数理解析研究所講究録
第2060巻 2018年 108-117

Group Actions on Hom Complexes

大阪大学理学研究科　小路史朗
Shiro Shoji
Gruduate School of Science, Osaka University

§1. はじめに

$G=(V,E)$ を有限単純グラフとする. $c:V\to\{1,\cdots,n\}$ が n-彩色であるとは,$uv\in E$ ならば $c(u)\neq c(v)$ を満たすときをいう. n-彩色が存在するような最小の $n\in\mathbb{Z}$ を G の彩色数といい $\chi(G)$ で表す. $\chi(G)$ は整数値のグラフ不変量である. $\chi(G)$ を求める問題を graph coloring problem という. graph coloring problem はグラフ理論においてよく研究されている古典的な問題である. この問題を解くには定義から下からの評価が重要になってくるが、これを求めるために代数トポロジーが応用された.

本稿では, Lovász によって定義された近傍複体と Hom 複体を紹介する. これらの位相的性質は, 与えられたグラフの彩色数と密接に関係している. §2 で近傍複体を用いた Kneser conjecture の証明を与え, 近傍複体が graph coloring problem を解くことに有効であることをみる. Kneser conjecture はグラフ理論の予想であったが, 純粋なグラフ理論や組み合わせ論の手法では証明できず, 代数トポロジーを用いて初めて証明された興味深い予想である. また, Kneser graph の近傍複体のホモトピー型についても触れる. §3 では, Hom 複体とそれについてのいくつかの性質を紹介し, §4 で具体的に Hom 複体の群作用がどのように振舞うかを考察する.

§2. 近傍複体と Kneser conjecture

このセクションでは Kneser graph と呼ばれるグラフの彩色数に関する予想 (Kneser conjecture) とそれを解くカギとなった近傍複体を紹介する. また, Kneser graph の近傍複体のホモトピー型についても述べる. まずは, Kneser graph を定義しよう.

定義 1 整数 n,k が $k\geq 1, n\geq 2k$ を満たすとする. 頂点集合を $\binom{\{1,\cdots,n\}}{k}:=\{\ u\subset\{1,\cdots,n\}\mid \sharp u=k\ \}$ とし, $u,v\in\binom{\{1,\cdots,n\}}{k}$ が $u\cap v=\emptyset$ を満たすとき u と v を辺で結ぶ. このようにして得られる有限単純グラフを **Kneser graph** といい, $\mathrm{KG}_{n,k}$ と表す.

定義から容易に分かるように, $k=1$ のとき $\mathrm{KG}_{n,1}$ は完全グラフ K_n になる. また, $\mathrm{KG}_{5,2}$ は Petersen graph になる.

Kneser graph $\mathrm{KG}_{n,k}$ の彩色数について考察してみよう. $c : V(\mathrm{KG}_{n,k}) = \binom{\{1,\cdots,n\}}{k} \to \{1,\cdots,n-2k+2\}$ を

$$c(u) := \min\{\min\{x \in u\},\ n-2k+2\}$$

と定めると, この c は $(n-2k+2)$-彩色になっている. よって, $\chi(\mathrm{KG}_{n,k}) \leq n-2k+2$ が分かる. 1955 年に Kneser がこの両者は実は等しいのではないかと予想し (Kneser conjecture), 1978 年に László Lovász が証明した:

定理 2 (Kneser, Lovász) $\chi(\mathrm{KG}_{n,k}) = n-2k+2$.

これを証明するために, Lovász が導入した近傍複体の定義とその位相と彩色数の関係を述べる.

定義 3 $G=(V,E)$ を有限単純グラフとする. 頂点集合が V で, 共通近傍をもつ V の部分集合を単体とするような単体複体 $N(G)$ を**近傍複体**という. ここで $A \subset V$ の共通近傍とは, 任意の $a \in A$ と隣接するような V の元のことである.

例えば, K_n を完全グラフとすると, $N(K_n)$ は標準 $(n-1)$-単体 Δ_{n-1} の boundary complex となる.

定理 4 (Lovász, 1978, [1]) 任意の有限単純グラフ G に対して, $|N(G)|$ が k-連結, すなわち任意の $l \in \{-1,\cdots,k\}$ に対して l 次元球面 S^l から $|N(G)|$ への連続写像が常に $l+1$ 次元円板 D^{l+1} へ拡張できれば, $\chi(G) \geq k+3$ が成り立つ.

証明の概略. まず, 次の 3 条件を満たすような $N(G)$ の 1 回の重心細分 $\mathrm{sd}N(G)$ の $\mathbb{Z}_2$-部分複体 $L(G)$ が存在する (具体的に構成できる):

(1) $|L(G)|$ は $|N(G)|$ と同じホモトピー型をもつ.

(2) $\mathbb{Z}_2$-同相 $\varphi : |L(K_n)| \to S^{n-2}$ が存在する.

(3) 任意のグラフ準同型 $f : G \to H$ は, $\mathbb{Z}_2$-写像 $L(f) : |L(G)| \to |L(H)|$ を誘導する.

$\chi(G)=m$ とするとグラフ準同型 $f : G \to K_m$ が存在する. $|N(G)|$ が k-連結なので, $L(G)$ の性質 (1) より $|L(G)|$ も k-連結である. このとき, 簡単な障害理論より $\mathbb{Z}_2$-写像 $\psi : S^{k+1} \to |L(G)|$ が存在することがわかる. $L(G)$ の性質 (2), (3) より次の $\mathbb{Z}_2$-写像の系列を得る:

$$S^{k+1} \xrightarrow{\psi} |L(G)| \xrightarrow{|L(f)|} |L(K_m)| \xrightarrow{\varphi} S^{m-2}.$$

Borsuk-Ulam の定理より $k+1 \leq m-2$, すなわち $m \geq k+3$ を得る. □

命題 5 $|N(\mathrm{KG}_{n,k})|$ は S^{n-2k} の wedge sum とホモトピー同値になる.

証明の概略. $F(N(\mathrm{KG}_{n,k}))$ で $N(\mathrm{KG}_{n,k})$ の face poset を表すことにする. 順序集合 $B_{n,k}$ を

$$B_{n,k} = \{\ S \subset \{1, \cdots, n\} \mid k \leq \sharp S \leq n-k\ \}$$

で定義する. $\Delta(F(N(\mathrm{KG}_{n,k})))$, $\Delta(B_{n,k})$ でそれぞれの順序複体を表すことにすると, $|N(\mathrm{KG}_{n,k})| = |\Delta(F(N(\mathrm{KG}_{n,k})))|$ と $|\Delta(B_{n,k})|$ は同じホモトピー型を持つことが示される. $B_{n,k}$ は shellable poset ゆえ, $|\Delta(B_{n,k})|$ は S^{n-2k} の wedge sum とホモトピー同値になる. □

命題5より $|N(\mathrm{KG}_{n,k})|$ は $(n-2k-1)$-連結である. よって定理4より, $\chi(\mathrm{KG}_{n,k}) \geq n-2k+2$ が得られる. これで Kneser conjecture(定理 2) が証明された.

ところで, 命題5において, $|N(\mathrm{KG}_{n,k})|$ とホモトピー同値になる S^{n-2k} の wedge sum を構成する S^{n-2k} の個数を $f_{n,k}$ とする, すなわち $|N(\mathrm{KG}_{n,k})| \simeq \bigvee_{f_{n,k}} S^{n-2k}$ とする. $f_{n,k}$ の値は一般には知られていなかったが, 筆者は $f_{n,k}$ の値を綺麗な形ではないが求めた:

定理 6 $|N(\mathrm{KG}_{n,k})| \simeq \bigvee_{f_{n,k}} S^{n-2k}$ とすると,

$$f_{n,k} = \sum_{0 \leq p,q \leq k-1} (-1)^{p+q} \binom{n}{p} \binom{n-p}{q}$$

となる.

証明の方針. $i = \{1, \cdots, n\}$ に対して, $N(\mathrm{KG}_{n,k})$ の部分複体 A_i を

$$A_i = \{\ A \in N(\mathrm{KG}_{n,k}) \mid \forall a \in A,\ i \notin a\ \}$$

と定義すると, $\bigvee_{f_{n,k}} S^{n-2k} \simeq |N(\mathrm{KG}_{n,k})| = \bigcup_{i=1}^{n} |A_i|$, $j = k, \cdots, n-k$ に対して $|A_{i_1}| \cap \cdots \cap |A_{i_j}|$ は可縮, $j \geq n-k+1$ に対して $|A_{i_1}| \cap \cdots \cap |A_{i_j}| = \emptyset$ となる. よって, inclusion-exclusion principle より A_i たちが互いに同型であることに注意すると, オイラー数 $e(\cdot)$ に関する等式

$$\begin{aligned}
(*)\quad & 1 + (-1)^n f_{n,k} \\
&= \binom{n}{1} e(|A_1|) - \binom{n}{2} e(|A_1| \cap |A_2|) + \cdots + (-1)^k \binom{n}{k-1} e(|A_1| \cap \cdots \cap |A_{k-1}|) \\
&\quad + (-1)^{k+1} \binom{n}{k} + \cdots + (-1)^{n-k+1} \binom{n}{n-k}
\end{aligned}$$

を得る. ここで, $|A_1| = (|A_1| \cap |A_2|) \cup (|A_1| \cap |A_3|) \cup \cdots \cup (|A_1| \cap |A_n|)$ なので, 再び inclusion-exclusion principle より, $e(|A_1|)$ は $e(|A_1| \cap |A_2|), \cdots, e(|A_1| \cap \cdots \cap |A_{k-1}|)$ を用いて次のように表すことができる:

$$e(|A_1|) = \binom{n-1}{1} e(|A_1| \cap |A_2|) - \cdots + (-1)^{k+1} \binom{n-1}{k-2} e(|A_1| \cap \cdots \cap |A_{k-1}|)$$
$$+ (-1)^k \binom{n-1}{k-1} + \cdots + (-1)^{n-k} \binom{n-1}{n-k-1}.$$

同様にして, $e(|A_1| \cap |A_2|)$ は $e(|A_1| \cap |A_2| \cap |A_3|), \cdots, e(|A_1| \cap \cdots \cap |A_{k-1}|)$ を用いて表すことができ, $e(|A_1| \cap |A_2| \cap |A_3|)$ は $e(|A_1| \cap |A_2| \cap |A_3| \cap |A_4|), \cdots, e(|A_1| \cap \cdots \cap |A_{k-1}|)$ を用いて表すことができ, …… と繰り返していくと, 等式 $(*)$ の右辺は $e(|A_1| \cap \cdots \cap |A_{k-1}|)$ を用いて記述できる. そして

$$e(|A_1| \cap \cdots \cap |A_{k-1}|) = \binom{n-k+1}{1} - \binom{n-k+1}{2} + \cdots + (-1)^n \binom{n-k+1}{n-2k+1}$$

であるから, 等式 $(*)$ の右辺の値が具体的に計算できる. □

§3. Hom 複体

§2 で近傍複体 $N(G)$ が graph coloring problem を解くことに貢献することをみた. このセクションでは, Hom 複体という概念とその例をいくつか述べ, Hom 複体も彩色数に関する情報を与えることを紹介する.

定義 7 $G = (V(G), E(H))$, $H = (V(H), E(H))$ を有限単純グラフとする. G から H への **multihomomorphism** とは, 写像 $\varphi : V(G) \to 2^{V(H)} \setminus \{\emptyset\}$ であって, 任意の $v \in V(G)$ に対して $f(v) \in \varphi(v)$ を満たすような写像 $f : V(G) \to V(H)$ が必ずグラフ準同型となるようなもののことをいう. G から H への multihomomorphism 全体の集合を **Hom 複体**といい, $\mathrm{Hom}(G, H)$ と表す.

multihomomorphism はグラフ準同型の一般化になっている. 実際, グラフ準同型 $f : V(G) \to V(H)$ があると, $\varphi : V(G) \to 2^{V(H)} \setminus \{\emptyset\}$ を $\varphi(v) := \{f(v)\}$ と定義するとよい. また, $\chi(G) > \chi(H)$ であれば $\mathrm{Hom}(G, H) = \emptyset$ となる.

Hom " 複体 " と呼ばれる理由は $\mathrm{Hom}(G, H)$ が次のようにして CW-複体と見なすことができるからである.

$\varphi \in \mathrm{Hom}(G, H)$ とする. まず, $2^{V(H)} \setminus \{\emptyset\}$ と $\Delta_{\sharp V(H)-1}$ の face 全体の集合が自然に同一視できることに注意する. この同一視の下で, 各 $v \in V(G)$ に対して $\varphi(v) (\subset V(H))$ は $\Delta_{\sharp V(H)-1}$ の face F_v^φ を定める. そして, φ と

$$\prod_{v \in V(G)} F_v^\varphi \left(\subset \prod_{v \in V(G)} \Delta_{\sharp V(H)-1} \right)$$

を同一視する. $\mathrm{Hom}(G,H)$ の幾何学的実現 $|\mathrm{Hom}(G,H)|$ を

$$|\mathrm{Hom}(G,H)| := \bigcup_{\varphi\in\mathrm{Hom}(G,H)} \Big(\prod_{v\in V(G)} F_v^{\varphi} \Big)$$

と定義する. このようにして $\mathrm{Hom}(G,H)$ に CW-複体の構造が入る.
この CW-構造に関して次が成り立っている:

- $\mathrm{Hom}(G,H)$ の頂点集合は G から H へのグラフ準同型からなる.
- $\varphi \leq \psi$ in $\mathrm{Hom}(G,H) \iff \forall u \in V(G),\ \varphi(u) \subset \psi(u)$.

例 8 $\mathrm{Hom}(K_2,K_3)$ について考えてみる. $V(K_2) = \{a,b\}$, $V(K_3) = \{1,2,3\}$ としよう. $\varphi \in \mathrm{Hom}(K_2,K_3)$ を $\varphi = (\varphi(a),\varphi(b))$ と座標のように表すことにする. $\mathrm{Hom}(K_2,K_3)$ の 0-cell は $(1,2)$, $(1,3)$, $(2,3)$, $(2,1)$, $(3,1)$, $(3,2)$ の 6 つ. 1-cell は $(1,23)$, $(12,3)$, $(2,13)$, $(23,1)$, $(3,12)$, $(13,2)$ の 6 つ. 2-cell 以上は出てこない. よって, 各 cell の繋がり方を考えると $|\mathrm{Hom}(K_2,K_3)|$ は六角形となることが分かる.
また, $|\mathrm{Hom}(K_2,K_4)|$ は 14 個の面 (三角形が 8 個, 四角形が 6 個) からなる多面体となることが分かる.

例 8 について, より一般に次が知られている:

事実 9 ([3]) $|\mathrm{Hom}(K_2,K_n)|$ は antipodal action が入った S^{n-2} と $\mathbb{Z}_2$-同相になる. ここで, $\mathbb{Z}_2 \curvearrowright |\mathrm{Hom}(K_2,K_n)|$ は K_2 の線対称軸による折り返し (reflection) $(a,b) \mapsto (b,a)$ から誘導されるものである.

もう一つ, 知られている事実を紹介する.

事実 10 ([4]) $|\mathrm{Hom}(C_5,K_n)|$ は Steifel manifold $V_{n-1,2} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}^{n-1} \mid ||x|| = ||y|| = 1,\ x\cdot y = 0\ \}$ と $\mathbb{Z}_2$-同相になる. ここで, C_5 は頂点数が 5 の cycle graph であり, $\mathbb{Z}_2 \curvearrowright |\mathrm{Hom}(C_5,K_n)|$ は C_5 の 1 つの線対称軸による折り返し (reflection) から誘導されるもの, $\mathbb{Z}_2 \curvearrowright V_{n-1,2}$ は $(x,y) \mapsto (x,-y)$ である.

Hom 複体についても, 近傍複体における定理 4 のような graph coloring problem を解くことに貢献する評価式が存在するので紹介しておこう.

事実 11 ([5]) 任意の有限単純グラフ G と正整数 $r \geq 1$ に対して, $|\mathrm{Hom}(C_{2r+1},G)|$ が k-連結であれば, $\chi(G) \geq k+4$ が成り立つ.

§4. $\mathbf{Hom}(K_3, K_4)$, $\mathbf{Hom}(K_3, K_5)$ の 3 次対称群 S_3-作用

S_3 を 3 次対称群とする. このセクションでは, $S_3 \curvearrowright |\mathrm{Hom}(K_3, K_4)|$, $S_3 \curvearrowright |\mathrm{Hom}(K_3, K_5)|$ がどのように振る舞うかをみる. また, そこから誘導されるホモロジー群への S_3-作用の表現行列についても述べる.

$V(K_3) = \{a, b, c\}$ とする. まず, S_3 は次のような表示をもつことに注意する:

$$S_3 = \langle\ x, y \mid x^3 = 1,\ y^2 = 1,\ xyxy = 1\ \rangle.$$

ここで, x は K_3 の時計回り $2/3\pi$ 回転 (clockwise rotation) を表し, y は a を通る K_3 の線対称軸による折り返し (reflaction) を表す. これらは $x,\ y : |\mathrm{Hom}(K_3, K_4)| \to |\mathrm{Hom}(K_3, K_4)|$, $|\mathrm{Hom}(K_3, K_5)| \to |\mathrm{Hom}(K_3, K_5)|$ を誘導し, この 2 つの生成元 x, y により $S_3 \curvearrowright |\mathrm{Hom}(K_3, K_4)|$, $S_3 \curvearrowright |\mathrm{Hom}(K_3, K_5)$ となる.

(1)$\mathbf{Hom}(K_3, K_4)$ について.

まず, $|\mathrm{Hom}(K_3, K_4)|$ のホモトピー型がどのようになるかを考察しよう. $V(K_4) = \{1, 2, 3, 4\}$ とする. 先程と同様に $\varphi \in \mathrm{Hom}(K_3, K_4)$ を $\varphi = (\varphi(a), \varphi(b), \varphi(c))$ と座標のように表すことにする. このとき,

- $(i, *, *)$-type の cell 全体は $\mathrm{Hom}(K_2, K_3)$, すなわち六角形を構成し,
- $(ij, *, *)$-type の cell 全体は $\mathrm{Hom}(K_2, K_2) \times I$, すなわち 2 線分を構成する.

$(i, *, *)$-type は $i = 1, 2, 3, 4$ の $\binom{4}{1}$ 個あるので, 六角形が $\binom{4}{1}$ 個出来る. $(ij, *, *)$-type は $\binom{4}{2}$ 個あるので, 2 線分が $\binom{4}{2}$ 個できる. この $\binom{4}{2}$ 個の 2 線分たちは各六角形を "橋渡し" するような形になっている. これにより空洞が $\binom{4}{2}$ 個できる. また, 3 つの六角形によって囲まれる空洞が $\binom{4}{3} - 1$ 個存在することが分かる. よって,

$$\begin{aligned} |\mathrm{Hom}(K_3, K_4)| &\simeq \bigvee_{\binom{4}{1}+\binom{4}{2}+(\binom{4}{3}-1)} S^1 \\ &= \bigvee_{13} S^1 \end{aligned}$$

となる. これより 1 次元ホモロジー群について,

$$H_1(|\mathrm{Hom}(K_3, K_4)|; \mathbb{Z}) \cong \bigoplus_{13} \mathbb{Z}$$

となる. $H_1(|\mathrm{Hom}(K_3, K_4)|; \mathbb{Z})$ の $13 = \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + (\binom{4}{3} - 1)$ 個の生成元を上のようにとる. $S_3 \curvearrowright |\mathrm{Hom}(K_3, K_4)|$ は自然に 1 次元ホモロジー群への作用 $S_3 \curvearrowright H_1(|\mathrm{Hom}(K_3, K_4)|; \mathbb{Z})$ を誘導する. この生成元に関する $S_3 \curvearrowright H_1(|\mathrm{Hom}(K_3, K_4)|; \mathbb{Z})$ の表現行列を計算すると次のようになった:

X_4, Y_4 をそれぞれ x_*, $y_*:\bigoplus_{13}\mathbb{Z}\to\bigoplus_{13}\mathbb{Z}$ に対する表現行列とすると,

$$X_4=\left[\begin{array}{cccc|cccccc|ccc}
-2&0&0&0&0&0&0&-1&-1&-1&1&1&1\\
-2&0&0&0&0&-1&-1&0&0&-1&1&1&0\\
-2&0&0&0&-1&0&-1&0&-1&0&1&0&1\\
-2&0&0&0&-1&-1&0&-1&0&0&0&1&1\\
\hline
1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&-1&-1&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&-1&0&-1\\
1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&-1&-1\\
1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&-1&0&0\\
1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&-1&0\\
1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&-1\\
\hline
-1&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\
-1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\
-1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1
\end{array}\right].$$

$$Y_4=\left[\begin{array}{cccc|cccccc|ccc}
1&0&0&0&1&1&1&0&0&0&1&1&1\\
0&1&0&0&1&0&0&1&1&0&1&1&0\\
0&0&1&0&0&1&0&1&0&1&1&0&1\\
0&0&0&1&0&1&0&1&1&0&0&1&1\\
\hline
0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0&-1&-1&0\\
0&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&-1&0&-1\\
0&0&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&-1&-1\\
0&0&0&0&0&0&0&-1&0&0&-1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&-1&0&0&-1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&0&0&-1\\
\hline
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1
\end{array}\right].$$

となる. この X_4, Y_4 は群の関係式 $X_4^3=E$, $Y_4^2=E$, $X_4Y_4X_4Y_4=E$ を確かに満たしていることが確認できる. また, x, $y:|\mathrm{Hom}(K_3,K_4)|\to|\mathrm{Hom}(K_3,K_4)|$ はともに free action なので Lefschetz の不動点定理より, $\mathrm{trace}X_4=1$, $\mathrm{trace}Y_4=1$ とならなければならないが, これも確かに満たされている.

(2)Hom(K_3,K_5) **について.**
まず, $|\mathrm{Hom}(K_3,K_4)|$ のときと全く同様にして, $|\mathrm{Hom}(K_3,K_5)|$ のホモトピー型を決定することができる. $V(K_5)=\{1,2,3,4,5\}$ とする. このとき,

- $(i,*,*)$-type の cell 全体は $\mathrm{Hom}(K_2,K_4)$, すなわち 14 面体を構成し,

- $(ij,*,*)$-type の cell 全体は $\mathrm{Hom}(K_2,K_3)\times I$, すなわち六角柱を構成し,
- $(ijk,*,*)$-type の cell 全体は $\mathrm{Hom}(K_2,K_2)\times\Delta_2$, すなわち 2 つの三角形を構成する.

$|\mathrm{Hom}(K_3,K_4)|$ のホモトピー型は S^1 の wedge sum となったが, $|\mathrm{Hom}(K_3,K_5)|$ のホモトピー型は次元が 1 つ上がり S^2 の wedge sum となる. その個数は $|\mathrm{Hom}(K_3,K_4)|$ のときと全く同様に数え上げることができ,

$$\begin{aligned}|\mathrm{Hom}(K_3,K_5)| &\simeq \bigvee_{\binom{5}{1}+\binom{5}{2}+\binom{5}{3}+(\binom{5}{4}-1)} S^2\\ &= \bigvee_{29} S^2\end{aligned}$$

となる. これより 2 次元ホモロジー群について,

$$H_2(|\mathrm{Hom}(K_3,K_5)|;\mathbb{Z}) \cong \bigoplus_{29}\mathbb{Z}$$

となる. $H_2(|\mathrm{Hom}(K_3,K_5)|;\mathbb{Z})$ の $29=\binom{5}{1}+\binom{5}{2}+\binom{5}{3}+(\binom{5}{4}-1)$ 個の生成元を $H_1(|\mathrm{Hom}(K_3,K_4)|;\mathbb{Z})$ の生成元をとったときと同様にとる. この生成元に関する $S_3 \curvearrowright H_2(|\mathrm{Hom}(K_3,K_5)|;\mathbb{Z})$ の表現行列を計算すると次のようになった:

X_5, Y_5 をそれぞれ x_*, y_* : $\bigoplus_{29}\mathbb{Z}\to\bigoplus_{29}\mathbb{Z}$ に対する表現行列とすると,

$$X_5 = \begin{array}{c}
\hspace{4em}\overbrace{\hphantom{0\quad 0\quad \cdots\quad 0\quad 0}}^{10\text{ 列分}}\hspace{22em}\\
\left[\begin{array}{rrrrr|rrcrr|rrrrrrrrrr|rrrr}
-3&0&0&0&0&0&0&\cdots&0&0&3&3&3&3&3&3&-1&-1&-1&-1&-2&-2&-2&-2\\
-3&0&0&0&0&0&0&\cdots&0&0&3&3&3&2&2&2&0&0&0&-1&-2&-2&-2&0\\
-3&0&0&0&0&0&0&\cdots&0&0&3&2&2&3&3&2&0&0&-1&0&-2&-2&0&-2\\
-3&0&0&0&0&0&0&\cdots&0&0&2&3&2&3&2&3&0&-1&0&0&-2&0&-2&-2\\
-3&0&0&0&0&0&0&\cdots&0&0&2&2&3&2&3&3&-1&0&0&0&0&-2&-2&-2\\
\hline
-1&0&0&0&0&0&0&\cdots&0&0&1&1&1&1&1&1&0&0&0&-1&-1&-1&-1&0\\
-1&0&0&0&0&0&0&\cdots&0&0&1&1&1&1&1&1&0&0&-1&0&-1&-1&0&-1\\
-1&0&0&0&0&0&0&\cdots&0&0&1&1&1&1&1&1&0&-1&0&0&-1&0&-1&-1\\
-1&0&0&0&0&0&0&\cdots&0&0&1&1&1&1&1&1&-1&0&0&0&0&-1&-1&-1\\
-1&0&0&0&0&0&0&\cdots&0&0&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&-1&-1&0&0\\
-1&0&0&0&0&0&0&\cdots&0&0&1&1&1&1&0&1&0&0&0&0&-1&0&-1&0\\
-1&0&0&0&0&0&0&\cdots&0&0&1&1&1&0&1&1&0&0&0&0&0&-1&-1&0\\
-1&0&0&0&0&0&0&\cdots&0&0&1&1&0&1&1&1&0&0&0&0&-1&0&0&-1\\
-1&0&0&0&0&0&0&\cdots&0&0&1&0&1&1&1&1&0&0&0&0&0&-1&0&-1\\
-1&0&0&0&0&0&0&\cdots&0&0&0&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&-1&-1\\
\hline
-1&0&0&0&0&0&0&\cdots&0&1&1&1&1&1&1&0&0&0&-1&-1&-1&-1&0&0\\
-1&0&0&0&0&0&0&\cdots&1&0&1&1&1&1&0&1&0&-1&0&-1&-1&0&-1&0\\
-1&0&0&0&0&0&0&\cdots&0&0&1&1&1&0&1&1&-1&0&0&-1&0&-1&-1&0\\
-1&0&0&0&0&0&0&\cdots&0&0&1&1&0&1&1&1&0&-1&-1&0&-1&0&0&-1\\
-1&0&0&0&0&0&0&\cdots&0&0&1&0&1&1&1&1&-1&0&-1&0&0&-1&0&-1\\
-1&0&0&0&0&0&0&\cdots&0&0&0&1&1&1&1&1&-1&-1&0&0&0&0&-1&-1\\
-1&0&0&0&0&0&0&\cdots&0&0&1&1&0&1&0&0&0&0&0&0&-1&0&0&0\\
-1&0&0&0&0&0&0&\cdots&0&0&1&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&-1&0&0\\
-1&0&0&0&0&0&1&\cdots&0&0&0&1&1&0&0&1&0&0&0&0&0&0&-1&0\\
-1&0&0&0&0&1&0&\cdots&0&0&0&0&0&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&-1\\
\hline
-1&0&0&0&1&0&0&\cdots&0&0&1&1&0&1&0&0&0&-1&-1&-1&-1&0&0&0\\
-1&0&0&1&0&0&0&\cdots&0&0&1&0&1&0&1&0&-1&0&-1&-1&0&-1&0&0\\
-1&0&1&0&0&0&0&\cdots&0&0&0&1&1&0&0&1&-1&-1&0&-1&0&0&-1&0\\
-1&1&0&0&0&0&0&\cdots&0&0&0&0&0&1&1&1&-1&-1&-1&0&0&0&0&-1
\end{array}\right]
\end{array}.$$

$Y_5 =$

$$\left[\begin{array}{ccc|cccccccccc|cccccccccc|cccc}
-1 & \cdots & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\
0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 2 & 2 & 2 & 0 \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 2 & 2 & 0 & 2 \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 2 & 0 & 2 & 2 \\
0 & \cdots & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 2 & 2 & 2 \\
\hline
0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
\hline
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right].$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{5\,\text{列分}}$$

となる. この X_5, Y_5 は X_4, Y_4 のときと同様に, 群の関係式の条件 $X_5^3 = E$, $Y_5^2 = E$, $X_5Y_5X_5Y_5 = E$ と, Lefschetz の不動点定理の条件 $\mathrm{trace}X_5 = -1$, $\mathrm{trace}Y_5 = -1$ を確かに満たしていることが確認できる.

参考文献

[1] László Lovász, *Kneser's conjecture, chromatic number and homotopy*, J.Combinatorial Theory, Ser.A 25(1978), 319-324.

[2] Mark de Longueville, *A Course in Topological Combinatrics*, Springer Science+Business Media New York, 2013.

[3] Babson, Kozlov, *COMPLEXES OF GRAPH HOMOMORPHISMS*, arXiv:math/0310056v4[math.CO] 26 Mar 2005.

[4] James Dover, Murad Özaydin, *Steifel manifold and coloring the pentagon*, Journal of Combinatorial Theory, Series A 121 (2014) 74-88

[5] Babson, Kozlov, *PROOF OF THE LOVÁSZ CONJECTURE*, arXiv:math/0402395v3[math.CO] 18 Jul 2005.