数理解析研究所講究録
第2060巻 2018年 15-19



# String topology on rational Gorenstein spaces

若月駿

東京大学数理科学研究科
日本学術振興会特別研究員 DC1

## 1 背景

$m$ 次元連結有向閉多様体 $M$ 上の自由ループ空間 $LM = \mathrm{Map}(S^1, M)$ を考える．Chas と Sullivan[CS99] や Cohen と Godin[CG04] により，$LM$ のホモロジー $H_*(LM)$ 上に (余単位を持たない) 2 次元 TQFT が構成された．TQFT の作用素たちはストリング作用素と呼ばれ，特に次に示すループ積とループ余積を含んでいる．

$$\mu\colon H_*(LM)^{\otimes 2} \to H_{*-m}(LM)$$
$$\delta\colon H_*(LM) \to (H_*(LM)^{\otimes 2})_{*-m}$$

例えばループ積は，多様体の交叉積 $H_*(M)^{\otimes 2} \to H_{*-m}(M)$ と，基点つきループ空間における Pontrjagin 積 $H_*(\Omega M)^{\otimes 2} \to H_*(\Omega M)$ を合わせたものとして定義される．

これらにより $H_*(LM)$ 上に新しい代数的構造が得られた．実際，(次数を shift することで) $H_*(LM)$ は $\mu$ を積，$M$ の基本類から誘導される元を単位元とする次数付き環をなしており，非自明な代数的構造を与えている．しかし，Tamanoi により一般のストリング作用素の多くが自明であることが示された．

**定理 1.1** ([Tam10, Corollary 3.2, Theorem A]).
有向連結閉多様体 $M$ に対するストリング作用素について，次が成立する．

- ループ余積 $\delta$ はほとんど自明である．特に，$M$ のオイラー数 $\chi(M)$ が 0 であれば，ループ余積 $\delta$ は自明である．
- 合成 $\mu \circ \delta$ は常に自明である．

そこで，Félix と Thomas[FT09] は，ストリング作用素を Gorenstein 空間へと拡張した．Gorenstein 空間とは，Poincaré 双対性の観点における多様体の一般化である．また，Félix と Thomas による手法は代数的なものであり，係数が有理数体 $\mathbb{Q}$ (又は一般に標数 0 の体) の場合には有理ホモトピー論が効果的に利用できる．これにより，$M$ を Lie 群の分類空間 $BG$ とすることで，ループ余積が (本質的に) 非自明な例が得られた [FT09, Theorem 15]．しかし，分類空間の場合には多様体の場合と逆に，ループ積が自明になってしまう．

**定理 1.2** ([FT09, Theorem 14]).
連結 Lie 群 $G$ について，その分類空間 $BG$ に対する $\mathbb{Q}$ 係数のループ積 $\mu$ は自明である．

また，Naito [Nai13] により次が示された．

**定理 1.3** ([Nai13, Proposition 1.4(2)]).
$M$ を単連結 Gorenstein 空間とする．$M$ の極小 Sullivan モデル $(\wedge V, d)$ が pure で，$\dim V^{\mathrm{odd}} > \dim V^{\mathrm{even}}$ を満たすならば，ループ余積 $\delta$ は自明である．

このように特殊な状況では $\mu, \delta$ の一方が自明になることが多いが，一般の Gorenstein 空間では両者が非自明なものが存在する [Nai15]．ところが，この例でも合成 $\mu \circ \delta$ は自明になってしまう．そこで，この合成が非自明な空間が存在するかどうかが問題となる．しかし，一般の Gorenstein 空間ではストリング作用素の定義が複雑であり，(非) 自明性の証明はおろか，具体例の計算をすることも困難であった．そこで，筆者はストリング作用素の具体的な記述を行った．筆者の結果について述べる前に，ストリングトポロジーと有理ホモトピー論の概要を説明しよう．

## 2 Gorenstein 空間上のストリングトポロジー

**定義 2.1.**
弧状連結な空間 $M$ が次元 $m$ の **Gorenstein 空間**であるとは，

$$\dim \mathrm{Ext}^k_{C^*(M)}(\mathbb{Q}, C^*(M)) = \begin{cases} 1 & k = m \\ 0 & k \neq m \end{cases}$$

を満たすこと．ここで，$C^*(M) = C^*(M; \mathbb{Q})$ は特異コチェイン代数である．

なお，上の定義における Ext は，$C^*(M)$ の次数と微分を込めて定義されたものである．そのため，次数 $k$ が負の部分でも非自明な値を取る可能性もあり，Gorenstein 空間の次元 $m$ が負となる場合もある．

**例 2.2** ([FHT88]).
Gorenstein 空間の典型的な例として，次が挙げられる．

(1) 連結有向閉多様体 $M$ は Gorenstein 空間である．次元は多様体としての次元と一致する．
(2) コンパクト連結 Lie 群 $G$ の分類空間 $BG$ は Gorenstein 空間で，次元は $\dim BG = -\dim G$ で与えられる．
(3) 上記 2 つを合わせた Borel 構成 $X = EG \times_G M$ は Gorenstein 空間で，次元は $\dim X = \dim M - \dim G$ で与えられる．
(4) 単連結空間 $M$ に対し，$d_k = \dim_{\mathbb{Q}}(\pi_k M \otimes \mathbb{Q})$ と書く．$\sum_k d_k < \infty$ ならば $M$ は Gorenstein 空間で，次元は $\displaystyle\sum_{k:\mathrm{odd}} k d_k - \sum_{k:\mathrm{even}} (k-1) d_k$ で与えられる．

有向連結閉多様体の場合に，ストリング作用素は交叉積を用いて定義されるのであった．Gorenstein 空間においては，次の定理が交叉積の代わりを与える．

**定理 2.3** ([FT09, Theorem 12]).
$M$ を単連結 $m$ 次元 Gorenstein 空間とする．このとき次の同型が成立する．

$$\mathrm{Ext}^k_{C^*(M^2)}(C^*(M), C^*(M^2)) \cong H^{k-m}(M)$$

ここで $C^*(M)$ の $C^*(M^2)$ 加群の構造は，対角写像が誘導する DGA の準同型 $\Delta^* \colon C^*(M^2) \to C^*(M)$ によ

り入れている．

特に $k = m$ とすると，

$$\mathrm{Ext}^m_{C^*(M^2)}(C^*(M), C^*(M^2)) \cong H^0(M) \cong \mathbb{Q}$$

となるので，生成元

$$\Delta_! \in \mathrm{Ext}^m_{C^*(M^2)}(C^*(M), C^*(M^2))$$

が (0 でないスカラー倍を除いて) 一意に定まる．これを交叉積 (の双対) の代わりとして用いることで，ストリング作用素が定義できる．

しかし，この定義を用いて実際にストリング作用素を取り扱うことを考えると，定理 2.3 の証明が複雑であることが問題となる．この定理の証明にはスペクトル系列を複数用いており，生成元 $\Delta_!$ を具体的に記述することが困難であった．

## 3 有理ホモトピー論

有理ホモトピー論の基本について復習する．次数つき $\mathbb{Q}$ ベクトル空間 $V = \bigoplus_{n\geq 1} V^n$ に対し，$\wedge V$ を「$V^{\mathrm{even}}$ が生成する多項式環」と「$V^{\mathrm{odd}}$ が生成する外積代数」のテンソル積とする．

**定義 3.1.**
**Sullivan 代数**とは，$(\wedge V, d)$ という形の DGA であって，以下を満たすような filtration $0 = V(-1) \subset V(0) \subset V(1) \subset \cdots \subset V$ が存在するもの．

- $\bigcup_k V(k) = V$
- $d(V(k)) \subset \wedge V(k-1)$

また，さらに $d(V) \subset \wedge^{\geq 2} V$ を満たすとき，$(\wedge V, d)$ を**極小 Sullivan 代数**という．

Sullivan 代数について，次が成立する．

- 弧状連結な空間 $X$ に対して，$C^*(X)$ と擬同型となる Sullivan 代数 $(\wedge V, d)$ が存在する．これを $X$ の **Sullivan モデル**と言う．
- 単連結有限型な空間 $X$ の Sullivan モデル $(\wedge V, d)$ が極小であるとき，同型 $V \cong \mathrm{hom}_{\mathbb{Z}}(\pi_*(X), \mathbb{Q})$ が成立する．
- Sullivan モデルは “ホモトピー同値” を除いて一意的である．また，極小 Sullivan モデルは同型を除いて一意的である．

## 4 結果

以下では，$(\wedge V, d)$ を Sullivan 代数で，$\dim V < \infty$ と $V^1 = 0$ を満たすものとする．

**定義 4.1.**
$(\wedge V, d)$ が **pure** とは，$d(V^{\mathrm{even}}) = 0$ と $d(V^{\mathrm{odd}}) \subset \wedge V^{\mathrm{even}}$ を満たすこと．

pure 性は，Sullivan 代数において重要なクラスを与えている [FHT01, Section 32]．筆者は，これを拡張し

て次の定義を与えた．

**定義 4.2** ([Wak16]).
$(\wedge V, d)$ が **semi-pure** とは，$d(V^{\mathrm{even}}) \subset \wedge V \cdot V^{\mathrm{even}}$ を満たすこと．ここで，$\wedge V \cdot V^{\mathrm{even}}$ は $V^{\mathrm{even}}$ が生成するイデアルを表す．

semi-pure 性について，次が成り立つ．

**定理 4.3** ([Wak16]).
$\dim_{\mathbb{Q}}(\bigoplus_k \pi_k M \otimes \mathbb{Q}) < \infty$ を満たす単連結な空間 $M$ は，semi-pure な Sullivan モデルを持つ．

semi-pure な Sullivan モデルを用いることで，次の定理が得られる．

**定理 4.4** ([Wak16]).
$M$ を $\dim_{\mathbb{Q}}(\bigoplus_k \pi_k M \otimes \mathbb{Q}) < \infty$ を満たす単連結な空間とする．このとき，$M$ の semi-pure な Sullivan モデルにより，$\Delta_! \in \mathrm{Ext}^m_{C^*(M^2)}(C^*(M), C^*(M^2))$ が具体的に記述できる．

この定理により，Gorenstein 空間上のストリング作用素を研究する上で困難となっていた $\Delta_!$ の記述の問題が解決した．

さらに，この記述を応用することで，第 1 節で述べたループ (余) 積の自明性に関する結果の (部分的な) 拡張が得られる．

**定理 4.5** ([Wak16]).
$M$ を $\dim_{\mathbb{Q}}(\bigoplus_k \pi_k M \otimes \mathbb{Q}) < \infty$ を満たす単連結な空間とし，$(\wedge V, d)$ をその semi-pure な Sullivan モデルとする．このとき次が成立する．

(1) $V$ の直和分解 $V = \mathbb{Q}x \oplus W$ が存在して，$x$ の次数が奇数であり，$(\wedge V, d) = (\wedge x \otimes \wedge W, d)$ が Sullivan 代数 $(\wedge x, 0)$ 上の相対 Sullivan 代数であると仮定する．このとき $M$ に対するループ余積は自明である．
(2) $V$ の直和分解 $V = W \oplus \mathbb{Q}x$ が存在して，$x$ の次数が偶数であり，$(\wedge V, d) = (\wedge x \otimes \wedge W, d)$ が Sullivan 代数 $(\wedge W, d')$ 上の相対 Sullivan 代数であると仮定する．このとき $M$ に対するループ積は自明である．
(3) $\dim V^{\mathrm{even}} < \dim V^{\mathrm{odd}}$ であれば，$M$ に対するループ余積は自明である．

後述するように，(1) の仮定は底空間を奇数次元球面とするファイバー束に対応しているので，$M$ のオイラー数は (定義されるならば)0 であり，定理 1.1 の部分的な拡張になっている．また，(2) の仮定は分類空間を含んでおり，定理 1.2 の拡張である．(3) は，極小 Sullivan モデルの pure 性を仮定していないという点で，定理 1.3 の拡張になっている．

さらに，定理 4.3 と定理 4.5 を組み合わせることで，これらの自明性の幾何的な記述を得る．次の定理は定理 4.5(1) の幾何的な記述である．

**定理 4.6** (W.).
$M$ を $\dim_{\mathbb{Q}}(\bigoplus_k \pi_k M \otimes \mathbb{Q}) < \infty$ を満たす単連結な空間とする．ある fibration $F \to M \to B$ が存在して，次を満たすと仮定する．

- $F$ と $B$ は単連結である．
- $B$ は球面 $S^{2n+1}$ と有理ホモトピー同値である．

- 上の fibration のホモトピー完全列の連結準同型 $\partial \otimes 1\colon \pi_{2n+1}(B)\otimes\mathbb{Q} \to \pi_{2n}(F)\otimes\mathbb{Q}$ は自明である．

このとき，$M$ に対するループ余積は自明である．

また，定理 4.5(3) の幾何的な記述として次の定理を得る．

**定理 4.7** (W.).
$M$ を $\dim_{\mathbb{Q}}(\bigoplus_k \pi_k M \otimes \mathbb{Q}) < \infty$ を満たす単連結な空間とし，$\dim(\pi_{\mathrm{even}}(M)\otimes\mathbb{Q}) < \dim(\pi_{\mathrm{odd}}(M)\otimes\mathbb{Q})$ と仮定する．このとき，$M$ に対するループ余積は自明である．

## 参考文献


[CG04] Ralph L. Cohen and Véronique Godin. A polarized view of string topology. In *Topology, geometry and quantum field theory*, volume 308 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 127–154. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004.

[CS99] Moira Chas and Dennis Sullivan. String topology, 1999, arXiv:math/9911159.

[FHT88] Yves Félix, Stephen Halperin, and Jean-Claude Thomas. Gorenstein spaces. *Adv. in Math.*, 71(1):92–112, 1988.

[FHT01] Yves Félix, Stephen Halperin, and Jean-Claude Thomas. *Rational homotopy theory*, volume 205 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2001.

[FT09] Yves Félix and Jean-Claude Thomas. String topology on Gorenstein spaces. *Math. Ann.*, 345(2):417–452, 2009.

[Nai13] Takahito Naito. String operations on rational Gorenstein spaces, 2013, arXiv:1301.1785.

[Nai15] Takahito Naito. Computational examples of rational string operations on Gorenstein spaces. *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin*, 22(4):543–558, 2015.

[Tam10] Hirotaka Tamanoi. Loop coproducts in string topology and triviality of higher genus TQFT operations. *J. Pure Appl. Algebra*, 214(5):605–615, 2010.

[Wak16] Shun Wakatsuki. Description and triviality of the loop products and coproducts for rational Gorenstein spaces, 2016, arXiv:1612.03563.