに付随して必要となる Swallowtail, intersection of a fold and a cups を繰り返せば, $S(f) = L$ となる安定写像 $f: M^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ が得られる. あとは f が \mathbb{R}^4 へのはめ込みにリフト可能であることを示せばよい. そのためには各 bifurcation において安定写像のリフト可能性が崩れないことをいえばよいが, これは § 3.1 の標準形を見れば分かる (実際には, f と g を結ぶホモトピーをカバーするはめ込みリフトの正則ホモトピーが作れる). 以上より, 十分条件であることが分かる. 必要条件であることは, 定

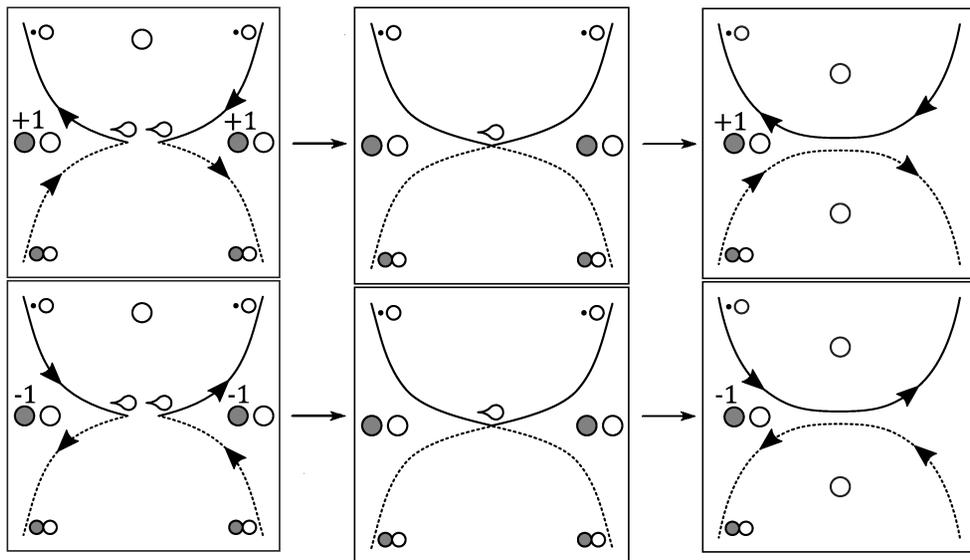


図 5: Beaks with coherent orientations ([23, Figure 6(a) (2) and Figure 8(a) III^a(b)])

理 4 と次章の定理 13 を組み合わせることで示される。□

注意 12. 定理 11 は次のように言い換えることができる。 ガウス写像

$$\Gamma_f: M^3 \rightarrow \tilde{G}_{4,3} = S^3$$

が $\Gamma_f^{-1}(C) = L$ を満たすはめ込み $f: M^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ の存在と整係数ホモロジー類 $[L] \in H_1(M^3; \mathbb{Z})$ が自明であることは同値である。ただし、 C は S^3 の大円

$$C := \{z_2 = 0\} \subset S^3 = \{(z_1, z_2) \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\} \subset \mathbb{C}^2$$

とする。この解釈は佐伯修氏の指摘によるものである。また § 3.1 の definite fold, indefinite fold, cusp の標準形を見れば、 Γ_f は C に横断的であることも分かる。

4. 主定理の証明

主定理の証明の準備として、まず以下の定理を示す。

定理 13. 向き付け可能 3 次元閉多様体 M^3 から \mathbb{R}^2 への安定写像 $g_1 = (f_1, f_2): M^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ がはめ込みリフト $\tilde{g}_1 = (f_1, f_2, f_3, f_4): M^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ を持ったとする。このとき、

$$G = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_1, -f_2): M^3 \rightarrow \mathbb{R}^6 = \mathbb{C}^3$$

は M^3 から \mathbb{C}^3 へのはめ込みであり、複素接触点集合は特異点集合 $S(g_1)$ と一致する。

定理 13. の証明. G がはめ込みであることは明らかであるから、ガウス写像 $\Gamma_G: M^3 \rightarrow \tilde{G}_{6,3}$ について $\Gamma_G^{-1}(W) = S(g_1)$ であることを示せばよい。線型埋め込み h を

$$h: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^6 = \mathbb{C}^3: (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_1, x_2, x_3, x_4, x_1, -x_2)$$

で定義すると、 $G = h \circ \tilde{g}_1$ であるから、ガウス写像 Γ_G もはめ込み \tilde{g}_1 のガウス写像 $\Gamma_{\tilde{g}_1}: M^3 \rightarrow \tilde{G}_{4,3}$ と線形埋め込み h から誘導されるグラスマン多様体の間の埋め込み写像 $\Gamma_h: \tilde{G}_{4,3} \rightarrow \tilde{G}_{6,3}$ との合成となる。よって、示すべきは $\Gamma_h^{-1}(W)$ が $\tilde{G}_{4,3} = S^3$ の大円 C と一致することである。これは以下のように示される。 \mathbb{R}^4 内の3次元部分空間 $P \in \tilde{G}_{4,3}$ に対して、 $\Gamma_h(P) \in \tilde{G}_{6,3}$ が複素直線 L を含んだとしよう。射影

$$\text{pr}_j: \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}; (z_1, z_2, z_3) \mapsto z_j \quad (j = 1, 2, 3)$$

は複素線型なので、これらの L への制限 $\text{pr}_j|_L: L \rightarrow \mathbb{C}$ ($j = 1, 2, 3$) も複素線型である。一方で任意の $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ に対し、 $\text{pr}_1 \circ h(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 + ix_2$ と $\text{pr}_3 \circ h(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 - ix_2$ は複素共役であるから、これらを2次元部分空間 $h^{-1}(L) \subset \mathbb{R}^4$ へ制限したものは恒等的に0でなければならない。よって、 $h^{-1}(L) = \{0\} \times \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^4$, $L = \{0\} \times \mathbb{C} \times \{0\} \subset \mathbb{C}^3$ である。以上より、 $\Gamma_h(P)$ が複素直線を含むことと $\{0\} \times \mathbb{R}^2 \subset P$ であることは同値である。同型 $\tilde{G}_{4,3} \cong S^3$ は3次元部分空間に直交単位法ベクトルを対応させることで得られることに注意すると、確かに $\Gamma_h^{-1}(W) = C$ であることが分かる。よって、 $\Gamma_G = \Gamma_h \circ \Gamma_{\tilde{g}_1}$ であること、 $\Gamma_{\tilde{g}_1}^{-1}(C) = S(g_1)$ であることと合わせると、 $\Gamma_G^{-1}(W) = S(g_1)$ が従う。□

注意 14. 埋め込み Γ_h が W に横断的であることは以下のようにして分かる。まず自然な同型写像 $\tilde{G}_{4,3} \cong S^3$ を n とおく。即ち、 $n(P)$ は3次元部分空間 P に直交する単位法ベクトルである。大円 $C \subset S^3$ の法方向は $(\frac{\partial}{\partial x_3})$, $(\frac{\partial}{\partial x_4})$ で張られているから、 $d\Gamma_h((\frac{\partial}{\partial x_3})(n(P)))$, $d\Gamma_h((\frac{\partial}{\partial x_4})(n(P)))$ が $W \subset \tilde{G}_{6,3}$ の $\Gamma_h(P)$ における法空間 $N_{\Gamma_h(P)}$ を

$$\text{張っていることを言えばよい。} n(P) \in C \text{ という状況を考えているから、} n(P) = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

と表せ、

$$P = \left\langle \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

である。 $n(Q_\varepsilon) = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ \varepsilon \\ 0 \end{pmatrix}$, $n(R_\varepsilon) = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \\ \varepsilon \end{pmatrix}$ を満たす $Q_\varepsilon, R_\varepsilon$ はそれぞれ

$$Q_\varepsilon = \left\langle \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\varepsilon \cos \theta \\ -\varepsilon \sin \theta \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, R_\varepsilon = \left\langle \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\varepsilon \cos \theta \\ -\varepsilon \sin \theta \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

であるから、これらの埋め込み Γ_h による像は

$$\Gamma_h(Q_\varepsilon) = \left\langle \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \\ 0 \\ -\sin \theta \\ -\cos \theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\varepsilon \cos \theta \\ -\varepsilon \sin \theta \\ 1 \\ 0 \\ -\varepsilon \cos \theta \\ \varepsilon \sin \theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, \Gamma_h(R_\varepsilon) = \left\langle \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \\ 0 \\ -\sin \theta \\ -\cos \theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\varepsilon \cos \theta \\ -\varepsilon \sin \theta \\ 0 \\ 1 \\ -\varepsilon \cos \theta \\ \varepsilon \sin \theta \end{pmatrix} \right\rangle$$

である。 $\varepsilon = 0$ のとき $\Gamma_h(Q_0) = \Gamma_h(R_0) = \Gamma_h(P)$ は複素直線束 L を含むが、 $\varepsilon \neq 0$ のとき $\Gamma_h(Q_\varepsilon), \Gamma_h(R_\varepsilon)$ は複素直線を含まず、しかも L の摂動される方向が異なるということが容易に確認できる。以上より、確かに Γ_h は W に横断的である。

さらに注意 12 で述べた通り、はめ込みリフト \tilde{g}_1 のガウス写像 $\Gamma_{\tilde{g}_1}$ も $C \subset S^3$ に横断的であるから、 $\Gamma_G = \Gamma_h \circ \Gamma_{\tilde{g}_1}$ は W に横断的であり、 $\Gamma_G^{-1}(W) = S(g_1)$ には複素接触点集合としての自然な向きが入る。

定理 2. の証明の概要. 定理 4, 定理 11 と定理 13 を合わせれば、 $[L] = 0 \in H_1(M^3; \mathbb{Z})$ であることと L を複素接触点集合とするはめ込み $G: M^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ の存在が同値であることが分かる。 G を埋め込み F へもっていく段では総実埋め込みに対する相対ホモトピー原理 (the relative h -principle for totally real embeddings [10, 11, 13]) を用いて、作った複素接触点集合の近傍の外側で totally real Whitney trick を行う。つまり、 L の近傍では G のまま動かさず、その外側では G を総実はめ込みのまま動かすことによって、自己交叉を外して埋め込みを得ようという訳である。もちろんこれを適用するためには、 G は自己交叉数 0 の自己横断的はめ込みであって、 L の近傍ではすでに埋め込みになっている必要があるので、予めそうなるように少し準備しておかないといけない。しかしその部分はそれほど重要ではないので、ここでは省略する。原論文 [17], Theorem 8.1 を参照されたい。 \square

これで主定理の証明はすべて終わったように見えるが、実はまだ重大な問題が残っている。向きの問題である。というのも、リフト可能な安定写像 $f: M^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ に対し、その特異点集合 $S(f)$ には good orientation と注意 14 で述べた複素接触点集合としての向きという 2 種類の向きが定義されている。これらが確かに一致していることを示す必要がある。これについては次の章で述べることとする。

5. 2つの向きの一致

M^3 を向き付けられた 3 次元閉多様体とし、 $f: M^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ははめ込みリフト $\tilde{f}: M^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ を持つ安定写像とする。このとき、特異点集合 $S(f)$ に入る 2 つの向きが一致する事、つまり注意 14 で述べた複素接触点集合としての自然な向きが確かに \tilde{f} から定まる good orientation になっていることを示そう。ここで複素接触点集合としての $S(f)$ に入る向きとは結局のところ $C \subset S^3$ の法束をはめ込みリフトのガウス写像 $\Gamma_{\tilde{f}}$ で引き戻すことで得られる向きと同じであった。よって示すべきことは、この $\Gamma_{\tilde{f}}$ の C に対する横断性からくる $S(f)$ の向きが \tilde{f} の定める good orientation になっていることである。

このことは $S(f)$ が結び目の場合には成り立っている。というのも向きの入れ方は 2 通りあるが、必要なら $W \subset \tilde{G}_{6,3}$ の法束の向き付けを取り替えて複素接触点集合としての $S(f)$ に入る向きを逆にすることで、 \tilde{f} の定める good orientation に一致させることができるからである。

連結成分が複数ある場合には、以下のように結び目の場合に帰着することで解決できる。 $L = L_1$ は $[L] = 0 \in H_1(M^3; \mathbb{Z})$ を満たす連結成分が複数ある絡み目、 L_0 は $[L_0] = 0 \in H_1(M^3; \mathbb{Z})$ を満たす結び目としよう。定理 11 とその証明から分かる通り、 L_0, L_1 を特異点集合とするリフト可能安定写像 f_0, f_1 が存在し、それらを結ぶ generic homotopy f_t ($t \in [0, 1]$) とそれをカバーするはめ込みリフトによる正則ホモトピー \tilde{f}_t ($t \in [0, 1]$) が存在する。 f_t が安定写像でない時刻 t は有限個存在し、その時刻において coherent Beaks, Swallowtail, intersection of a fold and a cusp のいずれかが起きている。ガウス写像 $\Gamma_{\tilde{f}_t}$ によるホモトピー $\tilde{\Gamma}_{\tilde{f}_t}: M^3 \times [0, 1] \rightarrow \tilde{G}_{4,3} = S^3$ が C に横断的であることは、Beaks, Swallowtail の標準形を見れば確かめることができる。よって、 $\Gamma_{\tilde{f}_0}^{-1}(C) = L_0$, $\Gamma_{\tilde{f}_1}^{-1}(C) = L_1$ であることに注意すると、 $\tilde{\Gamma}_{\tilde{f}_t}^{-1}(C)$ は $L_1 \cup -L_0$ を境界とする向き付けられた曲面である。これによって各 L_t ($t \in [0, 1]$) 上に横断性からくる向きが入る。そこで L_1 の向きが \tilde{f}_1 から定まる good orientation であることを言えばよい。 L_0 は結び目なので、その向きは \tilde{f}_0 が定める good orientation であるとしてよい。また、前後で L_t のトポロジーが変わらないような時刻 t においては \tilde{f}_t の good orientation であるという条件が崩れることはない。よって問題となるのは coherent Beaks に対応する時刻 t であるが、coherent Beaks の定義に立ち返れば bifurcation の前後で \tilde{f}_t の good orientation であるという条件が崩れないことが確かめられる。むしろ特異点集合の good orientation と compatible な Beaks を coherent Beaks と定義したのだから、これは当然の結果である。以上より、横断性からくる $L_1 = S(f_1)$ の向きは確かに \tilde{f}_1 から定まる good orientation になっていることが分かる。

これによって、定理 4, 定理 13, 注意 14 と定理 11 を組み合わせることに正当性が与えられ、漸く主定理の証明が完了する。

謝辞

佐伯修氏には定理 11 のガウス写像を用いた解釈 (注意 12) をご指摘いただいた。この解釈は定理 13 の証明のヒントにもなった。三松佳彦氏にはリフト可能安定写像の特異点集合に入る 2 つの向き的一致 (§ 5) を示すことの重要性をご指摘いただいた。両氏には感謝の意を表したい。

参考文献

- [1] P. Ahern and W. Rudin, *Totally real embeddings of S^3 in \mathbb{C}^3* , Proc. Amer. Math. Soc., 94(3):460-462, 1985.
- [2] S. Akbulut and H. King, *All knots are algebraic*, Comment. Math. Helv., 56(3):339-351, 1981.

- [3] M. Audin, *Fibrés normaux d'immersions en dimension double, points doubles d'immersions lagrangiennes et plongements totalement réels*, Comment. Math. Helv., 63(4):593-623, 1988.
- [4] E. Bishop, *Differentiable manifolds in complex Euclidean spaces*, Duke Math. J., 32:1-21, 1965.
- [5] E. Chincaro, *Bifurcations of Whitney Maps*, PhD thesis, Tese de doutorado, IMPA.
- [6] A. V. Domrin, *A description of characteristic classes of real submanifolds in complex manifolds in terms of RC-singularities*, Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat., 59(5):19-40, 1995.
- [7] A. Elgindi, *On the topological structure of complex tangents to embeddings of S^3 into \mathbb{C}^3* , New York J. Math., 18:295-313, 2012.
- [8] A. Elgindi, *A topological obstruction to the removal of a degenerate complex tangent and some related homotopy and homology groups*, Internat. J. Math., 26(5):1550025, 16, 2015.
- [9] A. Elgindi, *Totally real perturbations and non-degenerate embeddings of S^3* , New York J. Math., 21:1283-1293, 2015.
- [10] Y. Eliashberg and N. Mishachev, *Introduction to the h-principle*, volume 48 of Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.
- [11] F. Forstneric, *On totally real embeddings into \mathbb{C}^n* , Exposition. Math., 4(3):243-255, 1986.
- [12] F. Forstneric, *Complex tangents of real surfaces in complex surfaces*, Duke Math. J., 67(2):353-376, 1992.
- [13] M. Gromov, *Partial differential relations*, volume 9 of Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)], Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [14] H. Levine, *Classifying immersions into \mathbb{R}^4 over stable maps of 3-manifolds into \mathbb{R}^2* , volume 1157 of Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1985.
- [15] H. Levine, *Stable mappings of 3-manifolds into the plane*, in Singularities (Warsaw, 1985), volume 20 of Banach Center Publ., pages 279-289. PWN, Warsaw, 1988.
- [16] H. F. Lai, *Characteristic classes of real manifolds immersed in complex manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc., 172:1-33, 1972.
- [17] N. Kasuya and M. Takase, *Knots and links of complex tangents*, to appear in Transactions of the American Mathematical Society; arXiv:1606.03704 (2016).
- [18] 佐伯修, *Stable maps into the plane and links in 3-manifolds*, 「結び目の研究」1994 ; <http://imi.kyushu-u.ac.jp/~saeki/research-j.html>
- [19] O. Saeki, *Constructing generic smooth maps of a manifold into a surface with prescribed singular loci*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 45(4):1135-1162, 1995.
- [20] J. Stomayer, *Bifurcation of Whitney maps $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^2$ and critical pareto sets*, in Proceedings of a Symposium titled "Applications of Topology and Dynamical Systems" held at the University of Warwick, Coventry, 1973/1974.
- [21] R. Thom, *Les singularités des applications différentiables*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 6:43-87, 1955-1956.
- [22] S. M. Webster, *The Euler and Pontrjagin numbers of an n -manifold in \mathbb{C}^n* , Comment. Math. Helv., 60(2):193-216, 1985.
- [23] M. Yamamoto, *First order semi-local invariants of stable maps of 3-manifolds into the plane*, Proc. London Math. Soc. (3), 92(2):471-504, 2006.