

変数間依存性を解消する変換を導入したブレンド交叉の提案

広島修道大学商学部
Faculty of Commercial Sciences, Hiroshima Shudo University
高島 節子 (Setsuko Sakai)
広島市立大学大学院 情報科学研究科 高濱 徹行 (Tetsuyuki Takahama)
Graduate School of Information Sciences, Hiroshima City University

1 はじめに

進化的アルゴリズム (Evolutionary Algorithm, EA) は、生物進化の過程をモデル化した最適化アルゴリズムの総称であり、遺伝的アルゴリズム (Genetic Algorithm, GA)[1], 進化戦略 (Evolution Strategy, ES), 差分進化 (Differential Evolution, DE)[2] など多くのアルゴリズムが提案されている。EA は、最適化の対象である目的関数の値だけを利用して解を求めることができる直接探索法であり、アルゴリズムの実装が容易であることから、様々な最適化問題を解くために利用されている。

EAにおける重要な操作として交叉 (crossover) がある。交叉は複数の親個体から子個体を生成する操作であり、様々な交叉が提案されている。本研究では、遺伝子を実数値とする実数値進化的アルゴリズム (real-coded EA) における交叉を対象とする。最適化アルゴリズムにおける性質の一つに回転不変性 (rotation-invariant) がある。回転不変性を有するアルゴリズムは、変数分離型問題を解くのと同じように変数間に強い依存性がある問題を解くことができると考えられる。

実数値進化的アルゴリズムにおける代表的な交叉の特徴を表1に示す。

表 1: 交叉の比較

交叉	親個体	座標系	回転不変
BLX- α , SBX	2親	直交座標	無
RIX, EIG	2親	個体集団から構成する直交座標	有
OBX	2親	個体集団から構成する斜交座標	有
SPX, REX	多親	個体集団から構成する斜交座標	有
本研究	2親	変数依存性の弱い空間で交叉し、空間を戻す	有

2親交叉であるBLX- α (Blend Crossover)[3] およびSBX (Simulated Binary Crossover)[4] は遺伝子座、すなわち問題の次元毎にそれぞれ一様分布および多項式分布に基づいて子個体を生成する。これらの交叉は次元毎に分布を定めるため、回転不変性を持たず、次元間の依存関係が強い問題に対応するのは困難である。回転不変性を有する2親交叉としては、個体集団から直交座標系を構成し、その座標軸毎に交叉操作を行う交叉が提案されている。RIX (Rotation-Invariant Crossover)[5] は個体集団の重心から各個体へ向かうベクトルの集合を生成し、ランダム選択されたベクトルからグラム・シュミットの直交化によって直交座標系を構成する。EIG (Eigen vector-based crossover)[6] は個体集団の分散共分散行列から得られた固有ベクトルを直交座標系として用いている。OBX (Oblique crossover)[7] は、ランダムに選択した個体間の差分ベクトルを座標軸とする斜交座標系を構成し、2親を含む拡張領域に子個体を生成する。個体集団の回転により座標系も回転するため回転不変性を有している。多親交叉であるSPX (Simplex Crossover)[8] およびREX (Real-Coded Ensemble Crossover)[9] では、親個体集合を選択し、その重心から各親個体に向かうベクトルを軸として一様分布や正規分布に基づいて子個体を生成する。これらの軸は直交していないため、斜交座標系を用いていることになる。個体集団の回転により斜交座標も回転するため回転不変性を有している。しかし、子個体が個体集団の中心に生成されやすい傾向があるため、多様性が失われやすく、個体集団の外側における探索能力が低下するという問題がある。

本研究では、変数依存性を弱めるために空間を変換し、変換された空間上で変数分離型問題に強い BLX- α を適用するという方法を提案する。まず、個体集団の分散共分散行列に Cholesky 分解を適用することによって変換行列を求め、個体集団に変換行列を適用して変数間依存性のない空間に変換する。次に、変換空間において BLX- α を適用し、変換空間における子個体を求める。最後に子個体を元の空間に戻す。提案手法 TBLX- α (Transformed Blend Crossover) では、変数間依存性の無いあるいは低い状態で BLX- α を適用し、元の空間に戻すという方法を採用しているため、変数間依存性が高い問題における性能が低下しにくいと期待できる。本手法を単峰性、多峰性、回転問題などを含む 13 のベンチマーク関数に適用し、その性質を調べる。

本論文の構成は次の通りである。2. で代表的な交叉について簡単に説明する。3. で提案手法 TBLX- α について説明する。4. にベンチマーク関数に関する実験結果を示す。5. はまとめである。

2 交叉

2.1 2 親交叉

2 親交叉では、集団から 2 個体の親 p , q が選択され、交叉によって子が生成される。ここでは、BLX- α について説明する。

BLX- α は、2 つの親が構成する超直方体を拡張した領域に子を生成する交叉であり、子 x' は以下のように生成される。

$$x'_j = r_j p_j + (1 - r_j) q_j, \quad j = 1, 2, \dots, D \quad (D \text{ は次元数}) \quad (1)$$

r_j は区間 $[-\alpha, 1 + \alpha]$ の一様乱数であり、次元毎に独立に生成される。拡張率 α ($\alpha \geq 0$) は、2 親が対角位置にある超直方体をどれだけ拡張するかを指定するパラメータである。もし α が 0 ならば、2 親が構成する超直方体の内部に子が生成される。2 次元における BLX- α の様子を図 1 に示す。

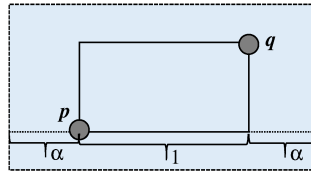


図 1: BLX- α によって子が生成される領域

2.2 多親交叉

多親交叉とは、UNDX(Unimodal Normal Distribution Crossover)[10], SPX[11], REX[12] のように 2 つ以上の親を利用する交叉である。ここでは、REX について説明する。

REX は回転不変性及びスケール不変性を有する交叉である。REX では、集団から重複なしにランダムに選択された複数の親から子個体を生成する。親個体集合を $\{x^1, x^2, \dots, x^m\}$ とし、その重心を x^g とすると、子個体 x' は以下のように生成される。

$$x' = x^g + \sum_{i=1}^m \xi^i (x^i - x^g) \quad (2)$$

$$\xi^i \sim \phi(0, \sigma_\xi^2), \quad \sigma_\xi^2 = \frac{1}{m} \quad (3)$$

$$x^g = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x^i \quad (4)$$

ここで、 m は親の数 ($m \geq D$) (D は次元数), ξ^i は $\phi(\cdot)$ に従う乱数, $\phi(0, \sigma_\xi^2)$ は平均 0, 分散 σ_ξ^2 の確率分布である。 $\phi(\cdot)$ の例は以下の通りである。

$$\phi(0, \sigma^2) = N(0, (\sqrt{1/m})^2) \quad (5)$$

$$\phi(0, \sigma^2) = U(-\sqrt{3/m}, \sqrt{3/m}) \quad (6)$$

ここで、 N は正規分布, $U(l, r)$ は区間 $[l, r]$ の一様分布である。 図 2 に一様乱数を用いた 2 次元 3 親 ($D = 2, m = 3$) の場合を示す。



図 2: REX によって生成された子の例

3 変数間依存性を解消するブレンド交叉

本研究では、変数間依存性を弱めるために空間を変換し、変換された空間上で変数分離型問題に強い BLX- α を適用するブレンド交叉 TBLX- α (Transformed Blend Crossover) を提案する。TBLX- α では、個体集団 $P = \{\mathbf{x}^i \mid i = 1, 2, \dots, N\}$ を用いて 2 親 \mathbf{x}^p と \mathbf{x}^q から子 \mathbf{x}' を生成する。生成手順は次の通りである。個体集団の分散共分散行列に Cholesky 分解を適用することによって変換行列を求める。変換行列を用いて親個体を変数間依存性のない空間に変換する。次に、変換空間において BLX- α を適用し、変換空間における子個体を生成する。最後に、得られた子個体を元の空間に戻す。以下の節で詳細を説明する。

3.1 Cholesky 分解

Cholesky 分解とは、正定値エルミート行列を下三角行列とその共役転置行列の積に分解することであるが、ここでは実対称行列を対象とする。正定値実対称行列 A は以下のように下三角行列 L とその転置行列 L^T に分解できる。

$$A = LL^T \quad (7)$$

$A = (a_{ij})$, $L = (l_{ij})$ とすると、 L は下三角行列であるので、以下が成立する。

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \sum_{k=1}^D l_{ik} l_{jk} \\ &= \sum_{k=1}^{\min\{i,j\}} l_{ik} l_{jk} \quad (i, j = 1, 2, \dots, D) \end{aligned} \quad (8)$$

ただし、 D は問題の次元数である。したがって、 L は以下のように求めることができる。

$$a_{ii} = \sum_{k=1}^i l_{ik}^2 \quad (i = 1, 2, \dots, D) \quad (9)$$

$$l_{ii} = \pm \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2} \quad (10)$$

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^j l_{ik}l_{jk} \quad (i = 2, 3, \dots, D, j < i) \quad (11)$$

$$l_{ij} = (a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}l_{jk})/l_{jj} \quad (12)$$

$$l_{ij} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, D-1, j > i) \quad (13)$$

3.2 分散共分散行列と Cholesky 分解

確率変数ベクトル \mathbf{x} の期待値を $E[\mathbf{x}]$ で表現する。 \mathbf{x} が正規分布 $N(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ に従うと仮定すると以下が成立する。

$$\boldsymbol{\mu} = E[\mathbf{x}] \quad (14)$$

$$\Sigma = E[(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T] \quad (15)$$

ただし、 $\boldsymbol{\mu}$ は平均ベクトル、 Σ は分散共分散行列である。

Σ に Cholesky 分解を適用し、求めた下三角行列 L を用いて以下の変換を行うことを考える。

$$\Sigma = LL^T \quad (16)$$

$$\mathbf{y} = L^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \quad (17)$$

\mathbf{y} の平均ベクトルは以下ようになる。

$$E[\mathbf{y}] = E[L^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})] = L^{-1}(E[\mathbf{x}] - \boldsymbol{\mu}) = \mathbf{0} \quad (18)$$

\mathbf{y} の分散共分散行列 $E[(\mathbf{y} - E[\mathbf{y}])(\mathbf{y} - E[\mathbf{y}])^T] = E[\mathbf{y}\mathbf{y}^T]$ は以下ようになる。

$$\begin{aligned} E[\mathbf{y}\mathbf{y}^T] &= E[L^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})(L^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}))^T] \\ &= L^{-1}E[(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T](L^{-1})^T \\ &= L^{-1}\Sigma(L^{-1})^T = L^{-1}(LL^T)(L^T)^{-1} = I \end{aligned} \quad (19)$$

ただし、 I は単位行列である。

この変換によって、 \mathbf{y} は正規分布 $N(0, I)$ に従うことになる。したがって、変数間の依存関係はなくなると考えられる。

3.3 提案する交叉 TBLX- α

提案する交叉 TBLX- α (BLX with transformation) の手順を以下に示す。

1. 個体集団から平均ベクトル $\boldsymbol{\mu}$ と分散共分散行列 Σ を計算し、変換行列 L と L^{-1} を求める。
2. 個体集団から 2 親 $\mathbf{x}^p, \mathbf{x}^q$ を選択する。
3. 親を変換する。

$$\mathbf{y}^p = L^{-1}(\mathbf{x}^p - \boldsymbol{\mu}), \mathbf{y}^q = L^{-1}(\mathbf{x}^q - \boldsymbol{\mu}) \quad (20)$$

4. \mathbf{y}^p と \mathbf{y}^q を BLX- α で交叉し、 \mathbf{y}' を求める。
5. \mathbf{y}' を逆変換して子 \mathbf{x}' を生成する。

$$\mathbf{x}' = L\mathbf{y}' + \boldsymbol{\mu} \quad (21)$$

図 3 に変数分離型問題における交叉の様子、図 4 に変数依存型問題における交叉の様子を示す。左図が元の空間における交叉の様子であり、個体の分布 (+)、親の範囲 (内側の長方形)、BLX- α の拡張範囲 (外側の長方形) および交叉によって生成された子個体の分布 (×) である。右図が変換後の空間における個体、親の範囲、拡張範囲および子個体である。

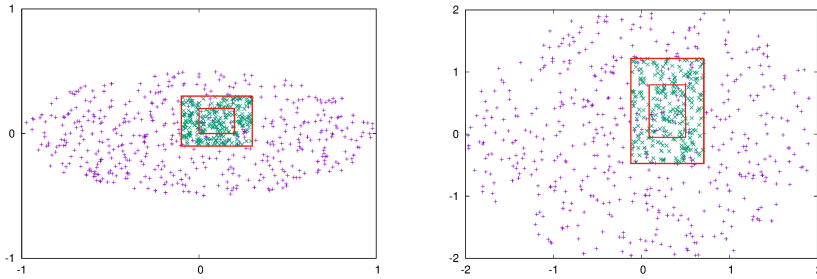


図 3: 変数分離型問題における TBLX- α による交叉の例

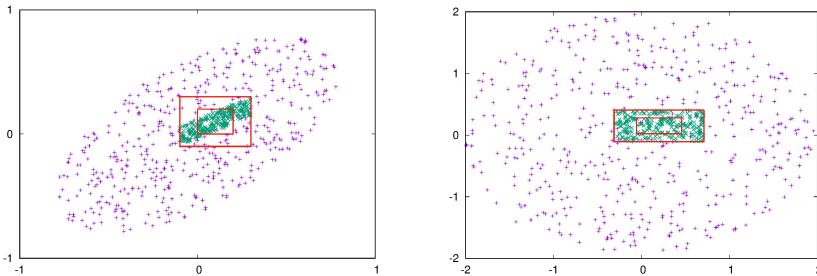


図 4: 変数依存型問題における TBLX- α による交叉の例

3.4 TBLX- α を用いる実数値 GA

本研究における TBLX- α を用いる実数値 GA の擬似コードを図 5 に示す。各個体を必ず親の一つとして選択し、子が良ければ親と置換するという差分進化と同様の方法を採用している。

4 実験

4.1 テスト問題

本実験では、単峰性関数である Sphere, Schwefel 2.22, Schwefel 1.2, Schwefel 2.21, 2 次元及び 3 次元では単峰性関数であるが多次元では多数の極小値を持つ関数である Rosenbrock, 不連続関数である step, 雑音を持つ関数である noisy quartic, 多峰性関数である Schwefel 2.26, Rastrigin, Ackley, Griewank 及び 2 つのペナルティ付き関数を用いる [13]。

回転に対する性能を調べるために、得られた解候補を z とし、 $x = Mz$ により変換し、 $f(x)$ の最小値を求める。ここで、 M は回転行列であり、本研究では式 (22) で表す Helmert 行列を用いた。

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{D}} & \frac{1}{\sqrt{D}} & \frac{1}{\sqrt{D}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{D}} & \frac{1}{\sqrt{D}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & \frac{-(D-2)}{\sqrt{(D-2)+(D-2)^2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{(D-1)+(D-1)^2}} & \frac{1}{\sqrt{(D-1)+(D-1)^2}} & \frac{1}{\sqrt{(D-1)+(D-1)^2}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{(D-1)+(D-1)^2}} & \frac{-(D-1)}{\sqrt{(D-1)+(D-1)^2}} \end{pmatrix} \quad (22)$$

```

GA with TBLX- $\alpha$ ()
{
// Initialize a population
P=N individuals generated randomly in S;
FE=FE+N;
for(t=1; FE < FEmax; t++) {
( $\mu, \Sigma$ )=Mean and covariance matrix of P;
L=Cholesky decomposition of  $\Sigma$ ;
L-1=Inverse matrix of L;
for(i=1; i ≤ N; i++)  $y_i=L^{-1}(x_i - \mu)$ ;
Q={ $y_i$ };
for(i=1; i ≤ N; i++) {
 $y^r$ =randomly selected from Q s.t.  $r \neq i$ .
 $y^g$ =generated from  $y_i$  and  $y_r$  by BLX- $\alpha$ ;
 $x^g=L y^g + \mu$ ;
FE=FE+1;
// Survivor selection
if( $f(x^g) < f(x_i)$ )  $z_i = x^g$ ;
else  $z_i = x_i$ ;
}
P = { $z_i$ };
}

```

図 5: TBLX- α を用いた実数値 GA の擬似コード

次元数 $D = 30$ に設定し、個体数 $N = 100$ 、最大関数評価回数は文献 [14] に基づいて決定した。各関数について 50 回の試行を行い、結果を比較する。

4.2 パラメータ α の効果

回転なしの実験および Helmert 行列によって回転した実験の結果を表 2 と表 3 に示す。各関数に対して、各試行における最良値の平均値と標準偏差を示した。さらに、Wilcoxon signed rank test を行い、TBLX- α が BLX- α に対して有意に優れていた場合に +、有意に劣っていた場合に -、有意差がない場合に = を付与した。なお、有意水準 5% の場合は +, -, 有意水準 1% の場合は ++, -- で表現している。

回転なしの問題では、TBLX- α は $\alpha = 0.5$ のときに最良の結果となっており、 f_3, f_6, f_7 の 3 関数で BLX- α よりも有意に優れているが、9 関数で有意に劣っている。回転ありの問題でも、TBLX- α は $\alpha = 0.5$ のときに最良の結果となっており、 $f_3, f_6, f_7, f_8, f_{12}, f_{13}$ の 6 関数で BLX- α よりも有意に優れており、6 関数で有意に劣っている。したがって、TBLX- α は回転なしの問題よりも回転ありの問題に対してより良い結果となっているが、回転あり問題でも BLX- α と同等の性能であり、優れた性能を示すことはできなかった。

5 おわりに

本研究では、変数依存性のある問題空間を変数依存性の無いあるいは弱い問題空間に変換し、変換空間上で BLX- α を適用するという交叉である TBLX- α を提案した。TBLX- α において、拡張率 α を調整したが、それだけでは良い性能を示すことはできなかった。

今後は、TBLX- α で変数間の強い依存関係に対応し、BLX- α で多様性を確保するために、TBLX- α と BLX- α を確率的に併用する方法や問題によって TBLX- α と BLX- α の適切な比率を動的に調整する方法について検討する。また、TBLX- α 単独でも BLX- α より優れた結果が得られるように BLX- α 以外の交叉を用いる方法などについて検討する予定である。また、TBLX- α は 2 つのベクトルをブレンドする仕組みを有するアルゴリズムであることから、例えば Particle Swarm Optimization などに応用可能であると考えられるため、実数値 GA 以外のアルゴリズムへの導入を検討したいと考えている。

表 2: BLX- α と TBLX- α に対する α の影響 (回転なし問題の場合)

	BLX-0.5	TBLX-0.5	TBLX-0.6	TBLX-0.7	TBLX-0.8
f_1	8.24e-42 ± 4.80e-42	1.09e-40 ± 9.14e-41	1.07e-24 ± 6.05e-25	2.96e-14 ± 1.55e-14	2.12e-07 ± 7.53e-08
f_2	5.80e-35 ± 2.42e-35	3.86e-31 ± 1.05e-30	1.03e-20 ± 5.35e-21	2.55e-12 ± 1.56e-12	2.31e-06 ± 1.20e-06
f_3	1.56e-02 ± 1.04e-02	2.32e-04 ± 8.05e-04	8.67e-90 ± 9.75e-90	4.50e-56 ± 4.64e-56	8.08e-34 ± 8.21e-34
f_4	7.21e-20 ± 9.80e-20	3.14e-01 ± 2.42e-01	4.93e-03 ± 1.19e-02	2.28e-04 ± 4.10e-04	1.11e-03 ± 2.19e-03
f_5	2.96e+01 ± 1.68e+01	2.89e+01 ± 9.43e+00	1.73e+01 ± 2.13e+00	8.94e+00 ± 1.76e+00	1.12e+01 ± 2.03e+00
f_6	5.92e+01 ± 1.02e+01	4.88e+01 ± 8.58e+00	6.73e+02 ± 1.29e+02	3.62e+03 ± 6.02e+02	1.14e+04 ± 2.18e+03
f_7	1.74e-03 ± 4.54e-04	1.27e-03 ± 4.73e-04	1.48e-03 ± 4.80e-04	2.23e-03 ± 6.39e-04	4.15e-03 ± 1.03e-03
f_8	5.54e+03 ± 1.03e+03	6.46e+03 ± 1.68e+03	6.87e+03 ± 1.25e+03	7.33e+03 ± 5.04e+02	7.37e+03 ± 5.14e+02
f_9	6.48e+01 ± 2.81e+01	1.39e+02 ± 2.30e+01	1.63e+02 ± 9.23e+00	1.77e+02 ± 1.06e+01	1.94e+02 ± 1.08e+01
f_{10}	1.36e-06 ± 2.90e-07	1.95e-06 ± 5.23e-07	1.01e-03 ± 1.79e-04	7.61e-02 ± 1.31e-02	2.34e+00 ± 2.51e-01
f_{11}	1.48e-04 ± 1.04e-03	1.48e-04 ± 1.04e-03	4.62e-05 ± 1.96e-05	1.47e-01 ± 4.64e-02	1.09e+00 ± 2.15e-02
f_{12}	2.50e-11 ± 2.23e-11	6.18e-11 ± 6.72e-11	7.86e-06 ± 4.81e-06	7.42e-02 ± 9.86e-02	7.14e+00 ± 1.96e+00
f_{13}	3.83e-10 ± 2.81e-10	2.20e-04 ± 1.54e-03	2.94e-04 ± 1.54e-03	3.18e-01 ± 1.26e-01	2.21e+01 ± 4.79e+00
+	—	3	3	2	2
=	—	1	0	0	0
-	—	9	10	11	11

表 3: BLX- α と TBLX- α に対する α の影響 (回転あり問題の場合)

	BLX-0.5	TBLX-0.5	TBLX-0.6	TBLX-0.7	TBLX-0.8
f_1	8.24e-42 ± 4.80e-42	1.09e-40 ± 9.14e-41	1.07e-24 ± 6.05e-25	2.96e-14 ± 1.55e-14	2.12e-07 ± 7.53e-08
f_2	1.28e-02 ± 6.48e-02	2.78e-02 ± 6.97e-02	1.01e-15 ± 6.39e-15	6.99e-11 ± 3.54e-11	2.45e-05 ± 1.72e-05
f_3	2.39e-02 ± 4.17e-02	7.42e-04 ± 2.01e-03	6.13e-90 ± 7.35e-90	4.12e-56 ± 4.32e-56	7.57e-34 ± 5.32e-34
f_4	1.57e-21 ± 5.94e-21	1.39e-01 ± 1.07e-01	1.60e-03 ± 4.23e-03	3.46e-05 ± 8.06e-05	2.61e-04 ± 7.44e-04
f_5	3.32e+01 ± 2.06e+01	2.98e+01 ± 7.82e+00	1.94e+01 ± 3.35e+00	1.16e+01 ± 2.15e+00	1.23e+01 ± 1.14e+00
f_6	6.01e+01 ± 1.37e+01	4.74e+01 ± 9.71e+00	6.53e+02 ± 1.15e+02	3.79e+03 ± 8.18e+02	1.17e+04 ± 1.95e+03
f_7	1.75e-03 ± 3.55e-04	1.20e-03 ± 4.29e-04	1.31e-03 ± 4.43e-04	2.01e-03 ± 6.06e-04	3.95e-03 ± 1.02e-03
f_8	7.56e+03 ± 3.21e+02	3.92e+03 ± 1.92e+03	4.11e+03 ± 1.47e+03	4.39e+03 ± 1.41e+03	4.88e+03 ± 1.33e+03
f_9	1.31e+02 ± 1.73e+01	1.51e+02 ± 1.51e+01	1.69e+02 ± 8.68e+00	1.82e+02 ± 9.07e+00	1.98e+02 ± 1.01e+01
f_{10}	1.54e-06 ± 3.12e-07	2.10e-06 ± 4.89e-07	1.07e-03 ± 2.01e-04	8.08e-02 ± 1.60e-02	2.43e+00 ± 2.45e-01
f_{11}	1.32e-05 ± 8.45e-05	1.12e-06 ± 2.67e-06	1.39e-04 ± 5.55e-05	2.15e-01 ± 7.09e-02	1.09e+00 ± 2.17e-02
f_{12}	8.36e-06 ± 2.76e-06	1.11e-07 ± 1.47e-07	3.62e-05 ± 2.11e-05	6.91e-02 ± 4.59e-02	5.02e+00 ± 1.41e+00
f_{13}	1.16e-05 ± 3.21e-06	1.67e-06 ± 5.30e-06	6.14e-04 ± 3.40e-04	1.68e-01 ± 4.96e-02	1.58e+01 ± 3.49e+00
+	—	6	5	4	3
=	—	1	0	0	1
-	—	6	8	9	9

謝辞

本研究は、JSPS 科研費 26350443, 17K00311 の助成を受けて行われた。

参考文献

- [1] Goldberg, D. E.: *Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning*, Addison Wesley (1989).
- [2] Storn, R. and Price, K.: Differential Evolution – A Simple and Efficient Heuristic for Global Optimization over Continuous Spaces, *Journal of Global Optimization*, Vol. 11, pp. 341–359 (1997).
- [3] Eshelman, L. J. and Schaffer, J. D.: Real-Coded Genetic Algorithms and Interval Schemata, in Whitley, L. D. ed., *Foundations of Genetic Algorithms 2*, pp. 187–202, Morgan Kaufmann Publishers, San Mateo, CA (1993).
- [4] Deb, K. and Agrawal, R. B.: Simulated binary crossover for continuous search space, *Complex systems*, Vol. 9, No. 2, pp. 115–148 (1995).
- [5] Takahama, T. and Sakai, S.: Solving Nonlinear Optimization Problems by Differential Evolution with a Rotation-Invariant Crossover Operation using Gram-Schmidt process, in *Proc. of Second World Congress on Nature and Biologically Inspired Computing (NaBIC2010)*, pp. 533–540 (2010).
- [6] Guo, S.-M. and Yang, C.-C.: Enhancing differential evolution utilizing eigenvector-based crossover operator, *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, Vol. 19, No. 1, pp. 31–49 (2015).
- [7] 高濱徹行, 阪井節子: 斜交座標系に基づく回転不変なブレンド交叉の提案, 情報処理学会研究報告, Vol. 2017-MPS-113, pp. 1–6 (2017).
- [8] 樋口隆英, 筒井茂義, 山村雅之: 実数値 GA におけるシンプレクス交叉の提案, 人工知能学会誌, Vol. 16, No. 3, pp. 147–155 (2001).
- [9] 秋本洋平, 永田裕一, 佐久間淳, 小野功, 小林重信: 適応的実数値交叉 AREX の提案と評価, 人工知能学会誌, Vol. 26, No. 6, pp. 446–458 (2009).
- [10] Ono, I. and Kobayashi, S.: A Real Coded Genetic Algorithm for Function Optimization Using Unimodal Normal Distributed Crossover, in *Proc. of the 7th International Conference on Genetic Algorithms*, pp. 246–253 (1997).
- [11] Tsutsui, S., Yamamura, M. and Higuchi, T.: Multi-Parent Recombination with Simplex Crossover in Real Coded Genetic Algorithms, in *Proc. of Genetic and Evolutionary Computation Conference (GECCO'99)*, pp. 657–664 (1999).
- [12] Kobayashi, S.: The Frontiers of Real-Coded Genetic Algorithms, *Journal of Japanese Society for Artificial Intelligence*, Vol. 24, No. 1, pp. 147–162 (2009), in Japanese.
- [13] Yao, X., Liu, Y., Liang, K.-H. and Lin, G.: Fast Evolutionary Algorithms, in Ghosh, A. and Tsutsui, S. eds., *Advances in Evolutionary Computing: Theory and Applications*, pp. 45–94, Springer-Verlag New York, Inc., New York, NY, USA (2003).
- [14] Zhang, J. and Sanderson, A. C.: JADE: Adaptive Differential Evolution With Optional External Archive, *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, Vol. 13, No. 5, pp. 945–958 (2009).