数理解析研究所講究録
第2060巻 2018年 89-95

近傍複体の基本群について

松下尚弘
京都大学理学研究科数学教室

1 はじめに

本講演では論文 [3] の概要を述べる．まず基本的な用語を定義から始める．

グラフとは集合 $V(G)$ と $V(G)$ 上の対称律を満たす二項関係 $E(G)$ の組 $G=(V(G),E(G))$ のことである．すなわち $E(G)$ は $V(G)\times V(G)$ の部分集合で,「$(v,w)\in E(G)\Rightarrow(w,v)\in E(G)$」を満たすものである．したがって我々のグラフは，ループはあってもよいが二重線を持たない非有向グラフである．一般に非有向グラフで，ループも二重線も持たないグラフのことを単純グラフという．近傍複体の周辺分野の慣例により，ループがあってもよいものとする．

グラフ G と H に対し，写像 $f:V(G)\to V(H)$ で $(f\times f)(E(G))\subset E(H)$ を満たすものをグラフ準同型という．幾何学的なイメージでは，グラフ準同型はグラフの間の連続写像というだけでなく，G の辺を H の辺に等長に写しているものとみなすことができる．グラフを対象とし，グラフ準同型を射とする圏をグラフの圏といい $\mathcal{G}$ で表す．

次にグラフの彩色問題について述べる．グラフ G に対し，G の n-彩色とは，頂点集合 $V(G)$ から n 点集合 $[n]=\{1,\cdots,n\}$ への写像 $c:V(G)\to[n]$ であって,「$(v,w)\in E(G)\Rightarrow c(v)\neq c(w)$」を満たすものである．グラフ G の彩色数とは，G の n-彩色が存在する様な最小の n のことをいい，$\chi(G)$ で表す．グラフの彩色数を決定する問題をグラフの彩色問題といい，これはグラフ理論において昔から研究されてきた重要な問題である．

後々のために，n-彩色は特別なグラフ準同型とみなすことができることを述べておく．n 頂点完全グラフ K_n を $V(K_n)=[n]$, $E(K_n)=\{(i,j)\in[n]\times[n]\mid i\neq j\}$ とおく．このとき G の n-彩色は G から K_n へのグラフ準同型と同一視することができる．したがってグラフの彩色問題は，グラフ準同型の存在問題，すなわち，与えられた二つのグラフ G と H に対し，G から H へのグラフ準同型が存在するかどうかという問題と，自然に一般化できる．

Lovász は [2] において以下のように定義される近傍複体を定義し，その位相的な性質がグラフの彩色数に下限を与えることを証明した．まずグラフ G とその頂点 v に対し，$N(v)$ または $N_G(v)$ によって，v に隣接する G の頂点全体のなす集合とする．すなわち

$N(v)=\{w\in V(G)\mid (v,w)\in E(G)\}$ である．G の近傍複体 $N(G)$ とは，頂点集合を G の孤立していない頂点全体（すなわち $v\in V(G)$ で $N(v)\neq\emptyset$ なるもの）とし，

$$N(G)=\{\sigma\subset V(G)\mid \#\sigma<\infty \text{ で } \sigma\subset N(v) \text{ となる } v\in V(G) \text{ が存在する.}\}$$

により定義する．Lovász [2] は以下の定理を示した：

定理 1.1 (Lovász [2]). グラフ G に対し，$N(G)$ が n-連結ならば $\chi(G)\geq n+3$ である．

Lovász は定理 1.1 を以下の Kneser グラフの彩色数の決定に応用した．

まず n と k を正の整数とし，$n\geq 2k$ とする．Kneser グラフ $KG_{n,k}$ を $V(KG_{n,k})=\{\sigma\subset[n]\mid \#\sigma=k\}$，$E(KG_{n,k})=\{(\sigma,\tau)\mid \sigma\cap\tau=\emptyset\}$ とする．

命題 1.2 (Lovász [2]). $N(KG_{n,k})$ は $(n-2k-1)$-連結である．

定理 1.1 と命題 1.2 により次が得られる：

定理 1.3 (Kneser 予想 [2]). $\chi(KG_{n,k})=n-2k+2$

本講演では近傍複体の基本群が組合せ論的な定式化を持つ群と同型であることを証明する．正の整数 r と点付きグラフ (G,v) に対し，r-基本群と呼ばれる群 $\pi_1^r(G,v)$ を定義する．$\pi_1^r(G,v)$ には偶数部分と呼ばれる自然な部分群 $\pi_1^r(G,v)_{ev}$ が定まり，$N(G)$ の基本群は $\pi_1^2(G,v)_{ev}$ と対応することがわかる．第 2 節で r-基本群を定義し，第 3 節で Kneser グラフの r-基本群の計算を述べる．

最後の第 4 節で r-被覆写像について述べる．ある程度良い性質を持った位相空間の場合，位相空間の基本群と被覆写像との間には密接な関係があるが，それと同様に，r-基本群に対応する被覆写像の概念が r-被覆写像である．r-基本群の部分群と連結な点付き r-被覆とは自然に対応する．特に偶数部分 $\pi_1^r(G,v)_{ev}$ に対応する r-被覆は，Kronecker 二重被覆 [1] と呼ばれる特別な r-被覆である．$\pi_1(N(G),v)$ が $\pi_1^2(G,v)_{ev}$ と対応したことを合わせると，近傍複体の上の被覆写像とは $K_2\times G$ 上の r-被覆という離散的に記述することができる．

2 r-基本群

以下 r を正の整数とする．点付きグラフとはグラフ G と G の頂点 v の組 (G,v) のことである．グラフ P_n を $V(P_n)=\{0,1,\cdots,n\}$ かつ $E(P_n)=\{(v,w)\mid |v-w|=1\}$ により定義する．ここで $V(P_n)$ は 0 を含んでいることに注意する．

点付きグラフ (G,v) に対し，グラフ準同型 $\gamma:P_n\to G$ で $\gamma(0)=\gamma(n)=v$ となるものを，長さ n の (G,v) のループという．(G,v) のループ φ に対し，$l(\varphi)$ で φ の長さ，すなわち $\varphi:P_n\to G$ の n を対応させるものとする．(G,v) のループ φ と ψ に対し，以下の二つの条件を考える．ここで r は節の冒頭で定めたある正の整数である：

(1) $l(\psi)=l(\varphi)+2$ であり，$x\in\{0,1,\cdots,l(\psi)\}$ が存在して，$\varphi(i)=\psi(i)$, $(i\leq x)$ かつ $\varphi(i)=\psi(i+2)$, $(i\geq x)$ が成り立つ．

$(2)_r$ $l(\varphi) = l(\psi)$ で,

$$\#\{i \in \{0, 1, \cdots, l(\varphi) \mid \varphi(i) \neq \psi(i)\}\} < r$$

が成り立つ.

ここで (1) の条件は，φ と ψ は x までは同じ道であるが，$x+1$ において ψ は φ とは別の頂点に向かうものの，$\psi(x+2)$ は $\psi(x) = \varphi(x)$ に戻り，その後は φ と ψ は同じように進むということである.

(G, v) のループ全体の集合を $\Omega(G, v)$ と表し，$\Omega(G, v)$ において上記の (1) と (2) で生成される同値関係を $\simeq_r$ で表す．これらの用語により，r-基本群は以下のように定式化される：

定義 2.1 (松下). (G, v) の r-基本群 $\pi_1^r(G, v)$ とは，商集合 $\Omega(G, v)/\simeq_r$ のことである.

ループの結合により $\pi_1^r(G, v)$ は群になる.

次に $\pi_1^r(G, v)$ の偶数部分について述べる．$\varphi, \psi \in \Omega(G, v)$ に対し，同値関係 $\simeq_r$ の定義から，$\varphi \simeq_r \psi$ ならば，$l(\varphi)$ と $l(\psi)$ の偶奇は変わらない．したがって

$$l : \pi_1^r(G, v) \longrightarrow \mathbb{Z}/2,\ [\varphi]_r \mapsto l(\varphi) + 2\mathbb{Z}$$

は well-defined な群準同型写像である．ここで $[\varphi]_r$ により φ が属す $\simeq_r$ の同値類（r-ホモトピー類ということにする）を表す．この準同型の核を $\pi_1^r(G, v)_{ev}$ で表して，(G, v) の r-基本群 $\pi_1^r(G, v)$ の偶数部分ということにする.

定義から明らかなように，偶数部分は $\pi_1^r(G, v)$ の指数が 1 または 2 の部分群である．連結グラフ G に対し，$\chi(G) \leq 2$ なることと，長さが奇数のループが存在しないことは同値であることは良く知られている（Zorn の補題から簡単に示せる）．ここで $\chi(G) \leq 2$ ということは G がいわゆる二部グラフであることを意味する．以上のことから点付きグラフ (G, v) に対し，$\pi_1^r(G, v) = \pi_1^r(G, v)_{ev}$ となる場合は，v を含む G の連結成分が，二部グラフであることと同値であることが容易に示される.

主定理をより完全な形に述べるために，r-近傍複体なるものを定義しておく．これは Lovász の近傍複体の一般化であって，1-近傍複体 $N_1(G)$ は近傍複体に一致する.

G をグラフ，v を G の頂点とする．このとき r-近傍 $N_r(v)$ を

$$N_1(v) = N(v),\ N_{i+1}(v) = \bigcup_{w \in N_i(v)} N(w)$$

と帰納的に定義することにより定める．r-近傍複体 $N_r(G)$ を

$$N_r(G) = \{\sigma \subset V(G) \mid \#\sigma < \infty \text{ であり，} \sigma \subset N_r(v) \text{ となる } v \in V(G) \text{ が存在する.}\}$$

と定義する．論文 [3] の主結果は以下のものである：

定理 2.2 (松下). 点付きグラフ (G, v) で $N(v) \neq \emptyset$ なるとき，自然な群同型

$$\pi_1^{2r}(G, v)_{ev} \xrightarrow{\cong} \pi_1(N_r(G), v)$$

が存在する.

特に $r=1$ のときを考えれば，$\pi_1^2(G,v)_{ev} \cong \pi_1(N(G),v)$ である．

節の最後にサイクルグラフ C_n の r-基本群について述べる．まずサイクルグラフの定義を述べる．n を 3 以上の整数とするとき，$V(C_n)=\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$，$E(C_n)=\{(x,x\pm 1) \mid x\in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\}$ で定義されるグラフがサイクルグラフである．すなわち n-角形の頂点を頂点とし，辺を辺とするようなグラフ C_n である．以下に見るように，n が偶数か奇数かにしたがって，r-基本群の記述はだいぶ変わってくる．

命題 2.3. 次が成り立つ

(1) 2 以上の整数 n に対し，

$$\pi_1^r(C_{2n}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (r<n) \\ 1 & (r\geq n). \end{cases}$$

であり，その生成元は偶である．

(2) 1 以上の整数 n に対し

$$\pi_1^r(C_{2n+1}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (r\leq 2n) \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & (r\geq 2n) \end{cases}$$

であり，その生成元は奇である．

3 Kneser グラフの r-基本群

ここでは Kneser グラフ $KG_{n,k}$，$(k\geq 1,\ n\geq 2k)$ の r-基本群を決定する．

まず r-基本群と基点との関係について述べる．$v,w\in V(G)$ が G の同じ連結成分に含まれているならば，位相空間の基本群の場合と同様にして，$\pi_1^r(G,v)$ と $\pi_1^r(G,w)$ が同型であることがわかる．そこで特に基点の取り方によらないときは $\pi_1^r(G)$ と書いて基点を省略することにする．

まず $n=2k$ のときを考えると，$KG_{n,k}$ は K_2 の直和である．したがって $\pi_1^r(KG_{n,k})$ は全ての基点に関して自明である：

命題 3.1. 任意の $r\geq 1$ に対し，$\pi_1^r(KG_{2k,k})=1$ である．

つづいて $n>2k+1$ のときを考える．このとき Lovász の結果（命題1.2）により $N(KG_{n,k})$ は単連結なので，特に $KG_{n,k}$ は連結であり，$\chi(KG_{n,k})\geq 3$ である．したがって $\pi_1^2(G,v)_{ev}=\pi_1(N(G))=1$ であり，$\pi_1^2(G,v)_{ev}$ は $\pi_1^2(G,v)$ の指数 2 の部分群である．$\pi_1^r(G,v)$, $(r\geq 2)$ は $\pi_1^2(G,v)$ の商群であることを考えると，次が分かる．

命題 3.2. $n>2k+1$ ならば $r\geq 2$ に対し $\pi_1^r(KG_{n,k})=\mathbb{Z}/2$ かつ $\pi_1^r(KG_{n,k})_{ev}=1$ である．

したがって本質的に難しい場合は $KG_{2k+1,k}$ の r-基本群ということになる．

2-基本群に関して述べる．$KG_{2k+1,k}$ の特徴から，φ, ψ を $KG_{2k+1,k}$ のループで，φ と ψ が条件 $(2)_2$ を満たすならば，$\varphi = \psi$ となることがわかる．これは $KG_{2k+1,k}$ が 4-サイクルグラフ（正方形のグラフ）の埋め込みを持たないことから容易にわかる．この事実は $\varphi \simeq_2 \psi$ ならば $\varphi \simeq_1 \psi$ であることを意味する．すなわち自然な全射 $\pi_1^1(KG_{2k+1,k}) \to \pi_1^2(KG_{2k+1,k})$ は全射であり，$\pi_1^1(KG_{2k+1,k})$ は $KG_{2k+1,k}$ を通常のやり方で 1 次元単体複体とみなしたときの基本群に一致する．したがって $\pi_1^2(KG_{2k+1,k})$ を計算するには，$KG_{2k+1,k}$ の Euler 数を計算すればよいので，詳細は省く．

一方で $r \geq 3$ のときは以下のことがわかる：

定理 3.3 (松下 [3])**.** 任意の $k \geq 1$ に対し $\pi_1^3(KG_{2k+1,k}) = \mathbb{Z}/2$，$\pi_1^3(KG_{2k+1,k}) = 1$ が成り立つ．

証明は長いので省略する．ともかく以上により Kneser グラフの r-基本群を全て決定することができた．

定理 3.3 は以下のようにグラフ準同型の非存在性に応用することができる．

系 3.4 (松下 [3])**.** $KG_{2k+1,k}$ から C_5 へのグラフ準同型は存在しない．

証明を述べる前に，この系について，既存のグラフ準同型の障害との比較を行う．

まず定理 1.3 から $KG_{2k+1,k}$ から $K_3 \cong C_3$ へのグラフ準同型は存在する．一方，$KG_{2k+1,k}$ から C_7 にグラフ準同型が存在するならば，C_7 から C_5 にグラフ準同型が存在するため，$KG_{2k+1.k}$ から C_5 にグラフ準同型が存在することになり，系 3.4 に反する．したがって系 3.4 は $KG_{2k+1,k}$ から C_{2n+1} へのグラフ準同型が存在する様な最大の n は 1 であることを示している．

グラフ準同型に関するよく知られた障害として，奇内周 (odd girth) がある．グラフ G の奇内周とは，C_{2n+1} から G へのグラフ準同型が存在する様な最小の $2n+1$ のことをいい，$g_o(G)$ で表す．二つのグラフ G と H に対し，G から H へのグラフ準同型が存在するならば，奇内周の定義から $g_o(G) \geq g_o(H)$ がわかる．一方で $g_o(KG_{2k+1,k}) = 2k+1$ で $g_o(C_5) = 5$ であるため，($k \geq 2$ に対しては）奇内周から $KG_{2k+1,k}$ から C_5 にグラフ準同型が存在しないことは示すことができないことがわかる．

もう一つグラフ準同型の障害として知られている者として，分数的彩色数 (fractional chromatic number) がある．これは有限グラフ G に対し

$$\chi_f(G) = \inf \left\{ \frac{n}{m} \;\middle|\; G \text{ から } KG_{n,m} \text{ へのグラフ準同型が存在する.} \right\}$$

により定まる G の不変量である．有限グラフ G に対し，$\chi_f(G)$ が有理数であることが知られており，グラフ G からグラフ H へのグラフ準同型が存在するならば $\chi_f(G) \leq \chi_f(H)$ となることが知られている．Kneser グラフ $KG_{n,k}$ に対しては $\chi_f(KG_{n,k}) = n/k$，$\chi(C_{2n+1}) = (2n+1)/2$ となることが知られている．したがって $\chi_f(KG_{2k+1,k}) = (2k+1)/k$，$\chi_f(C_5) =$

5/2 となる．したがって $k \geq 2$ ならば $KG_{2k+1,k}$ から C_5 にグラフ準同型が存在しないことを，分数的彩色数から導くことはできない．分数的彩色数に関しては [4] などに書かれている．

系 3.4 の証明を与える．もしグラフ準同型 $f : KG_{2k+1,k} \to C_5$ が存在したとし，その 3-基本群に誘導する写像 $f_* : \pi_1^3(KG_{2k+1,k}) \to \pi_1^3(C_5)$ を考えると，定理 3.3 より $\pi_1^3(KG_{2k+1,k}) \cong \mathbb{Z}/2$ で，一方 $\pi_1^3(C_5) \cong \mathbb{Z}$ だから f_* は自明な群準同型である．一方，$\pi_1^3(KG_{2k+1,k})$ の生成元 α は偶数部分に含まれない（すなわち奇数の長さを持つループで代表される）ため，$f_*(\alpha)$ も偶数部分に含まれず，したがって $f_*(\alpha) \neq 0$ となり，これは矛盾である．

4 r-被覆写像について

グラフ準同型 $p : G \to H$ であって，任意の $v \in V(G)$ に対し $p|_{N_i(v)} : N_i(v) \to N_i(p(v))$ が $1 \leq i \leq r$ に対し全単射であるとき，p は r-被覆写像であるという．簡単にわかるように，この条件は任意の $v \in V(G)$ に対し $p|_{N(v)} : N(v) \to N(p(v))$ が全射で，$p|_{N_r(v)} : N_r(v) \to N_r(p(v))$ が単射であることと同値である．

r-基本群と r-被覆写像は，ちょうど位相空間における基本群と被覆写像における関係が成り立つ．そのことを述べるためにいくつかの用語を準備しておく．

(H, w) が (G, v) の r-被覆であるとは，何らかの r-被覆写像 $p_H : H \to G$ で基点を保つものが与えられているもののこととする．特に H が連結のとき (H, w) は連結な r-被覆であるという．(H_0, w_0) と (H_1, w_1) を (G, v) 上の r-被覆とするとき，グラフ準同型 $f : (H_0, w_0) \to (H_1, w_1)$ であって $p_{H_1} \circ f = p_{H_0}$ を満たすものを（点付き）r-被覆の間の射という．r-被覆写像の定義から容易にわかることとして，r-被覆の射はそれ自体 r-被覆になる．

定理 4.1. (G, v) を点付きグラフとする．このとき以下が成り立つ：

(1) 基点を保つ r-被覆写像 $p : (H, w) \to (G, v)$ は単射 $p_* : \pi_1^r(H, w) \to \pi_1^r(G, v)$ を誘導する．

(2) 任意の $\pi_1^r(G, v)$ の部分群 Γ に対し，連結な点付きグラフからの r-被覆写像 $p : (H, w) \to (G, v)$ であって，$p_* : \pi_1^r(H, w) \to \pi_1^r(G, v)$ の像が Γ に一致するものが存在する（(1) から $\pi_1^r(H, w) \cong \Gamma$ である）．

(3) Γ_0 と Γ_1 を $\pi_1^r(G, v)$ の部分群とし，$p_i : (H_i, w_i) \to (G, v)$ を (G, v) 上の連結な r-被覆で $p_{i*}(\pi_1^r(H_i, w_i))$ が Γ_i になるものとする．このとき (H_0, w_0) から (H_1, w_1) への r-被覆の射が存在することと，$\Gamma_0 \leq \Gamma_1$ なることは同値であり，存在する場合，その射は一意に定まる．特に $p_*(\pi_1^r(H, w)) = \Gamma$ となる r-被覆 $p : (H, w) \to (G, v)$ は同型を除いて一意である．

特に偶数部分 $\pi_1^r(G, v)_{ev}$ に対応する r-被覆は Kronecker 二重被覆と呼ばれる特別なグラフである．その定義を述べるために，グラフのテンソル積について述べる．グラフ G と

H に対し，その積 $G \times H$ を

$$V(G \times H) = V(G) \times V(H),$$

$$E(G \times H) = \{((v,w),(v',w')) \mid (v,v') \in E(G),\ (w,w') \in E(H)\}$$

として定義する．このとき射影 $p_1 : G \times H \to G$ と $p_2 : G \times H \to H$ はグラフ準同型である．G 上の Kronecker 二重被覆とは，テンソル積 $K_2 \times G$ のことである．第二射影 $K_2 \times G \to G$ は任意の正の整数 r に対し r-被覆写像となる．

Kronecker 二重被覆に関してわかっていることを手短に述べる．G が連結のとき，$\chi(G) > 2$ なることと $K_2 \times G$ が連結であることは同値である．$\chi(G) = 2$ ならば $K_2 \times G$ は G の二つの直和である．

第一射影 $K_2 \times G \to G \to K_2$ はグラフ準同型であるから，$K_2 \times G$ は二彩色可能である．連結グラフ G で $\chi(G) > 2$ なるものに対し，G 上の二重被覆 H で $\chi(H) = 2$ なることと，$H = K_2 \times G$ となることは同値である．

例 4.2. 自然な射影によりグラフ準同型 $C_{km} \to C_m$ が定義される．これがいつ r-被覆写像になるのかを述べる．$k > 1$ とする．

まず $m = 2n$ とする．このとき $C_{km} \to C_m$ は $(n-1)$-被覆写像であるが，n-被覆写像ではない．$m = 2n+1$ のとき，$C_{2m} \to C_m$ は任意の正の整数 r に対し r-被覆写像である．一方，$k > 2$ のとき，$C_{km} \to C_m$ は $(m-1)$-被覆写像であるが m-被覆写像ではない．この記述と，サイクルの r-基本群の記述とを比べてみると，実際に定理 4.1 が成り立っていることが確かめられる．

例 4.3. n, k を正の整数で $n > k$ とする．もし $n > 2k+1$ ならば，$\pi_1^2(KG_{n,k})_{ev}$ は自明であるから，$r \geq 2$ に対し $KG_{n,k}$ 上の r-被覆は $KG_{n,k}$ 自身と $K_2 \times KG_{n,k}$ のみである．

$KG_{2k+1,k}$ 上には 3-被覆は $KG_{2k+1,k}$ および $K_2 \times KG_{2k+1,k}$ のみである．2-被覆はこの場合 1-被覆と同じであり，無限個存在する．

References

[1] W. Imrich, T. Pisanski, *Multiple Kronecker covering graphs*, European J. Combin. **29** (2008), 1116-1122.

[2] L. Lovász, *Kneser's conjecture, chromatic number, and homotopy,* J. Combin. Ser. A **25** (3) (1978), 319-324.

[3] T. Matsushita, *Fundamental groups of neighborhood complexes*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo **24** (2017), 321-353.

[4] E. R. Scheinerman, D. H. Ullman, *Fractional graph theory*, New York: Wiley-Interscience (1997)